М. И. БАТЬ, Г. Ю. ДЖАНЕЛИДЗЕ, А. С. КЕЛЬЗОН

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ



М.И. БАТЬ, Г.Ю. ДЖАНЕЛИДЗЕ, А.С. КЕЛЬЗОН

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

ТОМ I

СТАТИКА И КИНЕМАТИКА

ИЗДАНИЕ ДЕВЯТОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ

Допущено Государственным комитетом СССР по народному образованию в качестве учебного пособия для студентов высших технических учебных заведений



МОСКВА "НАУКА"
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1990

ББК 22.21
Б28
УДК 531 (075.8)

Б а т ь М.И., Д ж а н е л и д з е Г.Ю., К е л ь з о н А.С. **Теоретическая механика в примерах и задачах**: Учеб. пособие для втузов. В 3-х т. Т. I. Статика и кинематика. – 9-е изд., перераб. -- М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 672 с. – ISBN 5-02-014450-9.

Рассматриваются следующие разделы статики и кинематики: система сходящихся сил, произвольная плоская система сил, равновесие тел при наличии трения скольжения и трения качения, графическая статика, пространственная система сил, движение точки, поступательное движение и вращение твердого тела вокруг неподвижной оси и неподвижной точки, общий случай движения твердого тела, сложение вращений твердого тела вокруг параллельных и пересекающихся осей, сложение поступательного и вращательного движений твердого тела. Краткие сведения из теории даются в конспективной форме.

Девятое издание (8-е изд. – 1984 г.) дополнено главами о равновесии гибких нерастяжимых нитей, кинематике точки в криволинейных координатах, кинематике роботов.

Для студентов втузов очной и заочной систем обучения, а также для самостоятельного изучения основ теоретической механики.

Табл. 6. Ил. 363.

Р е ц е н з е н т:
кафедра теоретической механики
Московского авиационного института им. С. Орджоникидзе

Б $\frac{1603020000-132}{053(02)-90}$ 75-90

ISBN 5-02-014450-9 (т. I)
ISBN 5-02-014449-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ
КИНЕМАТИКА

ПРЕДИСЛОВИЕ К ДЕВЯТОМУ ИЗДАНИЮ

Немногочисленные законы и теоремы, лежащие в основе теоретической механики, находят весьма разнообразные и обширные применения. Поэтому у лиц, изучающих или использующих в своей деятельности теоретическую механику, наибольшие затруднения вызывает приложение общих положений теории к решению конкретных задач.

В обширной литературе, посвященной теоретической механике, имеется мало книг, ставящих своей целью научить читателя методам решения задач. Между тем потребность в таких руководствах ощущается как студентами в процессе обучения (в особенности студентами заочных и вечерних факультетов), так и инженерами и техниками в их практической деятельности.

Авторы настоящей книги, опираясь на многолетний опыт преподавания теоретической механики в Ленинградском политехническом институте им. М.И. Калинина и Ленинградском высшем инженерном морском училище им. адмирала С.О. Макарова, поставили своей целью создание руководства по решению задач.

В соответствии с этим замыслом в книге даны в конспективной форме лишь краткие сведения из теории – предполагается, что для ее изучения читатель пользуется одним из курсов теоретической механики.

Из большого числа учебников по этому предмету, опубликованных в СССР, отметим прежде всего курс: Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Теоретическая механика, т. I. – Изд. 8-е. – М.: Наука, 1983; т. II. – Изд. 6-е. – М.: Наука, 1983 (книга, определившая современные традиции преподавания теоретической механики во втузах), а также рекомендуем учебники: Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики, т. I. – Изд. 3-е. – М.: Наука. 1979; т. II. – Изд. 2-е. – М.: Наука, 1979; Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – Изд. 3-е. – М.: Физматгиз, 1963 и последующих лет; Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики, т. I. – Изд. 2-е. – М.: Высшая школа, 1964 и последующих лет; Яблонский А.А. Курс теоретической механики, т. II. – Изд. 2-е. – М.: Высшая школа, 1964 и последующих лет.

Наиболее эффективным путем обучения искусству приложения методов теоретической механики является не облегчение формального заучивания правил и приемов (чему часто способствуют обширные методические указания), а показ их в действии. Ввиду этого в руководстве основное внимание уделено решению конкретных задач, специально составленных для того, чтобы, с одной стороны, избежать разбора задач, входящих в сборник И.В. Мещерского и иные распространенные в СССР задачники, а с другой – дать возможность после изучения книги (или ее разделов) самостоятельно решать различные задачи.

Для облегчения активного изучения материала (а только такое изучение и имеет смысл) в каждом разделе книги даны краткие рекомендации о последовательности решения тех или иных типов задач и лишь после этого приведено подробное рассмотрение подобных задач, причем зачастую сравнены и оценены различные методы решения. Решения многих задач являются одновременно примерами инженерных расчетов.

Предполагается, что параллельно с изучением материала книги читатель на основе изученного самостоятельно решает соответствующие задачи и тем самым учится применять знания.

В книге приведены списки рекомендованных к самостоятельному решению задач из книги: М е щ е р с к и й И.В. Сборник задач по теоретической механике. – Изд. 36-е. – М.: Наука, 1986.

Сравнительно большой объем руководства объясняется тем, что оно составлено в расчете как на последовательное изучение, так и на выборочное использование. Последний способ и является главной формой применения ввиду различия объема материала и порядка его прохождения в различных высших учебных заведениях.

Первое издание этого учебного пособия вышло в свет в двух томах в 1961 г. Первый том был посвящен статике и кинематике, а второй – динамике. Оба тома были написаны М.И. Батем, Г.Ю. Джанелидзе и А.С. Кельзоном.

В 1964 г. безвременно скончался профессор Г.Ю. Джанелидзе, соавтор и первый редактор книги.

В 1983 г. скончался кандидат физико-математических наук, доцент М.И. Бать, которому принадлежат многие задачи этой книги.

Вплоть до пятого издания книга переиздавалась без существенных изменений.

За прошедшие годы выявилась необходимость внести в книгу ряд изменений и дополнений. Поэтому пятое издание подверглось переработке. Прежде всего, был пересмотрен весь текст и внесены необходимые исправления. Некоторые менее удачные задачи заменены новыми. Во многих случаях даны более подробные решения.

Идя навстречу многочисленным пожеланиям, авторы внесли новые главы, освещающие дополнительные разделы курса теоретической меха-

ники. Это потребовало увеличения объема книги, в связи с чем книга стала выходить в трех томах. Первые два тома охватывают материал, отвечающий основному курсу теоретической механики, а третий содержит дополнительные главы.

Третий том может быть использован как при изучении дополнительных и факультативных курсов, так и для учебно-исследовательской и научно-исследовательской работы студентов.

В настоящее, девятое издание первого тома перенесены из третьего тома главы "Равновесие гибких нитей" и "Кинематика точки в криволинейных координатах", что позволило сосредоточить в этом томе весь материал по статике и кинематике. Кроме того, в первый том добавлены задачи на определение центра тяжести тел из неоднородного материала, смешанные задачи на сложное движение точки и твердого тела, на сложное движение точки, где следует последовательно применять дважды теорему сложения скоростей и теорему сложения ускорений, задачи из кинематики роботов.

Считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность Е.Г. Бергер, В.Л. Кану, А.А. Кельзону за темы некоторых задач; В.Г. Веретенникову и А.Л. Куницыну, прочитавшим рукопись и сделавшим много ценных указаний.

Хочется надеяться, что и впредь читатели будут помогать совершенствованию книги своими предложениями, которые будут с благодарностью рассмотрены.

А.С. Кельзон

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика является наукой, в которой изучаются перемещения тел с течением времени (механические движения). Она служит базой других разделов механики (теория упругости, сопротивление материалов, теория пластичности, теория механизмов и машин, гидроаэродинамика) и многих технических дисциплин.

В основе теоретической механики, как и всякой науки, лежат представления и абстракции, отражающие главные черты изучаемых явлений. Рассмотрим некоторые из них.

Количественная мера механического взаимодействия между физическими объектами – *сила* – характеризуется модулем, направлением и точкой приложения, т.е. является вектором.

Во многих случаях форма и размеры движущегося тела не играют существенной роли. Поэтому вводится понятие о *материальной точке*, не имеющей протяженности, но обладающей массой (мерой инертности материальной точки).

Все физические тела в той или иной степени деформируемы. В тех случаях, когда этими деформациями можно пренебречь, материальное тело рассматривается как *абсолютно твердое* (или, короче, твердое), т.е. предполагается, что расстояния между любыми его точками остаются неизменными.

Курс механики состоит из трех разделов – *статики, кинематики* и *динамики.*

Статика изучает равновесие сил, приложенных к твердым телам, и способы сложения сил. *Кинематика* исследует движение точки и тел безотносительно к причинам, его вызывающим. *Динамика* изучает движение материальных тел в зависимости от причин, его вызывающих.

Возникшая в результате практической деятельности теоретическая механика развивается в неразрывной связи с техникой. За несколько столетий до нашей эры возникновение статики было вызвано расцветом строительства. Затем новый толчок дало развитие мореплавания, промышленности, военного дела и астрономии – в результате в XV–XVII веках возникли кинематика и динамика.

Великие достижения последних лет – внедрение автоматизации в различные области техники, создание искусственных спутников Земли, запуск космических ракет и межпланетных лабораторий – обусловливают дальнейшее развитие теоретической механики, науки, созданной в результате усилий большого числа гениальных ученых и выдающихся инженеров.

В трудах великого механика Архимеда (287–212 г. до нашей эры) были заложены основы статики. Он впервые ввел понятие центра тяжести. Дальнейшее развитие статика получила в работах голландца Стевина (1548–1620) и французского ученого Роберваля (1602–1675).

Кинематика как отдельный раздел теоретической механики возникла в XIX веке по инициативе Ампера (1775–1836).

Труды итальянского ученого Галилея (1564–1642) и английского ученого Исаака Ньютона (1643–1727) легли в основу классической механики и ее важнейшего раздела – динамики.

Дальнейшее развитие классическая механика получила в трудах Жозефа Луи Лагранжа (1736–1813), Леонарда Эйлера (1707–1783), Николая Егоровича Жуковского (1847–1921), Алексея Николаевича Крылова (1863–1945) и многих других ученых и инженеров.

Раздел первый

СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ СТАТИКИ

Статикой называется раздел теоретической механики, в котором рассматриваются задачи на равновесие систем сил, приложенных к твердым телам, и преобразования одной системы сил в другую, ей эквивалентную. В основе теоретической механики лежат экспериментально установленные законы, справедливость которых проверена многовековой практической деятельностью человека. Основные определения и законы даны ниже.

Материальная точка называется *изолированной*, если можно пренебречь действием других тел на нее.

Закон 1 (закон инерции). Изолированная материальная точка находится в покое либо движется равномерно и прямолинейно.

Равномерное и прямолинейное движение материальной точки является движением по инерции. Под состоянием равновесия материальной точки и твердого тела понимают не только состояние покоя, но и движение по инерции. Для твердого тела существуют различные виды движения по инерции, например равномерное вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

Закон 2. Две силы, приложенные к твердому телу, уравновешиваются только в том случае, если они равны по модулю и направлены в противоположные стороны по общей линии действия (рис. 1.1).

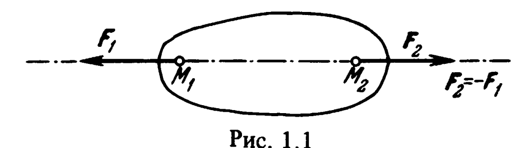


Рис. 1.1

Эти две силы называются *уравновешивающимися*. Силы называются уравновешивающимися, если твердое тело, к которому приложены эти силы, находится в состоянии равновесия.

Закон 3. Не нарушая состояния*) твердого тела, можно добавлять и отбрасывать уравновешивающиеся силы.

*) Слово "состояние" здесь означает состояние движения или покоя.

Следствие. Не нарушая состояния твердого тела, силу можно переносить по линии ее действия в любую точку тела.

Две системы сил называются *эквивалентными*, если одну из них можно заменить другой, не нарушая состояния твердого тела.

Равнодействующей называется сила, которая эквивалентна данной системе сил.

Закон 4. Равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке, приложена в той же точке, равна по модулю диагонали параллелограмма, построенного на этих силах, и направлена вдоль этой диагонали (рис. 1.2).

По модулю равнодействующая равна

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos(\widehat{F_1, F_2})}.$$

Закон 5 (закон равенства действия и противодействия). Силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равны по модулю и

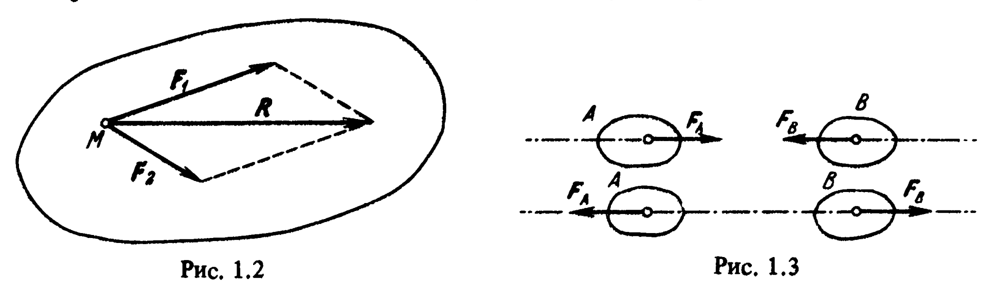


Рис. 1.2 Рис. 1.3

направлены в противоположные стороны по одной прямой, т.е. $\mathbf{F}_B = -\mathbf{F}_A$ *) (рис. 1.3).

Следует иметь в виду, что действие – сила, приложенная к телу B, и противодействие – сила, приложенная к телу A, не уравновешиваются, так как они приложены к разным телам.

Закон 6 (закон отвердевания). Равновесие нетвердого тела не нарушается при его затвердевании.

Не следует при этом забывать, что условия равновесия, являющиеся необходимыми и достаточными для твердого тела, являются необходимыми, но недостаточными для соответствующего нетвердого тела. Так, абсолютно жесткий стержень может находиться в равновесии под действием двух сил, равных по модулю и направленных вдоль стержня либо навстречу друг другу, либо друг от друга (т.е. под действием как сжимающих, так и растягивающих сил), а нить, соответствующая этому стержню, может находиться в равновесии только под действием двух сил, направленных друг от друга. Под действием сил, направленных друг к другу, нить сомнется.

---

*) Буквы, обозначающие векторы, набраны в книге полужирным шрифтом.

Твердое тело называется *свободным*, если его движение ничем не ограничено. В большей части технических задач встречаются лишь несвободные твердые тела.

Несвободным называется такое твердое тело, на которое наложены *связи*, ограничивающие его движение в некоторых направлениях. Так, для лампы, подвешенной на шнуре, связью является шнур; для книги, лежащей на столе, связью является стол; для лестницы, приставленной к стене, связями являются пол и стена. Для шара, катящегося по бильярдному столу, связью является поверхность стола и его борты.

Сила, с которой связь действует на твердое тело, называется *реакцией связи*. Если считать силу, с которой твердое тело действует на связь, действием, то реакция связи является противодействием. При этом сила-действие приложена к связи, а реакция связи приложена к твердому телу.

Все силы, действующие на твердое тело, можно разделить на две группы: *силы активные* и *реакции связей**). При этом активными следует считать все силы, не являющиеся реакциями связей. Таким образом, какая-либо неизвестная сила, не являющаяся реакцией связи, также является активной силой.

Активные силы не зависят от связей, а значит, и от реакций связей, наложенных на твердое тело. Вместе с тем реакции связей зависят от активных сил.

З а к о н 7 (закон освобождаемости от связей). Несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное, если его мысленно освободить от связей, заменив действие связей соответствующими реакциями связей.

Этот закон дает возможность, в частности, применить к несвободному твердому телу условия равновесия, справедливые для свободного твердого тела. При этом следует, отбросив связи, наложенные на твердое тело, заменить их соответствующими реакциями связей. Затем надлежит рассмотреть равновесие этого несвободного твердого тела, как тела свободного, под действием активных сил и реакций связей.

В большинстве задач на равновесие твердого тела следует, если это возможно, сразу указать направление реакций связей, а затем определить их модули, в ходе решения задач. Для облегчения определения направления реакций связей рекомендуется внимательно ознакомиться с приведенными ниже примерами.

1. Если твердое тело опирается на идеально гладкую (без трения) поверхность, то реакция поверхности направлена по нормали к ней в точке соприкосновения, т.е. перпендикулярно к касательной плоскости в данной точке поверхности (рис. 1.4). Такая реакция называется *нормальной реакцией*.

---

*) Иногда активные силы называют задаваемыми.

2. Если твердое тело в точках A и B (рис. 1.5) опирается на ребра двугранных углов, а в точке C – на гладкую плоскость, то для направления реакций связи в точках A и B следует применить метод обращения, т.е. представить, что двугранный угол опирается на твердое тело (рис. 1.6), являющееся для него связью. Эта обращенная задача сводится к рассмотренному выше случаю 1, т.е. опорная реакция R'_A направляется по

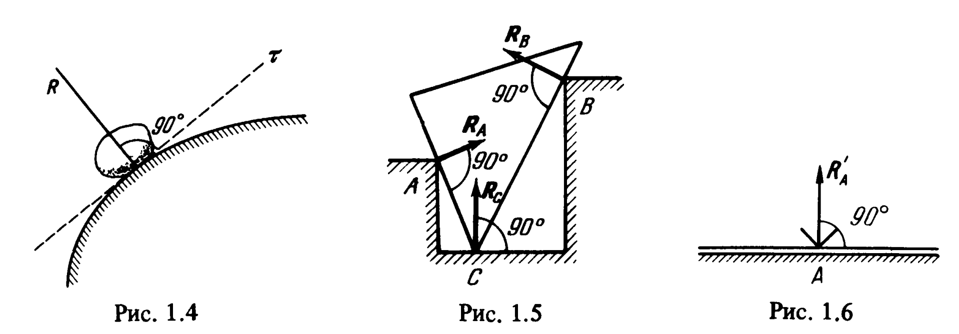


Рис. 1.4 Рис. 1.5 Рис. 1.6

соответствующей нормали. Снова обратив задачу, определяют искомое направление реакций в точках A и B, причем на основании закона равенства действия и противодействия: $R_A = -R'_A$, $R_B = -R'_B$. Реакция R_C, в соответствии со случаем 1, направляется перпендикулярно к горизонтальной плоскости (см. рис. 1.5).

3. Если твердое тело упирается острием в угол (например, лестница в выступ пола), то подобную связь следует рассматривать как двойную: угол A (рис. 1.7) препятствует перемещению твердого тела по горизонтали

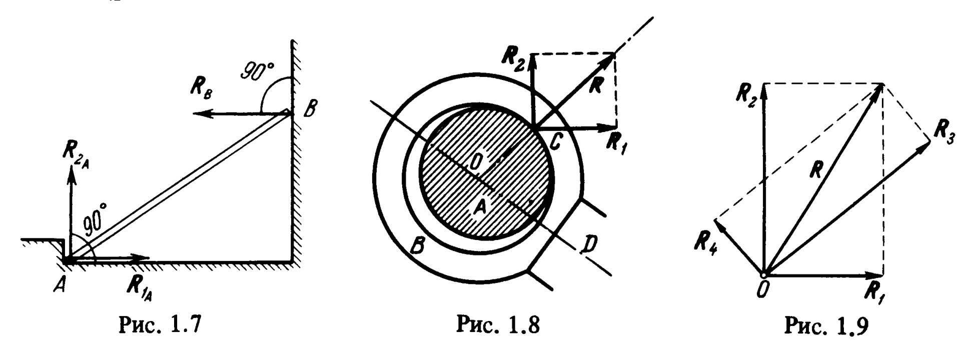


Рис. 1.7 Рис. 1.8 Рис. 1.9

налево и по вертикали вниз. Поэтому две составляющие опорной реакции R_{1A} и R_{2A} следует направить противоположно этим перемещениям: первую – направо, вторую – вверх. (В подобных случаях реакцию R_A зачастую ошибочно направляют вдоль AB.)

4. *Цилиндрическим шарниром* называется совокупность неподвижного валика A и надетой на него втулки B, соединенной с твердым телом D (рис. 1.8). При этом твердое тело может поворачиваться вокруг оси

валика. В точке соприкосновения C втулки с валиком возникает опорная реакция, направленная по нормали к идеально гладким поверхностям соприкасающихся тел в точке касания. Так как положение точки C соприкосновения валика A с втулкой B заранее неизвестно, то невозможно сразу указать направление реакции R. При решении задач реакция R заменяется двумя взаимно перпендикулярными составляющими R_1 и R_2. Определив в ходе решения задачи R_1 и R_2, находят модуль и направление реакции R. Нетрудно видеть, что реакцию можно разложить на составляющие по любым двум направлениям, например на R_1 и R_2 или на R_3 и R_4 (рис. 1.9) и т.д.

Обычно, пренебрегая диаметром валика, по сравнению с другими размерами, составляющие R_1 и R_2 прилагают в центре O.

5. В случае *сферического шарнира* (рис. 1.10) также нельзя заранее указать положение точки соприкосновения и, следовательно, направление реакции R. При решении задач реакция R сферического шарнира заменяется

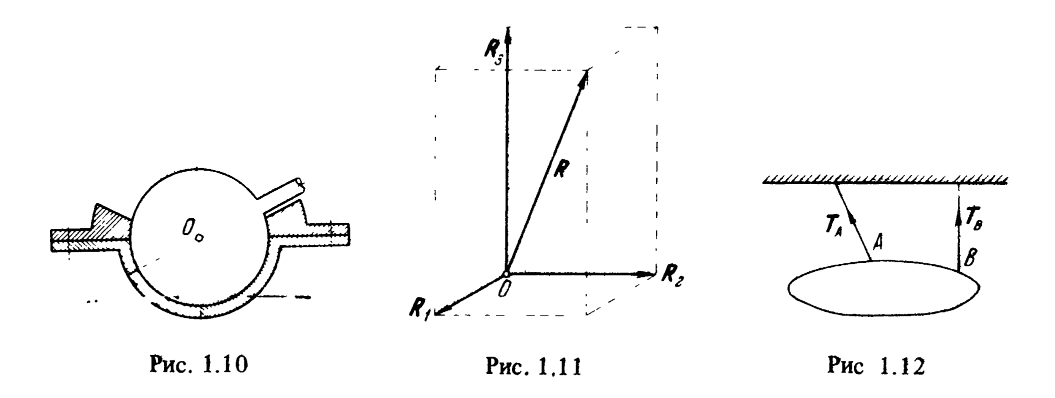


Рис. 1.10 Рис. 1.11 Рис 1.12

тремя взаимно перпендикулярными составляющими R_1, R_2 и R_3 (рис. 1.11).

6. Если на твердое тело наложена гибкая связь (нить, канат, трос, цепь и др.), то реакция приложена к твердому телу в точке его прикрепления к гибкой связи. Реакция гибкой связи направлена по связи, если она прямолинейна, или по касательной к связи в точке ее наложения (рис. 1.12).

7. Если абсолютно жесткий невесомый прямолинейный стержень, концы которого соединены шарнирами с другими частями конструкции, находится в равновесии под действием сил, приложенных по его концам, то следует реакции направить вдоль стержня.

Действительно, если к стержню со стороны других частей конструкции приложены силы в каждом из его концов, т.е. в шарнирах, то после сложения сил оказывается, что в каждом из шарниров приложено по одной силе.

В результате стержень находится в равновесии под действием двух сил, приложенных в шарнирах. Согласно второму закону эти силы по модулю равны и направлены в противоположные стороны по общей линии действия, т.е. вдоль стержня. При этом стержень подвергается действию растягивающих сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}'_1$ (рис. 1.13, *а*) либо действию сжимающих сил $\boldsymbol{F}_2$ и $\boldsymbol{F}'_2$ (рис. 1.13, *б*), причем $\boldsymbol{F}'_1 = -\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}'_2 = -\boldsymbol{F}_2$. Если стержень подвержен растяжению, то реакции стержня $\boldsymbol{T}_1$ и $\boldsymbol{T}'_1$, приложенные к шарнирам, на основании закона равенства действия и противодействия направлены

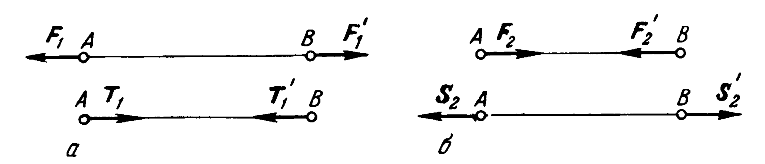


Рис. 1.13

вдоль стержня друг к другу (рис. 1.13, *а*). Если стержень подвержен сжатию, то реакции стержня $\boldsymbol{S}_2$ и $\boldsymbol{S}'_2$, приложенные к шарнирам, направлены вдоль стержня друг от друга (рис. 1.13, *б*). Следовательно,

$$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{T}_1 \quad \text{и} \quad \boldsymbol{F}'_1 = -\boldsymbol{T}'_1$$

(рис. 1.13, *а*), а также

$$\boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{S}_2 \quad \text{и} \quad \boldsymbol{F}'_2 = -\boldsymbol{S}'_2$$

(рис. 1.13, *б*). Так как $\boldsymbol{F}'_1 = -\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}'_2 = -\boldsymbol{F}_2$, то получим

$$\boldsymbol{T}'_1 = -\boldsymbol{T}_1 \quad \text{и} \quad \boldsymbol{S}'_2 = -\boldsymbol{S}_2.$$

Указание. Решение задач на равновесие твердого тела, независимо от взаимного расположения приложенных к телу сил, рекомендуется проводить в следующем порядке:

1) выделить твердое тело, равновесие которого надо рассмотреть для отыскания неизвестных величин;

2) изобразить активные силы;

3) если твердое тело несвободно, то, применив закон освобождаемости от связей, приложить к нему соответствующие реакции связей;

4) рассмотреть равновесие данного несвободного твердого тела, как тела свободного, находящегося под действием активных сил и реакций связей;

5) использовать необходимые и достаточные условия (уравнения) равновесия в соответствии со взаимным расположением сил, приложенных к твердому телу, и определить искомые величины.

Обращаем внимание читателя на то, что этот порядок является общим при решении любых задач на равновесие твердого тела. Методы применения пятого пункта и дополнительные рекомендации будут сделаны в соответствующих параграфах.

Законы механики впервые были установлены Ньютоном в сочинении "Philosophiae naturalis principia mathematica" (1687)*).

Эти законы – результат наблюдения над окружающим нас миром. Они принимаются без доказательств. Все теоремы механики выводятся из этих законов.

Они будут изложены в начале II тома, посвященного динамике.

Законы статики, приведенные в этом параграфе, достаточны чтобы обосновать только статику.

В число законов статики входят некоторые из общих законов механики. Остальные законы статики могут быть выведены из законов Ньютона как следствия.

---

*) Сочинение И. Ньютона переведено на русский язык А.Н. Крыловым под названием "Математические начала натуральной философии" (Петроград, 1915–1916 гг., Известия Морской академии).

Глава 1

ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

§ 1. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

1. Равновесие системы сходящихся сил. *Сходящимися* называются силы, линии действия которых пересекаются в одной точке. После переноса всех сил по их линиям действия в эту точку получается эквивалентная система сил, приложенных в одной точке.

Равнодействующая $\boldsymbol{R}$ системы сил, приложенных в одной точке, приложена в той же точке и изображается замыкающей стороной многоугольника, построенного на слагаемых силах, т.е. равнодействующая $\boldsymbol{R}$ равна векторной сумме слагаемых сил:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k. \qquad (1^*)$$

При построении суммы векторов (рис. 1.14) надо к концу первого слагаемого вектора $\boldsymbol{F}_1$ приложить вектор $\boldsymbol{F}'_2$, равный второму слагаемому вектору $\boldsymbol{F}_2$, к концу второго слагаемого вектора $\boldsymbol{F}'_2$ присоединить вектор $\boldsymbol{F}'_3$, равный третьему слагаемому вектору $\boldsymbol{F}_3$, и т.д. Суммой векторов $\boldsymbol{R}$ является замыкающий вектор, начало которого совмещено с началом первого слагаемого вектора, а конец – с концом последнего слагаемого вектора. Если векторы изображают силы, то многоугольник $OABCD$, построенный на рисунке для четырех слагаемых сил, называется *силовым*, а его замыкающая сторона OD является равнодействующей $\boldsymbol{R}$.

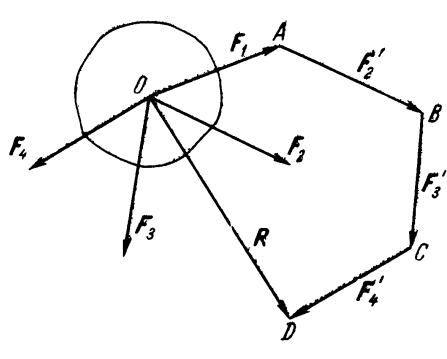


Рис. 1.14

Если все слагаемые силы лежат на одной прямой, то и вершины силового многоугольника оказываются лежащими на одной прямой. Равнодействующая $\boldsymbol{R}$ этой системы сил лежит на той же прямой. На рис. 1.15 изображена равнодействующая четырех сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ и $\boldsymbol{F}_4$, лежащих на одной

прямой. (Для ясности изображения линии действия сил несколько смещены друг относительно друга.)

Для равновесия системы сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы векторная сумма этих сил равнялась нулю: $\boldsymbol{R} = 0$, т.е. чтобы силовой многоугольник был замкнут. Это значит, что конец вектора последней слагаемой силы должен совместиться с началом вектора первой

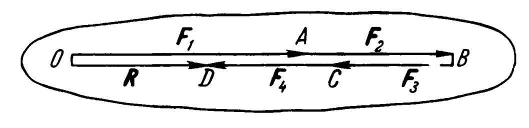


Рис. 1.15

слагаемой силы. На рис. 1.16 изображен замкнутый силовой многоугольник, построенный на пяти слагаемых силах.

В случае равновесия сил, лежащих на одной прямой, вершины замкнутого силового многоугольника оказываются лежащими на прямой, вдоль которой в обоих направлениях отложены слагаемые силы, векторная сумма которых равна нулю (рис. 1.17).

Указание. При решении задач на равновесие твердого тела, к которому приложена плоская система сходящихся сил, надо выполнить четыре первых пункта, указанных в начале книги, на с. 16. Затем :

5) построить замкнутый силовой многоугольник (построение надо начинать с силы, известной как по модулю, так и по направлению) ;

6) решив силовой многоугольник, определить искомые величины.

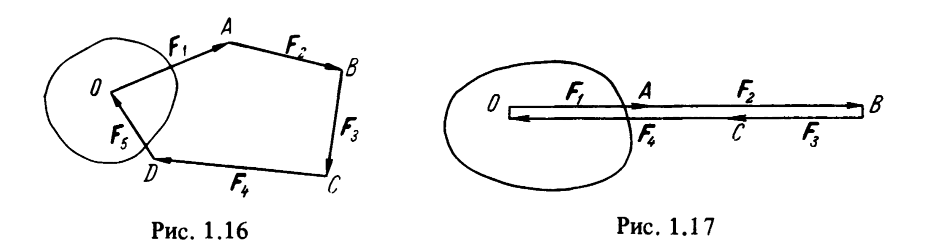


Рис. 1.16 Рис. 1.17

Если число активных сил и реакций связей, приложенных к твердому телу, находящемуся в равновесии, равно трем, то задача сводится к построению и решению силового треугольника.

Задача 1.1. Электромагнит весом $G = 80$ Н подвешен на нерастяжимом тросе над болванкой, лежащей на станине (рис. *а*). Между электромагнитом и болванкой имеется воздушный зазор. При включении тока электромагнит действует на болванку силой $P = 150$ Н, передающейся через воздушный зазор. Вес болванки равен $Q = 240$ Н.

Определить натяжение троса и давление болванки на станину.

Решение. Для ответа на два вопроса задачи необходимо решить две отдельные задачи: о равновесии электромагнита и о равновесии болванки.

Рассмотрим равновесие электромагнита (рис. *б*). На него действует активная сила – сила тяжести G, а с момента включения тока добавляется еще одна активная сила притяжения P. На электромагнит наложена одна связь–трос. Мысленно освободим электромагнит от связи, заменив ее действие реакцией R_1, направленной вдоль троса. Так как электромагнит находится в покое, то силы, приложенные к нему, уравновешены.

Напишем уравнение равновесия для этих сил, действующих по одной прямой:

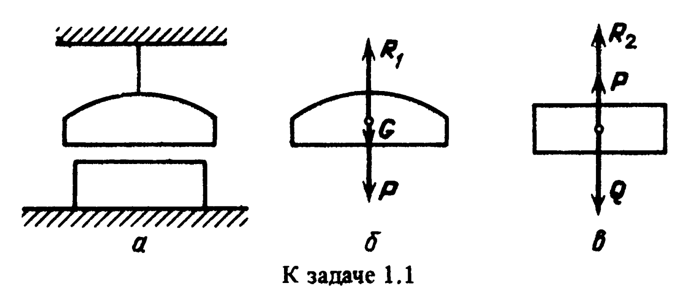
$$R_1 - G - P = 0.$$

Подставляя значение веса электромагнита G и силы электромагнитного притяжения P, находим реакцию

$$R_1 = 80\ \text{Н} + 150\ \text{Н} = 230\ \text{Н}.$$

Согласно закону о равенстве действия и противодействия, сила T, натягивающая трос, и реакция троса R_1 равны по величине и противоположны по направлению. Итак, первый ответ: сила натяжения троса равна $T = 230$ Н.

Рассмотрим равновесие болванки. К ней приложена активная сила G – вес болванки. При включении тока на болванку через воздушный зазор действует сила электромагнитного притяжения P, направленная вверх.



К задаче 1.1

Связью для железной болванки является станина. Мысленно отбрасываем эту связь и заменяем ее действие реакцией, которую назовем R_2. Система уравновешенных сил, приложенных к болванке, изображена на рис. *в*. Уравнение равновесия для этой системы сил

$$P + R_2 - Q = 0.$$

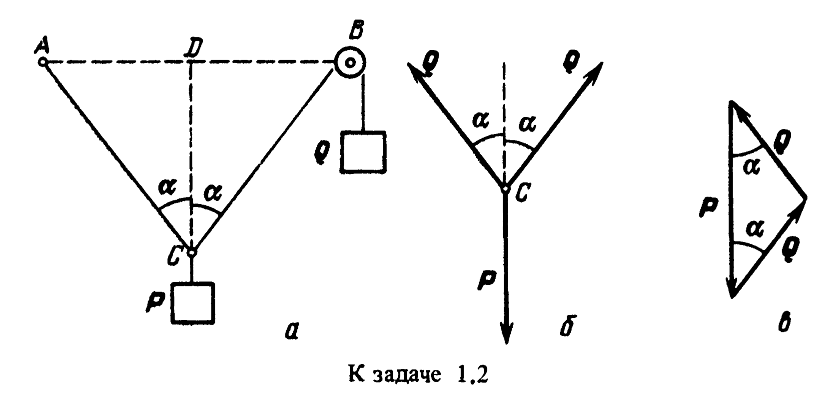
При заданных значениях P и Q получаем из этого уравнения реакцию станины:

$$R_2 = Q - P = 240\ \text{Н} - 150\ \text{Н} = 90\ \text{Н}.$$

Согласно закону о равенстве действия и противодействия заключаем, что давление болванки на станину равно

$F = R_2 = 90$ Н.

Задача 1.2. Нить закреплена в точке A и перекинута в точке B через гладкий блок. В точке C к нити прикреплен груз P. На конце нити, перекинутой через блок, висит груз Q. Длина $AC = b$. Расстояние $AB = a$. При ка-



К задаче 1.2

ком соотношении грузов P и Q линия действия груза P разделит отрезок $AB = a$ пополам?

Решение. Согласно условию задачи линия действия силы P пересекает отрезок AB посредине. Следовательно, прямые AC и BC образуют один и тот же угол α с вертикалью DC.

В силу полной симметрии равновесие точки C в этом случае возможно только при равенстве сил натяжения в отрезках нити BC и AC. Следовательно, усилия в этих отрезках одинаковы и равны Q (рис. *б*).

Для равновесия необходимо и достаточно, чтобы три силы, приложенные к точке C, образовывали замкнутый силовой треугольник (рис. *в*).

Найдем синус и косинус угла α, образованного сторонами AC и CD. Из треугольника ACD

$$\sin\alpha = \frac{a}{2b},$$
$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{a^2}{4b^2}}. \qquad (1)$$

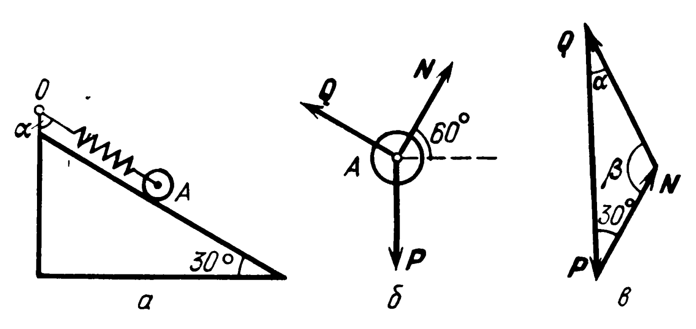
Далее из силового треугольника (рис. *в*) находим

$$P = 2Q\cos\alpha = 2Q\sqrt{1-\frac{a^2}{4b^2}}. \qquad (2)$$

Из уравнения (2) находим искомое соотношение грузов, при котором линия действия силы P разделит отрезок AB пополам

$$\frac{P}{Q} = \sqrt{4 - \frac{a^2}{b^2}}. \qquad (3)$$

Задача 1.3. Однородный шар весом $P = 40$ Н удерживается на гладкой наклонной плоскости нитью, которая привязана к пружинным весам, укрепленным в точке O. Показания пружинных весов $Q = 20$ Н. Угол наклона



К задаче 1.3

плоскости к горизонту равен 30°. Определить угол α, образованный нитью с вертикалью, и силу давления N шара на плоскость (рис. *а*).

Р е ш е н и е. Рассмотрим равновесие шара, отбросив мысленно связи: наклонную плоскость и нить (рис. *б*). На шар действует одна активная сила (вес P), направленная по вертикали вниз и равная 40 Н. Кроме того, на шар действуют реакции связей: 1) реакция наклонной плоскости N, неизвестная по модулю, но известная по направлению; реакция N действует перпендикулярно к гладкой наклонной плоскости, образуя угол 60° с горизонталью, и 2) натяжение нити Q – известное по модулю, но неизвестное по направлению.

Теперь можно рассмотреть шар как свободное твердое тело, находящееся в равновесии под действием плоской системы трех сил: P, N и Q, линии действия которых пересекаются в центре шара A (рис. *б*).

Построим на этих трех силах, находящихся в равновесии и приложенных в одной точке A, замкнутый силовой треугольник. При этом следует учесть, что сила P известна по модулю и направлению, сила N известна только по направлению, а сила Q известна только по модулю.

Для построения силового треугольника откладываем в избранном масштабе силу P. Из конца этой силы проводим прямую в направлении линии действия силы N. Из начала силы P радиусом, равным модулю силы Q, описываем дугу окружности. Точка пересечения сил Q и N будет третьей вершиной силового треугольника. Таким образом, длина стороны N тре-

угольника определяет модуль реакции N, а направление стороны Q соответствует направлению OA.

Для определения модуля силы N, а также углов α и β, воспользуемся теоремой синусов:

$$\frac{P}{\sin\beta}=\frac{Q}{\sin 30^\circ}=\frac{N}{\sin\alpha}, \qquad (1)$$

откуда

$$\sin\beta=\frac{P}{Q}\sin 30^\circ=\frac{40}{20}\cdot\frac{1}{2}=1, \qquad (2)$$

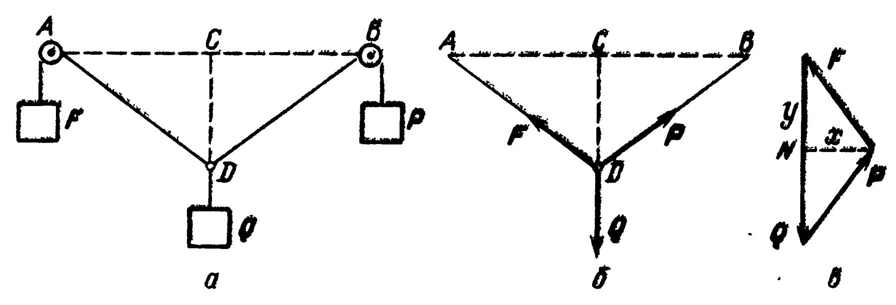
следовательно,

$$\beta=90^\circ,\quad \alpha=60^\circ. \qquad (3)$$

Таким образом, при равновесии пружина параллельна наклонной плоскости. Реакция наклонной плоскости равна

$$N=\frac{P\sin\alpha}{\sin\beta}=40\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 34{,}6\ \text{Н}. \qquad (4)$$

Задача 1.4. Нить перекинута через два гладких блока с неподвижными осями A и B (рис. *а*). К концам нити подвешены грузы F и P. Груз Q подвешен в точке D.



К задаче 1.4

Определить отношение AC/BC при равновесии, если точка C лежит на пересечении линии действия силы Q с горизонталью AB.

Р е ш е н и е. Рассмотрим равновесие точки D (рис. *б*). На эту точку действуют три силы: сила тяжести груза Q, натяжение левой части нити F и натяжение правой части нити P. Блоки A и B меняют направление действия сил F и P. На точку D эти силы действуют соответственно по прямым DA и DB.

Построим на этих силах замкнутый силовой треугольник (рис. *в*). Для этого отложим в избранном масштабе вертикальную силу Q, а из ее концов в том же масштабе – силы F и P.

Проведем в силовом треугольнике из конца силы P горизонтальный отрезок x. Обозначим буквой N пересечение этого отрезка с вертикальной силой Q (рис. *в*). Буквой y обозначим отрезок вертикали от конца силы F до точки N.

Тогда треугольник, образованный сторонами x, y, F (рис. *в*), будет подобен треугольнику ACD (рис. *б*), так как стороны одного треугольника параллельны сторонам второго треугольника. Аналогично подобны треугольник, образованный сторонами x, P, $(Q - y)$ (рис. *в*), и треугольник BCD (рис. *б*). Стороны этих треугольников также параллельны.

Тогда условия пропорциональности сторон для первой пары треугольников будут

$$\frac{F}{AD} = \frac{x}{AC} = \frac{y}{CD}. \tag{1}$$

Аналогично для второй пары подобных треугольников получим

$$\frac{P}{DB} = \frac{x}{BC} = \frac{Q-y}{CD}. \tag{2}$$

С другой стороны, по теореме Пифагора (рис. *в*) имеем

$$x^2 + y^2 = F^2, \quad (Q - y)^2 + x^2 = P^2. \tag{3}$$

Решая совместно эти два уравнения, находим

$$x^2 = F^2 - y^2 \tag{4}$$

и, внося это значение во второе уравнение (3), имеем

$$(Q - y)^2 + F^2 - y^2 = P^2,$$

откуда

$$y = \frac{Q^2 + F^2 - P^2}{2Q}. \tag{5}$$

Из уравнения (1) имеем

$$\frac{x}{AC} = \frac{y}{CD}, \tag{6}$$

а из уравнения (2)

$$\frac{x}{BC} = \frac{Q-y}{CD}. \tag{7}$$

Разделим уравнение (7) на уравнение (6):

$$\frac{AC}{BC} = \frac{Q-y}{y} = \frac{Q}{y} - 1. \tag{8}$$

Внося в это равенство найденное значение y (5), находим

$$\frac{AC}{BC}=\frac{2Q^2}{Q^2+F^2-P^2}-1=\frac{Q^2+P^2-F^2}{Q^2+F^2-P^2}. \qquad (9)$$

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 1.2, 1.5, 2.6, 2.7, 2.10, 2.13, 2.18, 2.23, 2.29.

2. Теорема о трех непараллельных силах. Если твердое тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке (рис. 1.18).

Следует иметь в виду, что пересечение линий действия трех непараллельных сил в одной точке является лишь необходимым условием для равновесия твердого тела. Пересечение линий действия трех сил в одной точке не является достаточным условием, так как равнодействующая этих сил может оказаться не равной нулю. Следовательно достаточным условием является наличие замкнутого силового треугольника при одновременном пересечении линий действия трех сил в одной точке.

Теорема о трех непараллельных силах значительно облегчает решение задач на равновесие твердого тела в тех случаях, когда направление одной из трех уравновешивающихся сил неизвестно. Действительно, определив точку пересечения линий действия двух сил, направления которых известны, можно указать направление линии действия третьей силы, так как она должна пройти через точку приложения этой силы и точку пересечения линий действия первых двух сил.

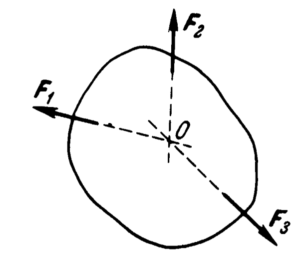


Рис. 1.18

Среди задач о трех непараллельных силах встречаются задачи, в которых одна сила известна по модулю и направлению, у второй силы известно только направление, а у третьей – только величина. В этом случае для построения силового треугольника следует первой отложить на чертеже силу, известную по величине и по направлению. Из ее конца провести направление второй силы. А из начала первой силы провести циркулем дугу окружности, радиус которой равен величине третьей силы. Пересечение этой дуги окружности с направлением второй силы и определит третью вершину силового треугольника.

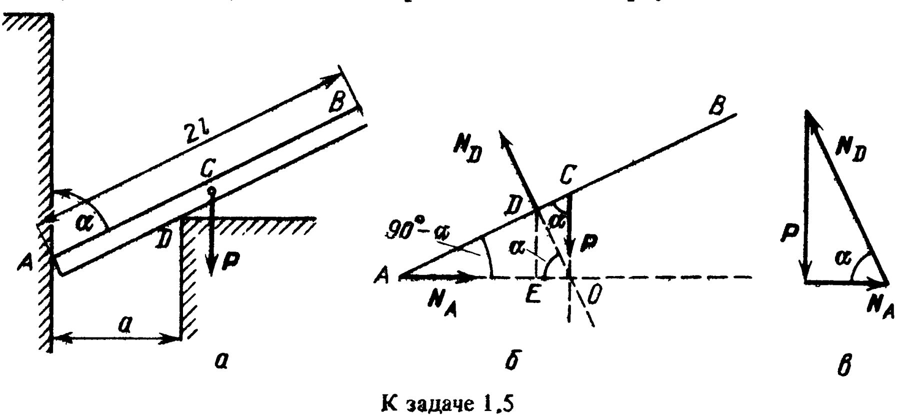
Задача 1.5. Два здания – высокое и низкое – находятся на расстоянии a друг от друга. Балку AB вставили между стенами зданий так, что она концом A упирается в гладкую стену более высокого здания, а промежуточной точкой D оперта на край стенки более низкого здания (рис. a). Длина балки равна $2l$, вес балки P.

Какой угол с вертикалью составляет балка в равновесии? Определить также реакции зданий.

Решение. Рассмотрим равновесие балки AB. На балку действует одна активная сила, равная весу балки, приложенная в точке C посредине балки. На балку наложено две связи, осуществляемые стенкой более высокого здания и краем D стенки второго здания. Отбросим мысленно обе связи и заменим их действие реакциями. В точке A балка по условию опирается на гладкую стену, поэтому реакция N_A перпендикулярна стене. Направим реакцию N_A вправо, так как стена является односторонней связью и удерживает балку только от перемещения влево. В промежуточной точке D опорой для балки является край стены, т.е. прямой угол. Реакцию N_D следует направить перпендикулярно балке AB, поскольку угловая опора не препятствует перемещению балки в направлении AB.

Расчетная схема балки, находящейся в равновесии, показана на рис. *б*.

На объект равновесия – балку AB – действуют три силы. Следовательно, можно воспользоваться теоремой о трех силах. Линии их действия должны пересекаться в одной точке, а сами силы должны образовывать замкнутый треугольник. Заметим, что направления силы тяжести P и реакции вертикальной стенки N_A не зависят от того, под каким углом установлена балка. Сила тяжести направлена по вертикали, реакция N_A – по горизонтали, стало быть, эти две стороны силового треугольника составляют



К задаче 1.5

прямой угол. Силовой треугольник – прямоугольный, сила P и реакция N_A образуют его катеты, а реакция N_D является гипотенузой. Из расчетной схемы видно, что реакция N_D составляет с вертикалью угол, равный $90° - \alpha$. В силовом треугольнике (рис. *в*) N_D составляет такой же угол с вертикальной стороной, т.е. с P. На расчетной схеме нетрудно найти треугольник, подобный силовому треугольнику. Строим точку пересечения O линий действия силы тяжести P и реакции N_A. Опускаем из D перпендикуляр DE на горизонтальную линию AO. Стороны получившегося треугольника

DEO параллельны сторонам силового треугольника – следовательно, треугольники подобны. Далее можно задачу решать двумя способами.

Способ 1. Угол $EDO = 90° - \alpha$, угол при вершине O равен искомому углу α. Запишем соотношение сторон в треугольнике DEO:

$$\frac{DE}{EO} = \operatorname{tg} \alpha. \qquad (1)$$

Сторону DE выразим из прямоугольного треугольника AED:

$$\frac{DE}{AE} = \operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Зная из условия, что $AE = a$, получим

$$DE = AE \cdot \operatorname{tg}(90° - \alpha) = a \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}. \qquad (2)$$

Из рисунка видно, что $EO = AO - AE$.

Отрезок AO выразим из прямоугольного треугольника ACO, в котором известна из условия гипотенуза $AC = AB/2 = l$:

$$AO = AC \cdot \sin \alpha = l \sin \alpha.$$

Тогда

$$EO = l \sin \alpha - a. \qquad (3)$$

Подставим (2) и (3) в (1):

$$\frac{a/\operatorname{tg} \alpha}{l \sin \alpha - a} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Перепишем это равенство в виде

$$\operatorname{tg}^2 \alpha (l \sin \alpha - a) = a \qquad (4)$$

и выразим $\operatorname{tg}^2 \alpha$ через $\sin \alpha$:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}.$$

Получаем (4):

$$\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}(l \sin \alpha - a) = a.$$

Приводя к общему знаменателю, получим $l \sin^3 \alpha = a$, откуда

$$\sin \alpha = \sqrt[3]{a/l}. \qquad (5)$$

Способ 2. Из прямоугольного треугольника ACO (рис. *б*) находим $AO = AC \cdot \sin \alpha = l \sin \alpha$.

Далее, из прямоугольного треугольника AOD имеем

$$AD = AO \cdot \sin\alpha = l\sin^2\alpha$$

и, наконец, из прямоугольного треугольника ADE получаем

$$AE = AD \cdot \sin\alpha = l\sin^3\alpha.$$

Но $AE = a$ по условию. Следовательно,

$$a = l\sin^3\alpha,$$

откуда $\sin\alpha = \sqrt[3]{a/l}$.

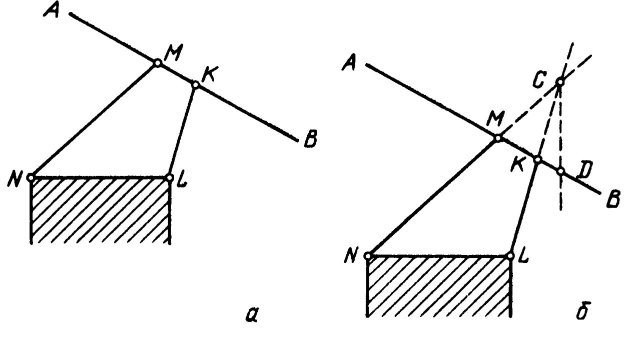
Переходим к определению реакций N_A и N_D. Из силового треугольника находим

$$N_D = \frac{P}{\sin\alpha} = \sqrt[3]{\frac{l}{a}}P.$$

Далее находим

$$N_A = N_D\cos\alpha = \sqrt[3]{\frac{l}{a}}P\sqrt{1-\sqrt[3]{\frac{a^2}{l^2}}} = P\sqrt{\sqrt[3]{\frac{l^2}{a^2}}-1}.$$

Задача 1.6. Механизм, расположенный в вертикальной плоскости, состоит из невесомого стержня AB, шарнирно скрепленного в точках M и K



К задаче 1.6

с двумя невесомыми стержнями MN и KL, точки N и L которых неподвижны (рис. a).

В какой точке стержня AB можно подвесить груз Q, не нарушая равновесия?

Р е ш е н и е. Объектом равновесия следует считать стержень AB, так как именно к нему го условию подвешивается груз, т.е. оказывается приложенной активная сила тяжести груза Q. На стержень наложены две

связи – шарнирно-стержневые опоры MN и KL. Стержни MN и KL могут свободно поворачиваться вокруг своих неподвижных концов N и L, но они препятствуют перемещениям точек M и K стержня AB в направлениях линий MN и KL (в обе стороны, как к неподвижным точкам, так и от них). Реакции опор MN и KL при любом силовом воздействии на стержень AB направлены вдоль линий MN и KL. Если к стержню AB в некоторой его точке приложена сила тяжести груза Q, а в точках M и K – реакции стержневых опор, и если система находится в равновесии, то справедлива теорема о трех непараллельных силах. Воспользуемся этим необходимым условием равновесия стержня AB для определения положения точки подвеса D груза Q. Линии действия реакций стержней MN и KL пересекаются в точке C (рис. *б*). Так как линии действия трех непараллельных сил, удерживающих тело в равновесии, пересекаются в одной точке, то ясно, что линия действия активной силы Q должна проходить через точку C. Направление линии действия Q нам известно – это сила тяжести, которая вертикальна. Проведем из точки C вертикальную штриховую линию (см. рис. *б*). Отметим точку D пересечения вертикальной линии со стержнем AB. Это и есть искомая точка, – подвесив груз к стержню в точке D, получим систему, находящуюся в равновесии.

Заметим, что в пределах гипотезы абсолютно твердого тела нет никаких ограничений на груз Q. Увеличивая груз, будем получать большие значения реакций. Силовые треугольники, построенные в каком-либо масштабе, будут отличаться лишь длинами сторон, оставаясь все время подобными. Для реальных стержней, способных деформироваться, нельзя безгранично увеличивать груз Q, так как вступают в силу вопросы прочности и сохранения прямолинейности. Решение этих вопросов выходит за рамки курса теоретической механики.

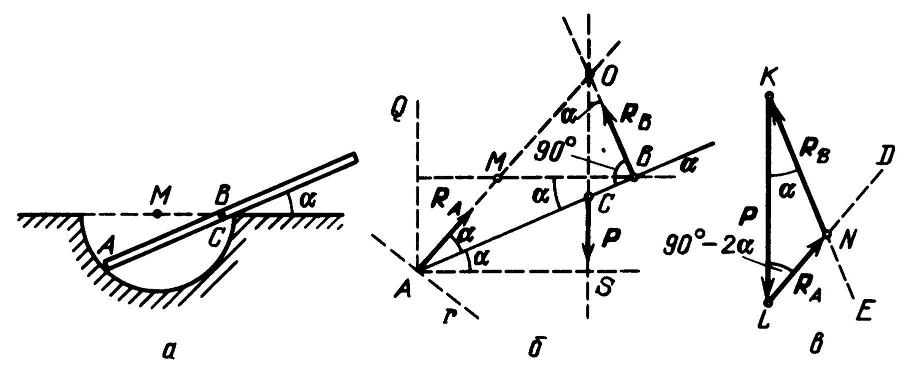
Задача 1.7. Однородная палочка весом P и длиной $2a$ опирается концом A на гладкую внутреннюю поверхность полусферической чаши радиусом r. Промежуточной точкой B палочка опирается на край чаши.

Определить угол α, образуемый палочкой с горизонталью в положении равновесия, и опорные реакции в точках A и B. Центр тяжести палочки находится в точке C; M – центр сферы, половина которой образует чашу (рис. *а*).

Р е ш е н и е. Если опустить палочку концом A в полусферическую чашу, то она займет в ней положение равновесия при некотором фиксированном значении угла α, образуемого палочкой с горизонтом. При этом угол α зависит от длины палочки $2a$ и радиуса чаши r.

В случае равновесия угол α должен быть таким, чтобы линии действия трех сил, приложенных к палочке, – силы тяжести P и реакций R_A и R_B – пересекались в одной точке. Реакция R_A направляется по нормали к поверхности в данной точке, т.е. по радиусу AM, а реакция R_B – перпендикулярно палочке (рис. *б*).

Пусть O — точка пересечения линий действия этих трех сил. Такого построения оказывается достаточно для определения значения угла α. Рассматривая равнобедренный треугольник AMB, имеем $AM = MB = r$, $\angle BAM = \angle ABM$. Так как $\angle MBA = \angle BAS = \alpha$, то $\angle BAM = \angle AMB = \alpha$. Угол ABO является по построению прямым. Он должен опираться на диаметр окружности; поэтому $AO = 2r$. Из треугольника AOS находим $AS = AO \cdot \cos 2\alpha = 2r \cos 2\alpha$. Из треугольника ACS имеем $AS = AC \cdot \cos\alpha = a\cos\alpha$. (Так как



К задаче 1.7

центр тяжести однородной палочки расположен в ее середине, то $AC = a$.) Следовательно,

$$AS = 2r\cos 2\alpha = a\cos\alpha. \tag{1}$$

Заменив $\cos 2\alpha$ на $2\cos^2\alpha - 1$, получим

$$2r(2\cos^2\alpha - 1) = a\cos\alpha,$$

или

$$4r\cos^2\alpha - a\cos\alpha - 2r = 0.$$

Решив это квадратное уравнение, найдем

$$\cos\alpha = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 32r^2}}{8r}.$$

Так как $0 < \alpha < \pi/2$, то $0 < \cos\alpha < 1$. Поэтому, отбросив отрицательное значение $\cos\alpha$, окончательно получим

$$\cos\alpha = \frac{a + \sqrt{a^2 + 32r^2}}{8r}. \tag{2}$$

Для определения опорных реакций R_A и R_B построим замкнутый силовой треугольник (рис. *в*). Из произвольной точки K проводим вектор, равный силе P (в избранном нами масштабе). Проведя через начало

вектора P прямую KE, параллельную реакции R_B, а через конец вектора P – прямую LD, параллельную реакции R_A, получим в точке пересечения этих прямых третью вершину N силового треугольника KLN. Сравнивая рис. *б* и *в*, замечаем, что $\angle NKL = \angle BOC = \alpha$, $\angle NLK = \angle QAM = 90° - \angle MAS = 90° - 2\alpha$ и, следовательно,

$$\angle KNL = 180° - (\angle LKN + \angle KLN) = 90° + \alpha.$$

Применив к силовому треугольнику KLN теорему синусов, запишем

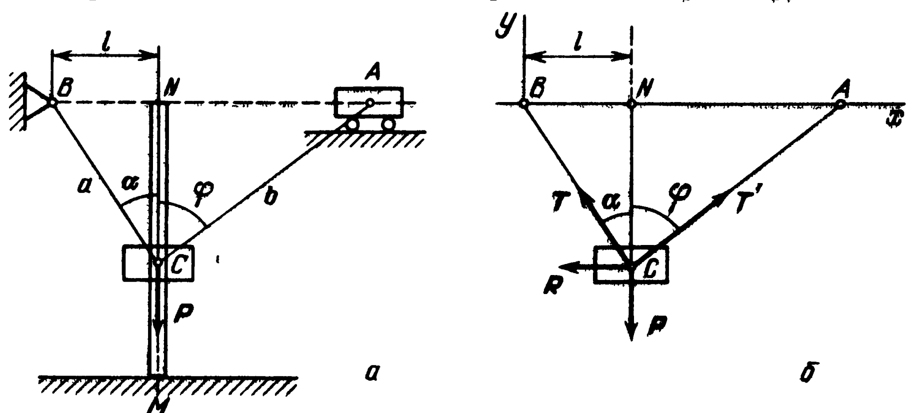
$$\frac{P}{\sin(90° + \alpha)} = \frac{R_A}{\sin\alpha} = \frac{R_B}{\sin(90° - 2\alpha)},$$

откуда

$$R_A = P\,\mathrm{tg}\,\alpha, \quad R_B = P\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha},$$

где $\cos\alpha$ определяется по формуле (2).

Задача 1.8. При монтаже колонны MN для подъема груза C весом P на вершину колонны использованы два крана. Груз поднимается с помощью троса BCA, прикрепленного концом B к неподвижному левому крану (кран на рис. *а* не изображен), а концом A – к тележке правого крана. При движении тележки по горизонтали направо груз – полый



К задаче 1.8

цилиндр – скользит вдоль колонны MN вверх. Длина троса BCA равна L. Расстояние от неподвижного левого конца троса B до колонны MN равно $BN = l$.

Считая, что груз C находится в покое, определить натяжение троса и давление груза на колонну. Угол, образованный левой ветвью троса с колонной, равен α. Весом троса и трением груза о колонну пренебречь.

Решение. Для определения неизвестных рассмотрим равновесие груза C. К грузу приложена одна активная сила – его сила тяжести $\boldsymbol{P}$. На груз наложены связи: трос BCA и колонна MN. Реакция $\boldsymbol{R}$ гладкой колонны перпендикулярна ее оси (см. рис. *б*). Изобразим ее по горизонтали налево. Мысленно разрежем обе ветви троса вблизи точки C. Реакции $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{T}'$ направлены вдоль ветвей троса. По модулю эти натяжения равны $|\boldsymbol{T}| = |\boldsymbol{T}'| = T$.

Направим ось x по горизонтали направо, а ось y по вертикали вверх (рис. *б*). Обозначив угол $NCA = \varphi$, запишем уравнения проекций всех сил, приложенных к грузу C, на оси x и y:

$$\Sigma F_{kx} = T \sin\varphi - T \sin\alpha - R = 0, \tag{1}$$

$$\Sigma F_{ky} = T \cos\varphi + T \cos\alpha - P = 0. \tag{2}$$

Из уравнения (2) найдем

$$T = \frac{P}{\cos\varphi + \cos\alpha}. \tag{3}$$

Подставив значение (3) в уравнение (1), получим

$$R = \frac{P(\sin\varphi - \sin\alpha)}{\cos\varphi + \cos\alpha}. \tag{4}$$

Выразим неизвестные $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ через L, l и α. Обозначим $BC = a$, $AC = b$. По условию

$$a + b = L. \tag{5}$$

Из треугольника BCN находим

$$a = l/\sin\alpha, \quad CN = l \operatorname{ctg}\alpha. \tag{6}$$

Воспользовавшись треугольником ACN и выражениями (5) и (6), запишем

$$\cos\varphi = \frac{CN}{b} = \frac{l \operatorname{ctg}\alpha}{L - a} = \frac{l\cos\alpha}{L\sin\alpha - l}. \tag{7}$$

Теперь нетрудно вычислить $\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi}$. С помощью результата (7) после несложных преобразований находим

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{(L^2 + l^2)\sin^2\alpha - 2Ll\sin\alpha}}{L\sin\alpha - l}. \tag{8}$$

Подставив значения $\cos\varphi$ из (7) и $\sin\varphi$ из (8) в уравнения (3) и (4),

окончательно получим

$$T = 2P\frac{L\sin\alpha - l}{L\sin 2\alpha},$$

$$R = 2P\frac{\sqrt{(L^2 + l^2)\sin^2\alpha - 2Ll\sin\alpha} - (L\sin\alpha - l)\sin\alpha}{L\sin 2\alpha}.$$

По мере подъема груза C угол α увеличивается, стремясь к 90° (а следовательно, $\sin 2\alpha \to 0$). При этом модуль реакции троса также растет. Груз C невозможно поднять на уровень горизонтали AB, ибо при этом $\sin 2\alpha = \sin 180° = 0$, и модуль T неограниченно возрастает.

Искомые натяжение троса и давление груза C на колонну соответственно равны модулям сил T и R.

Решение этой задачи с помощью силового многоугольника значительно сложнее, ибо приходится решать замкнутый силовой четырехугольник, построенный на силах P, R, T и T'.

У к а з а н и е. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 2.27, 2.28, 2.30, 2.31, 2.32, 2.35.

3. Метод проекций. Ортогональная проекция силы на ось, подобно проекции любого вектора на ось, равна произведению модуля силы на косинус угла, образованного положительным направлением оси проекций и направлением проектируемой силы (рис. 1.19):

$$\text{пр}_x F = ab = F\cos(\widehat{x, F}).$$

Проекция силы на ось является алгебраической величиной. Если угол между положительным направлением оси проекций и вектором заключен

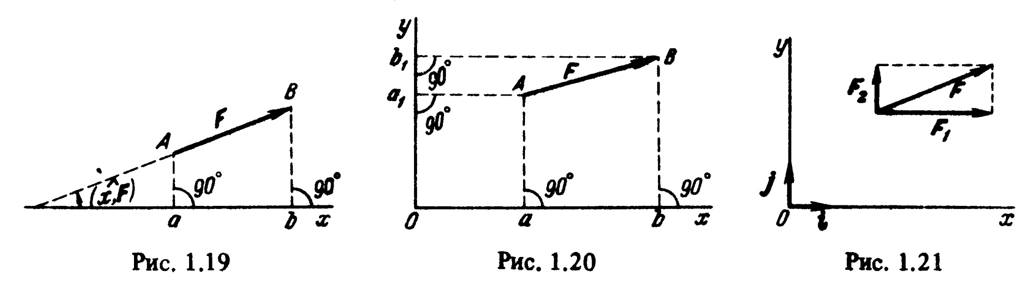


Рис. 1.19 Рис. 1.20 Рис. 1.21

в пределах от 0° до 90° либо от 270° до 360°, то проекция силы на ось положительна. Если же он лежит в пределах от 90° до 270°, то проекция силы на ось отрицательна. Если сила перпендикулярна к оси, то проекция силы на ось равна нулю. По этому способу определяются ортогональные проекции силы на координатные оси x и y (рис. 1.20)

$$\text{пр}_x F = ab = F\cos(\widehat{x, F}), \qquad \text{пр}_y F = a_1 b_1 = F\cos(\widehat{y, F}).$$

Впредь для краткости будем обозначать:

$$\text{пр}_x F = F_x, \qquad \text{пр}_y F = F_y$$

либо

$$\text{пр}_x F = X, \qquad \text{пр}_y F = Y.$$

Следовательно,

$$F_x = X = F\cos(\widehat{x, F}), \qquad F_y = Y = F\cos(\widehat{y, F}).$$

С помощью этих формул, зная модуль и направление силы, можно определить ее проекции на оси ортогональных декартовых координат.

В случае решения обратной задачи, т.е. при определении модуля и направления силы по заданным проекциям на оси декартовых координат, вычисление ведется по формулам:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad \text{(модуль силы)}, \tag{2*}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(\widehat{x, F}) &= \frac{F_x}{F} = \frac{X}{F}, \\ \cos(\widehat{y, F}) &= \frac{F_y}{F} = \frac{Y}{F} \end{aligned}\right\} \quad \text{(направляющие косинусы)}. \tag{3*}$$

Нельзя отождествлять понятия проекции силы и ее составляющей. На рис. 1.21 изображена сила F, разложенная на две составляющие силы F_1 и F_2, направленные параллельно соответствующим осям координат, т.е. $F = F_1 + F_2$. Составляющая силы является вектором, который можно представить в виде произведения проекции силы на орт (единичный вектор) соответствующей оси, т.е.

$$F_1 = F_x i = Xi, \qquad F_2 = F_y j = Yj.$$

Следовательно, разложение силы на составляющие можно записать в виде

$$F = F_x i + F_y j = Xi + Yj.$$

Орты осей координат всегда направлены в положительных направлениях соответствующих осей. Знак проекции силы определяет направление ее составляющей, т.е. если проекция силы положительна, то направление составляющей силы совпадает с положительным направлением соответствующей оси, если же проекция силы отрицательна, то направление составляющей силы противоположно положительному направлению соответствующей оси.

Переходим к определению равнодействующей плоской системы сходящихся сил методом проекций. Пусть даны силы $F_1, F_2, \ldots, F_n$. В плоскости действия сил построена система осей декартовых координат xy.

Разложения данных сил по ортам этих осей координат имеют вид

$$F_1 = F_{1x}i + F_{1y}j, \quad F_2 = F_{2x}i + F_{2y}j, \ldots, F_n = F_{nx}i + F_{ny}j.$$

Разложение равнодействующей плоской системы сходящихся сил по ортам этих осей координат дается формулой: $R = R_x i + R_y j$, где R_x и R_y – проекции равнодействующей на соответствующие оси.

Проекции равнодействующей на оси декартовых координат равны алгебраическим суммам проекций слагаемых сил на соответствующие оси

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx},$$
$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}. \qquad (4^*)$$

Определив по этим формулам проекции равнодействующей, можно вычислить ее модуль

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad (5^*)$$

и направляющие косинусы

$$\cos(x,\widehat{\ }R) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(y,\widehat{\ }R) = \frac{R_y}{R}. \qquad (6^*)$$

Уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил, приложенных к твердому телу. Для равновесия системы сходящихся сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил системы на оси декартовых координат равнялись нулю:

$$F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = 0, \quad F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = 0 \qquad (7^*)$$

или, в более краткой записи,

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0. \qquad (7'^*)$$

Задача называется *статически определенной,* если число неизвестных равно числу независимых уравнений равновесия. Если же число неизвестных больше числа независимых уравнений равновесия, то задача называется *статически неопределенной.* В последнем случае одними уравнениями статики задача не может быть решена. Для ее решения следует привлечь уравнения, даваемые другими дисциплинами, например сопротивлением материалов.

Задача на равновесие плоской системы сходящихся сил, приложенных к твердому телу, является статически определенной, если число алгебраических неизвестных не более двух. Так, если известны направления всех слагаемых сил и модули всех сил, кроме двух, то можно определить неизвест-

ные модули двух сил. Если одна из сил не известна ни по модулю, ни по направлению, то все остальные слагаемые силы должны быть заданы.

Преимущества аналитического метода проекций по сравнению с геометрическим методом силового многоугольника особенно заметны в задачах на равновесие твердого тела при наличии более трех сходящихся сил. Действительно, решение силового четырех-, пяти-и n-угольника представляет известные трудности, в то время как решение задачи методом

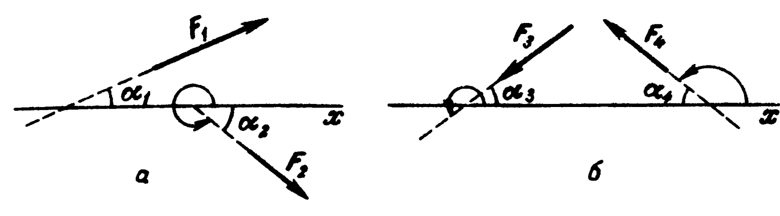


Рис. 1.22

проекций лишь незначительно усложняется при увеличении числа проектируемых сил.

У к а з а н и е. При решении методом проекций задач на равновесие плоской системы сходящихся сил, приложенных к твердому телу, надо выполнить четыре первых пункта, указанных в начале книги на с. 16. Затем:

5) убедиться в том, что данная задача является статически определенной, т.е. число алгебраических неизвестных не более двух;

6) выбрать в плоскости действия сил систему осей декартовых координат xy;

7) составить уравнения равновесия системы сил в проекциях на оси декартовых координат (7*);

8) решить систему составленных уравнений равновесия и определить искомые величины; если величина какой-либо из неизвестных сил окажется отрицательной, то это означает, что направление силы противоположно тому, которое было указано на рисунке.

Если по условию задачи требуется определить равнодействующую, то после выполнения первых четырех пунктов решения задачи надо вычислить проекции равнодействующей R_x и R_y по формулам (4*), затем определить модуль равнодействующей и ее направляющие косинусы по формулам (5*) и (6*).

При выборе осей декартовых координат целесообразно их направить так, чтобы они были параллельны либо перпендикулярны большинству слагаемых сил.

Например, проекции на ось x сил F_1 и F_2, изображенных на рис. 1.22, *а*, положительны, и можно сразу записать:

$$F_{1x} = F_1 \cos\alpha_1, \qquad F_{2x} = F_2 \cos\alpha_2,$$

вместо того чтобы производить вычисления

$$F_{2x} = F_2\cos(360^\circ - \alpha_2) = F_2\cos\alpha_2.$$

Проекции же сил F_3 и F_4, показанных на рис. 1.22, *б*, отрицательны, так как непосредственно ясно, что

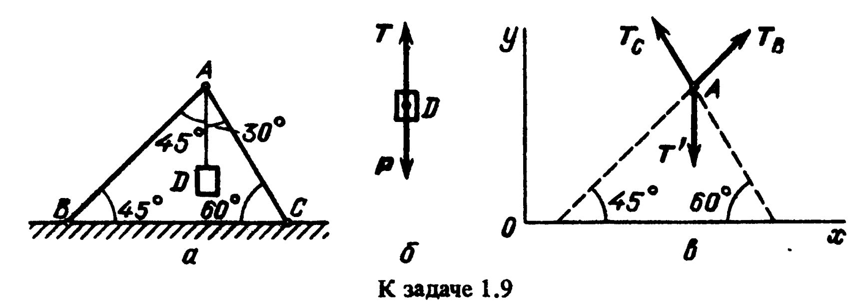
$$F_{3x} = -F_3\cos\alpha_3, \qquad F_{4x} = -F_4\cos\alpha_4.$$

Сложнее было бы вычислить проекции формально:

$$F_{3x} = F_3\cos(180^\circ + \alpha_3) = -F_3\cos\alpha_3,$$
$$F_{4x} = F_4\cos(180^\circ - \alpha_4) = -F_4\cos\alpha_4.$$

Задача 1.9. Два абсолютно жестких стержня AB и AC соединены шарниром в точке A и прикреплены к полу шарнирами B и C, образуя с полом соответственно углы 45° и 60° (рис. *а*). К валику шарнира A подвешен на нерастяжимой нити груз D, вес которого $P = 100$ Н. Определить усилия, возникающие в стержнях AB и AC. Весом стержней пренебречь.

Р е ш е н и е. Для определения усилий в стержнях AB и AC рассмотрим равновесие шарнира A. Однако непосредственно приступить к исследованию равновесия узла A невозможно, так как он находится в равновесии под действием трех неизвестных сил: реакций стержней AB и AC и реакции нити AD. Поэтому для определения реакции нити рассмотрим предварительно равновесие груза D. Груз D находится в равновесии под действием двух



К задаче 1.9

сил: силы тяжести P и реакции нити T (рис. *б*). Эти силы направлены в противоположные стороны. Учитывая условие равновесия груза, находим, что $T = P = 100$ Н.

Теперь, когда одна из трех сил, приложенных к шарниру A, известна по величине и направлению, а две другие – реакции стержней AB и AC – известны по направлению, T_C и T_B направлены по соответствующим стержням. На рис. *в* эти три силы изображены приложенными в шарнире A. Указать заранее, направлены ли эти силы вдоль стержней вверх или вниз, нельзя: это уточнится в последующем решении задачи.

Решим эту задачу методом проекций. Выберем оси координат x, y (рис. *в*), направив ось x по горизонтали направо, ось y – по вертикали вверх. Составим уравнения равновесия сил, приложенных к шарниру A, в проекциях на оси x и y:

$$\Sigma F_{kx} = T_B \cos 45^\circ - T_C \cos 60^\circ = 0, \quad (1)$$

$$\Sigma F_{ky} = T_B \cos 45^\circ + T_C \cos 30^\circ - T' = 0. \quad (2)$$

Решив эту систему уравнений, находим $T_C = 73{,}2$ Н, $T_B = 51{,}8$ Н. Применение для решения этой задачи аналитического метода проекций проще, чем использование геометрического метода – построения силового треугольника, который в данном случае является косоугольным.

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 2.11, 2.16, 2.22, 2.29.

4. Момент силы относительно точки. Равновесие твердого тела с одной неподвижной точкой. *Момент силы F относительно точки O, который записывается в виде $m_O(F)$*, для плоской системы сил равен по абсолютной величине произведению модуля силы F на расстояние h от точки O до линии действия силы F, называемое *плечом.*

Если сила F стремится повернуть тело вокруг точки O против хода часовой стрелки, то момент силы положителен, если же по ходу часовой стрелки, то отрицателен. Например (рис. 1.23), $m_O(F_1) = F_1 h_1$, $m_O(F_2) = -F_2 h_2$.

Размерность момента силы в системе СИ – Н · м.

Следует помнить, что плечо h является отрезком перпендикуляра, опущенного из точки на линию действия силы. Иногда ошибочно в качестве плеча изображают отрезок, соединяющий точку, относительно которой вычисляется момент, с точкой приложения силы.

Момент силы относительно точки равен нулю, если линия действия силы проходит через эту точку, так как при этом плечо равно нулю. Например: $m_O(F_3) = 0$ (рис. 1.23).

Теорема Вариньона для системы сходящихся сил (теорема о моменте равнодействующей): момент относительно точки равнодействующей R системы сходящихся сил $F_1, F_2, \ldots, F_n$, расположенных в одной плоскости, равен алгебраической сумме моментов сил системы относительно той же точки:

$$m_O(R) = m_O(F_1) + m_O(F_2) + \ldots + m_O(F_n) = \sum_{k=1}^{n} m_O(F_k). \quad (8^*)$$

Здесь

$$R = \sum_{k=1}^{n} F_k.$$

Удобство применения теоремы Вариньона заключается в том, что, минуя непосредственное определение равнодействующей, можно вычислить ее момент относительно точки, зная моменты всех сил системы относительной той же точки.

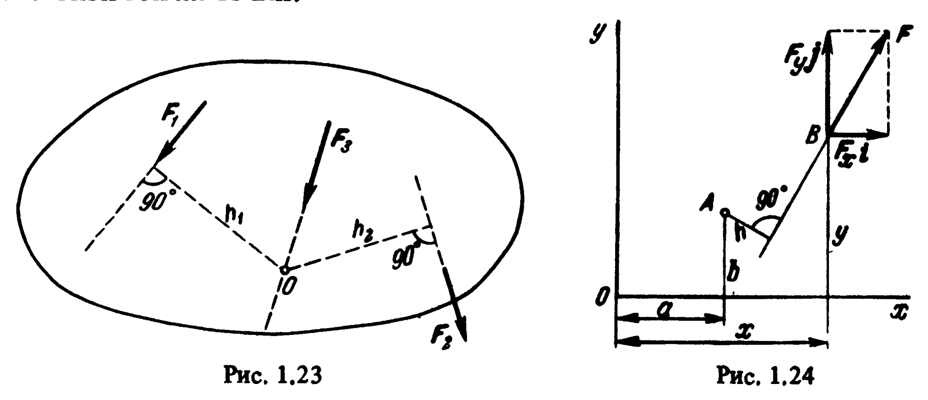


Рис. 1.23 Рис. 1.24

Выражение момента силы F относительно точки A через проекции силы на оси декартовых координат имеет вид

$$m_A(F) = (x-a)F_y - (y-b)F_x, \tag{9*}$$

где F_x и F_y – проекции силы F на оси декартовых координат, x и y – координаты точки B приложения силы F, a и b – координаты точки A (рис. 1.24).

Этой формулой рекомендуется пользоваться в тех случаях, когда определение величины плеча h связано с вычислительными трудностями.

В частности, если момент силы F определяется относительно начала координат O, т.е. $a = b = 0$, то формула принимает вид

$$m_O(F) = xF_y - yF_x, \tag{10*}$$

где F_x и F_y – проекции силы F на оси декартовых координат, x и y – координаты точки приложения силы F.

Перейдем к рассмотрению задач на равновесие твердого тела с одной неподвижной точкой. Если единственной связью, наложенной на твердое тело, находящееся в равновесии, является неподвижная точка (например, шарнир), то ее реакция должна уравновешиваться с равнодействующей всех активных сил. Следовательно, при равновесии твердого тела линия действия равнодействующей всех активных сил должна проходить через неподвижную точку. В противном случае происходит опрокидывание твердого тела.

Для определения условий, обеспечивающих равновесие твердого тела с одной неподвижной точкой, к которому приложена плоская система сходящихся сил, необходимо направить линию действия равнодействующей активных сил через точку пересечения линий действия активных сил и неподвижную точку.

Эти же задачи можно решать с помощью теоремы Вариньона, записанной относительно неподвижной точки. Так как при этом момент равнодействующей активных сил, проходящих через неподвижную точку, равен нулю, то сумма моментов всех активных сил относительно неподвижной точки также равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} m_O(F_k) = 0, \qquad (11^*)$$

где O – неподвижная точка.

Задача 1.10. В точке A с координатами $x = 5$ м, $y = 7$ м приложена сила F, составляющая угол $\alpha = 75°$ с положительным направлением оси абсцисс. Модуль силы равен 8 кН.

Вычислить момент силы F относительно начала координат.

Решение. Задачу можно решить тремя способами.

Способ 1. Продолжим линию действия силы F так, чтобы из начала координат O можно было опустить перпендикуляр на эту линию (рис. *а*). Проведем перпендикуляр и отметим точку B, в которой он пересечет линию действия силы F. Отрезок OB является плечом силы F относительно точки O. Вычислим длину плеча OB. Для этого отметим еще некоторые точки на рисунке, а именно: точку C – пересечение перпендикуляра, опущенного из A, с осью абсцисс, и точку D – пересечение линии действия силы F с осью абсцисс. Заметим, что угол ADC есть α, он равен 75°, а угол ODB также равен 75°.

Отрезок AC – это ордината точки A, длина его равна 7 м. Отрезок OC – абсцисса точки A, он равен 5 м. Из прямоугольного треугольника ACD вычисляем $DC = AC \cdot \mathrm{ctg}\,75° = 7\,\mathrm{ctg}\,75°$. Далее находим $OD = OC - DC = 5 - 7\,\mathrm{ctg}\,75°$. Плечо $OB = OD \sin 75° = (5 - 7\,\mathrm{ctg}\,75°)\sin 75° = 5\sin 75° - 7\cos 75° \approx 3{,}02$ м. Момент силы F относительно точки O равен $m_O(F) \approx 8$ кН $\cdot$ 3,02 м $\approx 24{,}14$ кН$\cdot$м.

Способ 2. Воспользуемся формулой (10*)

$$m_O(F) = xF_y - yF_x,$$

где x, y – координаты точки приложения силы, F_x, F_y – проекции силы на координатные оси.

Вычисляем значения проекций:

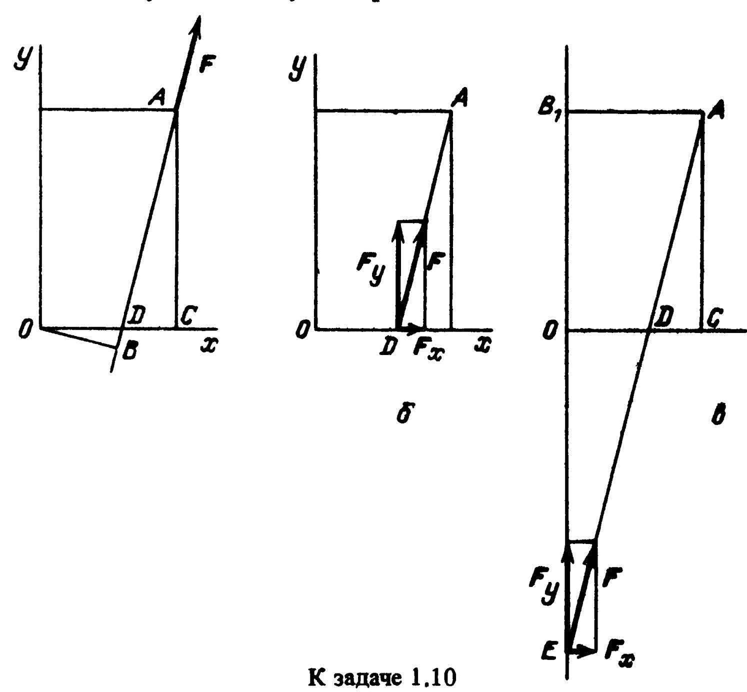
$$F_x = F\cos 75° = 8 \cdot 0{,}26 = 2{,}07 \text{ кН},$$

$$F_y = F\sin 75° = 8 \cdot 0{,}97 = 7{,}73 \text{ кН}.$$

Искомый момент равен

$$m_O(F) = 5 \cdot 7{,}73 - 7 \cdot 2{,}07 = 38{,}6 - 14{,}5 = 24{,}1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Способ 3 (рис. *б*). Применим сначала следствие третьего закона статики, в котором говорится, что силу можно переносить вдоль линии ее действия. Перенесем силу F в точку D пересечения линии действия силы с осью



К задаче 1.10

абсцисс. Расстояние OD уже было вычислено при нахождении момента силы способом 1:

$$OD = OC - DC = 5 - 7 \operatorname{ctg} 75^\circ.$$

Силу F, перенесенную в точку D, представим как совокупность ее составляющих по осям координат:

$$F_x = F \cos 75^\circ, \quad F_y = F \sin 75^\circ.$$

Линия действия составляющей F_x проходит через точку O и, следовательно, F_x не дает момента относительно точки O.

Остается записать момент составляющей F_y:

$$m_O(F) = m_O(F_y) = F_y \cdot OD = F \sin 75^\circ (5 - 7 \operatorname{ctg} 75^\circ) =$$
$$= F(5 \sin 75^\circ - 7 \cos 75^\circ) = 24{,}1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Способ 3 можно было применить, перенеся силу F в точку пересечения линии ее действия с осью ординат (см. рис. *в*).

Из прямоугольного треугольника AB_1E, где угол при вершине A равен 75°, получаем

$$B_1E = AB_1 \operatorname{tg} 75°.$$

Расстояние

$$OE = B_1E - OB_1 = B_1E - AC = AB_1 \operatorname{tg} 75° - AC = 5 \operatorname{tg} 75° - 7.$$

Силу F, перенесенную в точку E, представим как совокупность двух ее составляющих по координатным осям:

$$F_x = F \cos 75°, \quad F_y = F \sin 75°.$$

Линия действия составляющей F_y проходит через точку O, значит, F_y не дает момента относительно точки O. Записываем момент одной составляющей F_x, он и дает нам искомый момент силы F:

$$m_O(F) = m_O(F_x) = F_x \cdot OE = F \cos 75°(5 \operatorname{tg} 75° - 7) =$$

$$= 8(5 \sin 75° - 7 \cos 75°) = 24{,}1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Задача 1.11. Стержень OA длиной l и весом P (рис. *а*) закреплен шарнирно в точке O и опирается концом A на гладкую поверхность сферы. Угол, образованный стержнем с вертикалью, равен 30°. Определить давление стержня на сферу, если угол O_1AO – прямой. Найти реакцию шарнира O.

Р е ш е н и е. Рассмотрим стержень OA, отбросив связи – шарнир O и сферу, заменив их действия реакциями (рис. *б*). Реакция гладкой сферы N_A направлена по радиусу O_1A, перпендикулярно стержню l. Сила тяжести P приложена посредине стержня и действует по вертикали. Направление реакции шарнира O неизвестно. Однако это направление может быть определено. Действительно, стержень находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости. Согласно теореме о трех непараллельных силах линии действия всех трех сил должны пересекаться в одной точке. Находим пересечение линий действий сил P и N_A (рис. *б*) в точке O_2.

Реакция шарнира O должна проходить через точку O_2 и, следовательно, будет направлена по прямой OO_2 (рис. *б*).

Для определения давления стержня на сферу достаточно составить одно уравнение равновесия, приравняв нулю сумму моментов всех сил

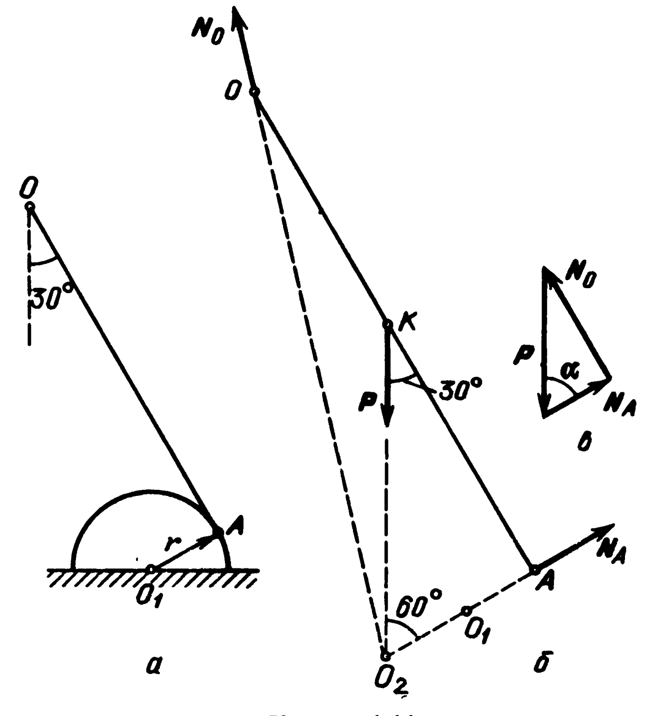
относительно шарнира O:

$$\sum_{i=1}^{n} m_O(F_i) = N_A l - P\,\frac{l}{2}\,\sin 30^\circ = 0. \qquad (1)$$

Из (1) находим

$$N_A = P/4. \qquad (2)$$

Найдем величину реакции шарнира O. Теперь это сделать несложно. Строим силовой треугольник (рис. *в*), откладывая последовательно две



К задаче 1.11

силы P и N_A, известные по величине и направлению. В силовом треугольнике угол α между сторонами P и N_A равен 60°. Это следует из рассмотрения прямоугольного треугольника AKO_2 (рис. *б*).

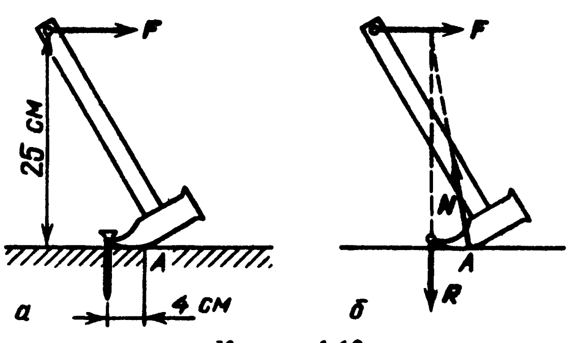
Из силового треугольника (рис. *в*) находим по теореме косинусов, учитывая (2),

$$N_O = \sqrt{P^2 + N_A^2 - 2PN_A \cos 60^\circ} = P\sqrt{13}/4. \qquad (3)$$

Задача 1.12. Молоток используют, чтобы выдернуть гвоздь из горизонтальной доски (рис. *а*). К ручке молотка прикладывают горизонтальную силу F, равную 20 Н. Расстояние от точки приложения силы до доски

равно 25 см. Пренебрегая весом молотка, найти, какая сила действует при этом на гвоздь, если молоток опирается на доску в точке A на расстоянии 4 см от гвоздя.

Решение. Рассмотрим равновесие молотка (рис. *б*). На молоток действуют силы: горизонтальная сила F, усилие R – передаваемое на молоток гвоздем, реакция пола N, приложенная в точке A. В данной задаче молоток работает как рычаг. В самом деле, когда гвоздь будет выдернут



К задаче 1.12

из доски, молоток повернется вокруг оси, проходящей через точку A перпендикулярно рисунку.

К молотку приложены активная сила: сила F и неизвестная сила – реакция, действующая со стороны гвоздя. Назовем ее R. Направлена она вдоль гвоздя вниз. Точка приложения этой силы – в месте захвата шляпки гвоздя зубцами молотка. Линия действия силы R проходит на расстоянии 4 см от точки A. Второй связью для молотка служит плоскость опоры – горизонтальной доски. Соответствующая реакция N приложена в точке A. Направление этой реакции можно определить по теореме о трех силах (рис. *б*), но ее модуль находить в данной задаче не требуется. При выборе точки A (оси рычага) в качестве центра моментов реакция опоры A не входит в уравнение независимо от того, как эта реакция направлена.

Составляем уравнение моментов относительно точки A или уравнение равновесия рычага:

$$F \cdot 4 - F \cdot 25 = 0,$$

откуда получаем $R = \dfrac{F \cdot 25}{4} = \dfrac{20 \cdot 25}{4} = 125$ Н.

Остается лишь учесть, что сила, с которой молоток действует на гвоздь, равна силе, с которой гвоздь действует на молоток, но направлена про-

тивоположно. Таким образом, на гвоздь действует сила, стремящаяся выдернуть его из доски, равная по модулю 125 Н.

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 2.53, 2.54, 2.55.

§ 2. ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ. СЛУЧАЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

1. Равновесие произвольной плоской системы сил, приложенных к твердому телу. Напомним сначала, что равнодействующая двух параллельных сил, направленных в одну сторону, равна по модулю сумме модулей данных сил и направлена в ту же сторону. Линия действия равнодействующей делит внутренним образом расстояние между линиями действия данных сил на части, обратно пропорциональные этим силам. Таким образом (рис. 1.25),

$$R = F_1 + F_2; \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}.$$

Равнодействующая двух параллельных сил, не равных по модулю (пусть $|F_2| > |F_1|$) и направленных в разные стороны, равна по модулю разности модулей этих сил и направлена в сторону большей силы. Линия действия равнодействующей делит внешним образом расстояние между

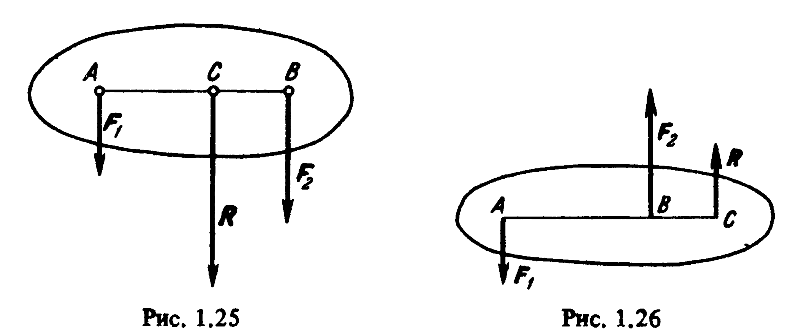


Рис. 1.25 Рис. 1.26

линиями действия данных сил на части, обратно пропорциональные этим силам. Таким образом (рис. 1.26),

$$R = F_2 - F_1; \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}.$$

Система двух параллельных сил, равных по модулю и направленных в разные стороны, называется *парой сил* (рис. 1.27). Расстояние между линиями действия этих сил называется *плечом* пары. Так как две силы, равные по модулю и направленные в разные стороны, не лежат на одной

линии действия, то твердое тело, к которому приложена пара сил, не находится в равновесии. Пара сил стремится повернуть твердое тело, к которому она приложена.

Мерой действия пары сил является алгебраическая величина, называемая ее *моментом.* Момент пары сил равен по абсолютной величине произведению модуля одной из сил пары на плечо. Если пара сил стремится

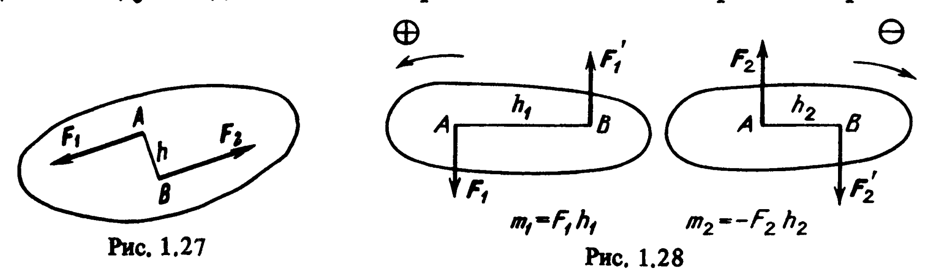


Рис. 1.27

Рис. 1.28

повернуть тело против хода часовой стрелки, то момент пары положителен, если по ходу часовой стрелки, то отрицателен. Примеры даны на рис. 1.28.

Теория пар сил на плоскости сводится к четырем теоремам.

Т е о р е м а 1. Алгебраическая сумма моментов сил, составляющих пару, относительно произвольной точки плоскости не зависит от выбора этой точки и равна моменту пары.

Т е о р е м а 2. Не нарушая состояния твердого тела, пару сил можно перемещать в плоскости ее действия.

Т е о р е м а 3. Пары сил, моменты которых равны, эквивалентны. (Пары сил называются *эквивалентными,* если одну из пар можно заменить другой, не нарушая состояния твердого тела.)

Это значит, что, не нарушая состояния твердого тела, можно изменять плечо и силу, сохраняя при этом неизменным момент пары сил (рис. 1.29).

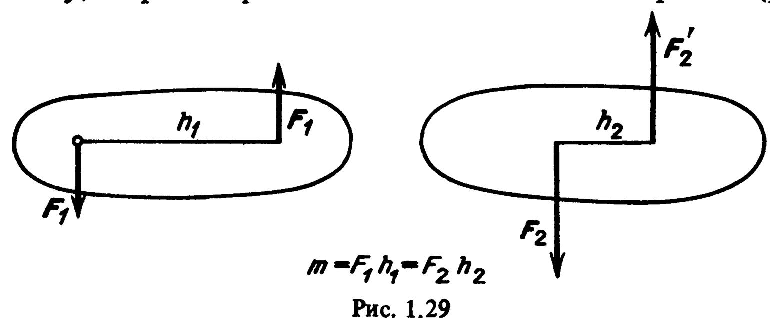


Рис. 1.29

Т е о р е м а 4. Система нескольких пар сил на плоскости эквивалентна одной паре, момент которой m равен алгебраической сумме моментов данных пар:

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n = \sum_{k=1}^{n} m_k = \sum_{k=1}^{n} \pm F_k h_k.$$

На рис. 1.30, *а* показаны три пары сил с моментами $m_1 = F_1 h_1$, $m_2 = -F_2 h_2$, $m_3 = F_3 h_3$, а на рис. 1.30, *б* представлена их равнодействующая пара с моментом $m = F_1 h_1 - F_2 h_2 + F_3 h_3 = Fh$.

Для равновесия системы пар сил, лежащих в одной плоскости и приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов данных пар равнялась нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k = 0, \text{ т.е. } \sum_{k=1}^{n} \pm F_k h_k = 0.$$

Приведение силы к данной точке. При приведении силы к данной точке добавляется присоединенная пара сил, момент которой равен моменту данной силы относительно центра приведения. Это значит, что, не нарушая состояния твердого тела, можно силу F приложить в точке B

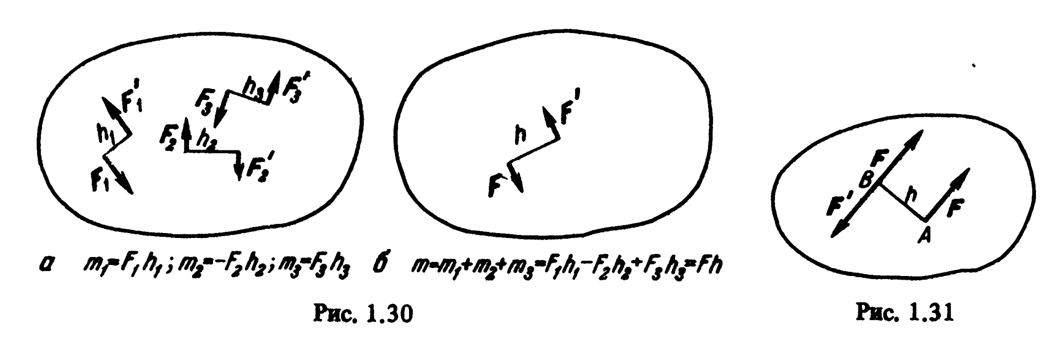


Рис. 1.30

Рис. 1.31

(рис. 1.31), добавив присоединенную пару сил, момент которой равен моменту заданной силы F относительно центра приведения B.

Приведением силы к данной точке широко пользуются при преобразовании произвольной плоской системы сил к простейшему виду.

Главным вектором V называется векторная сумма сил, приложенных к твердому телу, т.е.

$$V = \sum_{k=1}^{n} F_k.$$

Проекции главного вектора V_x и V_y на оси декартовых координат равны алгебраическим суммам проекций данных сил на соответствующие оси:

$$V_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \quad V_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}.$$

Модуль главного вектора

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}.$$

Направляющие косинусы главного вектора определяются по формулам:

$$\cos(\widehat{x, V}) = \frac{V_x}{V}, \quad \cos(\widehat{y, V}) = \frac{V_y}{V}.$$

Главным моментом m_O относительно центра O называется алгебраическая сумма моментов сил, приложенных к твердому телу, относительно этого центра, т.е.

$$m_O = \sum_{k=1}^{n} m_O(F_k).$$

В соответствии с определением главный вектор V является статическим инвариантом, т.е. модуль и направление главного вектора не зависят от выбора положения центра приведения системы. Главный момент системы при перемене центра, вообще говоря, меняется.

Приведение к одному центру сил, произвольно расположенных на плоскости. В результате приведения сил, произвольно расположенных на плоскости, к одному центру O система сил преобразуется к приложенной в этом центре силе, равной главному вектору V, и паре сил, момент которой равен главному моменту m_O.

Не следует отождествлять силу V с равнодействующей R, так как равнодействующая – это одна сила, которая эквивалентна данной системе сил, а сила V эквивалентна данной системе сил только в совокупности с парой сил, момент которой равен главному моменту m_O.

Частные случаи приведения сил, произвольно расположенных на плоскости. а. Главный вектор равен нулю, но главный момент не равен нулю, т.е. $V = 0$, $m_O \neq 0$. Система сил приводится к паре сил, момент которой равен главному моменту m_O (в этом случае главный момент системы сил не зависит от выбора центра приведения).

б. Главный вектор не равен нулю, но главный момент равен нулю, т.е. $V \neq 0$, $m_O = 0$. Система сил приводится к равнодействующей $R = V$, приложенной в центре приведения системы.

в. Главный вектор и главный момент системы не равны нулю, т.е. $V \neq 0$, $m_O \neq 0$. Система сил приводится к равнодействующей $R = V$, линия действия которой отстоит от линии действия силы V на расстояние $h = m_O / V$. Положение линии действия равнодействующей R должно быть таким, чтобы знак момента равнодействующей R относительно центра приведения O совпадал со знаком главного момента системы сил m_O относительно центра O.

Сила V и равнодействующая R равны по модулю и параллельны (рис. 1.32).

Теорема Вариньона для произвольной плоской системы сил. Если система сил приводится к равнодействующей, то момент равнодействую-

щей относительно произвольной точки равен сумме моментов данных сил относительно той же точки (теорема Вариньона):

$$m_O(R) = \sum_{k=1}^{n} m_O(F_k).$$

г. Главный вектор V и главный момент m_O системы равны нулю: $V = 0$, $m_0 = 0$. Система сил, приложенных к твердому телу, является уравновешивающейся.

Уравнения равновесия произвольной плоской системы сил, приложенных к твердому телу. Для равновесия произвольной плоской системы сил,

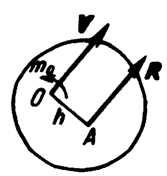


Рис. 1.32

приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на произвольно выбранные оси декартовых координат x и y и сумма моментов этих сил относительно произвольно выбранной точки O равнялись нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_O(F_k) = 0. \qquad (1^*)$$

В случае произвольной плоской системы сил задача является статически неопределенной, если число алгебраических неизвестных не более трех.

Можно ограничиться составлением одного уравнения проекций, например на ось x, но при этом составить два уравнения моментов относительно двух точек:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_A(F_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_B(F_k) = 0. \qquad (2^*)$$

При этом следует иметь в виду, что ось, относительно которой составляется уравнение проекций, не должна быть расположена перпендикулярно прямой, проходящей через две точки, относительно которых составляются уравнения моментов.

Если это условие не будет выполнено, то система уравнений (2*) не обеспечит равновесие сил. Действительно, система сил, приводящаяся к равнодействующей, линия действия которой проходит через точки A и B, удовлетворяет всем трем уравнениям (2*), если ось x перпендикулярна

прямой AB. Но такая система эквивалентна равнодействующей и не находится в равновесии.

Можно, минуя составление уравнений проекций сил, составить три уравнения моментов относительно трех выбранных точек:

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(F_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_B(F_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_C(F_k) = 0. \qquad (3^*)$$

При этом следует иметь в виду, что эти три точки не должны лежать на одной прямой. Действительно, если точки A, B, C лежат на одной прямой, то плоская система сил может приводиться к равнодействующей, линия действия которой будет проходить через эти три точки. Все три уравнения будут удовлетворяться, а система сил не будет находиться в равновесии.

Уравнения равновесия плоской системы параллельных сил, приложенных к твердому телу, имеют вид

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_O(F_k) = 0, \qquad (4^*)$$

причем ось x не перпендикулярна данным силам. Задача является статически определенной, если число алгебраических неизвестных не более двух.

Можно обойтись без уравнений проекций и составить два уравнения моментов относительно двух произвольно выбранных точек:

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(F_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_B(F_k) = 0. \qquad (5^*)$$

Следует иметь в виду, что эти две точки не должны лежать на прямой, параллельной данным силам, так как в противном случае одно из уравнений равновесия окажется следствием другого.

Указание. При решении задач на равновесие твердого тела, к которому приложена плоская система параллельных сил, надо выполнить четыре первых пункта, указанных в начале книги на с. 16. Затем:

5) проверить, что задача является статически определенной, т.е. число алгебраических неизвестных величин не более двух;

6) выбрать систему осей декартовых координат;

7) составить уравнения равновесия системы параллельных сил;

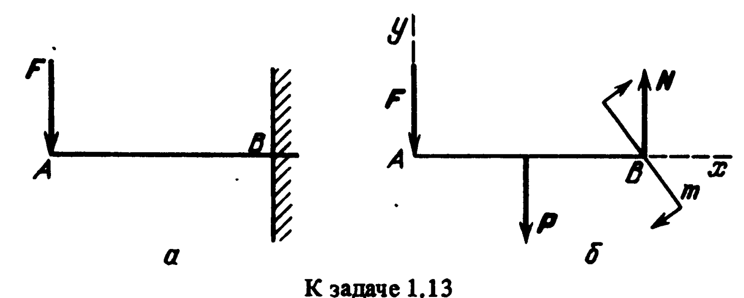
8) решив уравнения равновесия, определить неизвестные величины. Если величина какой-либо неизвестной силы окажется отрицательной, то это означает, что направление этой силы противоположно тому, которое было изображено на рисунке.

Оси декартовых координат целесообразно направлять так, чтобы одна из них оказалась параллельной всем силам, приложенным к твердому телу. Уравнение моментов рекомендуется составлять относительно точки, лежа-

щей на линии действия неизвестной силы. Это дает возможность определить одну из неизвестных величин непосредственно из уравнения моментов.

При решении задачи с помощью двух уравнений моментов шестой пункт решения задачи отпадает. При этом не следует забывать, что точки, относительно которых составляются уравнения моментов, не должны лежать на прямой, параллельной силам.

Задача 1.13. Балка AB весом P и длиной l заделана правым концом в стену. В точке A на балку действует вертикальная сила F (рис. *а*). Определить реакцию стены.



К задаче 1.13

Решение. Отбросим связь – стену и заменим ее действие реакцией (рис. *б*). Горизонтальная составляющая реакции стены равна в данном случае нулю, так как все активные силы, действующие на балку, вертикальны. Реакция стены состоит из вертикальной составляющей N и пары сил с моментом m. Эта пара сил препятствует повороту балки против хода часовой стрелки. Такой поворот балка стремится осуществить под действием сил F и P.

Переходим к составлению уравнений равновесия. Выбираем оси координат: ось x направляем по балке AB, ось y – по вертикали из точки A. Приравниваем нулю сумму проекций всех сил на ось y:

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = -F - P + N = 0. \qquad (1)$$

Приравниваем нулю сумму моментов всех сил относительно точки B:

$$\sum_{k=1}^{n} m_B(F_k) = F \cdot l + P \cdot \frac{l}{2} - m = 0. \qquad (2)$$

Из первого уравнения находим

$$N = F + P. \qquad (3)$$

Из второго уравнения определяем момент пары сил

$$m = F \cdot l + P \cdot \frac{l}{2}. \qquad (4)$$

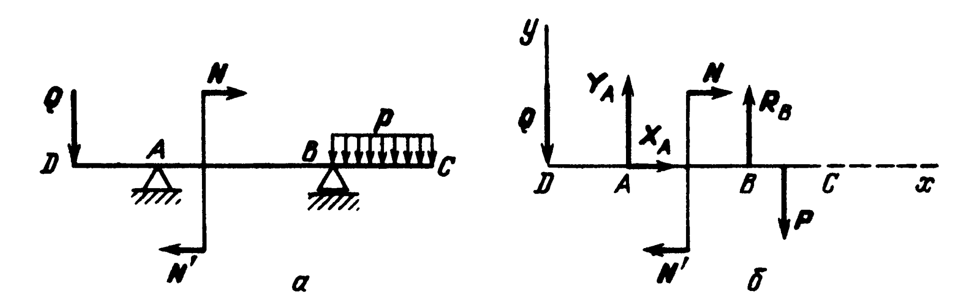
Уравнения равновесия параллельных сил выбраны так, что в каждое из уравнений входит только одна неизвестная. Это упрощает решение.

Задача 1.14. Двухконсольная горизонтальная балка шарнирно закреплена в точке A и опирается на катки в точке B (рис. *а*). На балку действует вертикальная сила $Q = 20$ Н, приложенная в точке D, равномерно распределенная вертикальная нагрузка на участке BC интенсивностью $p = 25$ Н/м и пара сил (N, N'), момент которой равен $m = 40$ Н · м.

Расстояния: $AD = 3$ м, $AB = 4$ м, $BC = 3$ м. Определить реакции в шарнирах A и B, пренебрегая весом балки.

Решение. Отбросим мысленно связи, которыми в данной задаче являются опоры A и B, и заменим их реакциями (рис. *б*). Реакция в точке B направлена по вертикали и обозначена R_B. Она направлена по вертикали, так как опора B опирается на катки и не препятствует перемещению по горизонтали. Реакция шарнира A может иметь любое направление в плоскости. Поэтому заменяем ее двумя составляющими X_A и Y_A. Распределенную нагрузку p заменяем силой $P = p \cdot BC = 25 \cdot 3 = 75$ Н. Сила P приложена посредине отрезка BC.

Выбираем оси координат: ось x направляем из точки D вдоль балки, ось y – из точки D перпендикулярно балке вверх.



К задаче 1.14

Так как проекция силы X_A является единственной силой, проектирующейся на ось x, то при равновесии сил, приложенных к балке, она равна нулю:

$$X_A = 0. \qquad (1)$$

Заметим, что сумма проекций сил (N, N'), образующих пару сил, на любую ось равна нулю, так как силы, образующие пару сил, равны по модулю, параллельны и направлены в противоположные стороны. Переходим к составлению уравнений равновесия для системы параллельных сил, приложенных к балке. Сумма проекций всех сил на ось y равна нулю:

$$Y_A + R_B - Q - P = 0. \qquad (2)$$

Сумма моментов всех сил относительно точки A (удобно выбирать точку, к которой приложена одна из неизвестных сил, тогда получим уравнение с одним неизвестным) также равна нулю:

$$Q \cdot AD - m + R_B \cdot AB - P\left(AB + \frac{BC}{2}\right) = 0. \qquad (3)$$

Решая систему уравнений (2) и (3), находим из (3)

$$R_B = \frac{m + P(AB + BC/2) - Q \cdot AD}{AB} = \frac{40 + 75(4 + 1{,}5) - 20 \cdot 3}{4} = 98{,}1 \text{ Н}. \qquad (4)$$

Далее, из уравнения (2) находим

$$Y_A = Q + P - R_B = 20 + 75 - 98{,}1 = -3{,}1 \text{ Н}. \qquad (5)$$

Знак минус показывает, что реакция направлена вниз. Вместо уравнения (2) можно было составить сумму моментов всех сил относительно точки B, где приложена неизвестная сила $\boldsymbol{R}_B$:

$$Q \cdot BD - Y_A \cdot AB - m - P \cdot \frac{BC}{2} = 0. \qquad (6)$$

Значение неизвестного Y_A, найденное из этого уравнения, совпадает с (5).

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 3.4, 3.13, 3.15, 3.18, 3.19, 3.21, 3.28, 3.30.

Переходим к решению задач на равновесие твердого тела, к которому приложена произвольная плоская система сил. При решении этих задач надо выполнить четыре первых пункта, указанных в начале книги на с. 16. Затем:

5) проверить, является ли задача статически определенной, т.е. что число неизвестных величин не более трех;

6) выбрать направления осей декартовых координат и точку (или точки), относительно которой предполагается составить уравнение моментов;

7) составить уравнения равновесия системы сил, приложенных к твердому телу;

8) решить систему полученных уравнений равновесия и определить неизвестные величины.

Уравнения равновесия можно составить в любом возможном виде (см. выше, с. 49, формулы (1*), (2*), (3*)).

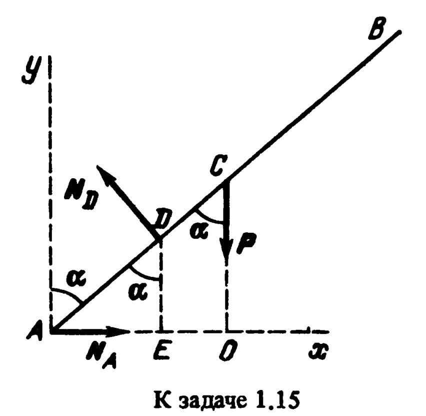
Следует стремиться к получению таких уравнений равновесия, в каждое из которых входила бы только одна неизвестная величина. В этом случае можно каждую из неизвестных величин непосредственно опреде-

лить из соответствующего уравнения. Для этого оси координат целесообразно направить так, чтобы некоторые неизвестные силы оказались перпендикулярными к этим осям. Тогда модули этих неизвестных сил в соответствующее уравнение проекций не войдут.

Центр моментов, т.е. точку, относительно которой должно быть составлено уравнение моментов, целесообразно выбрать в точке пересечения линий действия двух неизвестных сил. Это дает возможность непосредственно определить из соответствующего уравнения моментов модуль третьей неизвестной силы. Если, однако, этот центр моментов расположен так, что вычисление плеч при определении моментов сил представляет значительные трудности, то лучше составить относительно другого центра такое уравнение моментов, в которое войдут модули двух неизвестных сил, и затем совместно решить полученную систему уравнений.

Если направление какой-либо реакции связи неизвестно, то следует заменить ее двумя составляющими, направив их параллельно осям координат в сторону положительного отсчета. Если в результате решения знак величины какой-либо силы окажется отрицательным, то это означает, что направление силы противоположно тому, которое было предварительно указано на рисунке.

В тех случаях, когда по условию задачи требуется определить давления твердого тела на опоры, нужно найти равные по модулю этим давлениям соответствующие реакции связей, а затем направить искомые давления противоположно этим реакциям.



К задаче 1.15

Задача 1.15. В условиях задачи 1.5 определить методом проекций, какой угол с вертикалью составляет балка AB при равновесии, и найти значения реакций.

Р е ш е н и е. Рассмотрим равновесие балки, изображенной на рис. *а* к задаче 1.5. К балке приложена одна активная сила, ее сила тяжести P. Применим принцип освобождаемости и мысленно освободим балку от ее опор в точках A и D. Отброшенные опоры заменяем соответствующими реакциями. Гладкая стена препятствует перемещению точки A балки только в одном направлении — горизонтально влево. Поэтому реакцию N_A направляем по горизонтали вправо. Край более низкой стены препятствует перемещению балки перпендикулярно ее направлению. Реакцию в точке D поэтому направляем из точки опоры перпендикулярно балке. Поскольку связь носит односторонний характер, реакцию направляем по перпендикуляру к балке вверх. На расчетной схеме (см. рис.) изображены все силы, приложенные к балке.

Будем рассматривать эту систему как произвольную плоскую систему сил. Для такой системы можно составить три уравнения. В задаче три неизвестных величины: две реакции N_A и N_D и угол α, который балка составляет с вертикалью. Число неизвестных совпадает с числом уравнений, следовательно, задача статически определима. Составим уравнения равновесия.

Направим ось x из точки A горизонтально вправо, ось y – по стене вверх. За центр моментов примем точку A. Уравнения равновесия запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\Sigma F_{kx} = N_A - N_D \cos\alpha = 0, \\ &\Sigma F_{ky} = N_D \sin\alpha - P = 0, \\ &\Sigma m_A(F_k) = N_D \cdot AD - P \cdot AO = 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Дополним расчетную схему линией DE, проведенной вниз по более низкой стене до пересечения с осью x. Отрезок AE равен расстоянию a между стенами. Из прямоугольного треугольника AED выразим

$$AD = \frac{AE}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Длину плеча AO найдем из прямоугольного треугольника ACO, в котором известна гипотенуза $AC = AB/2 = l$,

$$AO = AC\sin\alpha = l\sin\alpha.$$

Подставим значения AD и AO в уравнение моментов:

$$N_D \frac{a}{\sin\alpha} - Pl\sin\alpha = 0.$$

Выразим из уравнения моментов

$$N_D = \frac{Pl\sin^2\alpha}{a}$$

и подставим во второе уравнение системы (1):

$$\frac{Pl\sin^3\alpha}{a} - P = 0.$$

После сокращения на P получаем $\sin^3\alpha = a/l$, откуда

$$\sin\alpha = \sqrt[3]{a/l}. \qquad (2)$$

Таким образом, угол α определился через заданные в условии размеры a и l, причем ответ (2) совпал с полученным в задаче 1.5.

Снова обратимся ко второму уравнению системы (1) и найдем из него

$$N_D = \frac{P}{\sin\alpha}.$$

Подставляя $\sin\alpha = \sqrt[3]{a/l}$, получаем значение реакции

$$N_D = P\sqrt[3]{l/a}. \qquad (3)$$

Из первого уравнения системы (1) находим последнюю неизвестную величину N_A:

$$N_A = N_D \cos\alpha = N_D\sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

Подставляя в N_A значения N_D и $\sin\alpha$, получаем после небольших преобразований

$$N_A = P\sqrt{(\sqrt[3]{l/a})^2 - 1}.$$

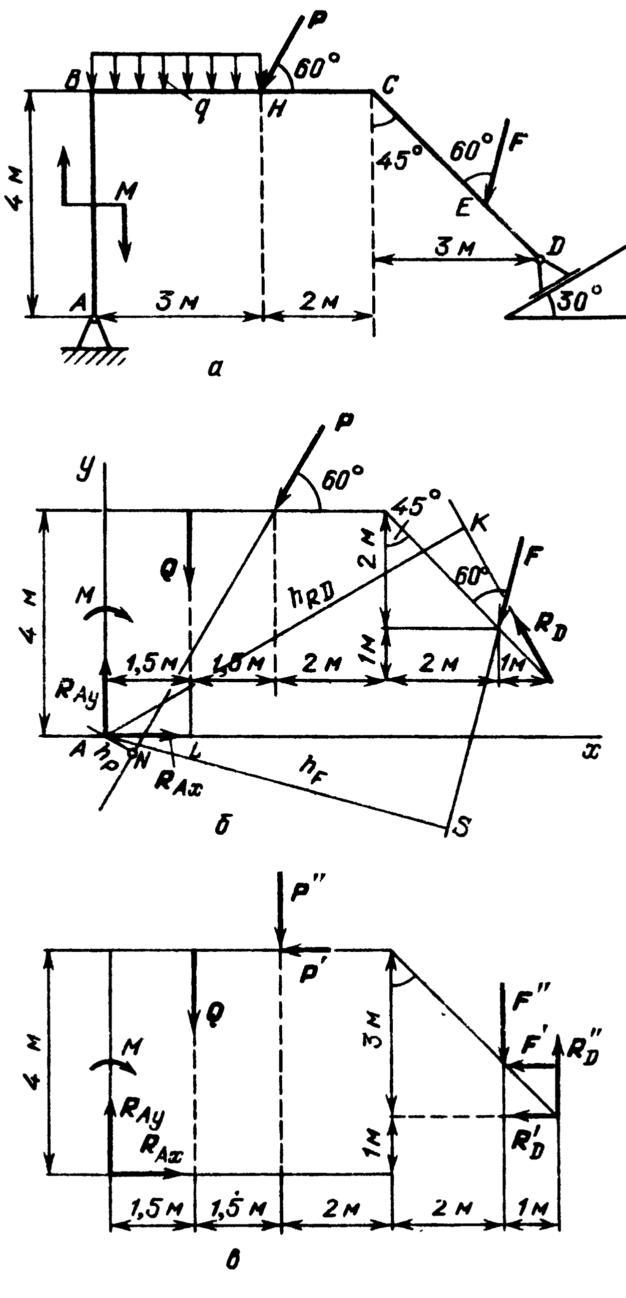
Задача 1.16. Жесткая рама *ABCD*, размеры которой указаны на рисунке, закреплена шарнирно в неподвижной точке *A*, а правым концом *D* опирается катками на гладкую наклонную плоскость. Верхняя горизонтальная часть рамы *BC* на участке *BH* нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q = 2$ кН/м. В точке *H* приложена сила $P = 6$ кН под уголом $60°$ к горизонту. На наклонном участке рамы *CD* в точке *E* приложена сила $F = 8$ кН, составляющая угол в $60°$ с *CD*. Расстояние *DE* равно одной трети длины *CD*. К вертикальной части рамы *AB* приложена пара сил с моментом, равным $M = 4$ кН · м (рис. *а*).

Определить реакции в опорах *A* и *D*, пренебрегая собственным весом рамы.

Р е ш е н и е. Для определения опорных реакций рассмотрим равновесие рамы *ABCD*. К раме приложены следующие активные силы: P, F и равномерно распределенная по участку *BH* нагрузка интенсивностью q. Заменим равномерно распределенную нагрузку сосредоточенной силой, равной $Q = q \cdot BH = 6$ кН и приложенной в средней точке участка *BH*.

К раме приложен также активный момент M, направленный по ходу часовой стрелки.

На раму наложены две связи – шарнирная опора в точке *A* и опора на катке в точке *D*. Отбрасывая мысленно опору *A*, заменим ее реакцией R_A, модуль и направление которой заранее неизвестны. Поэтому вместо реакции R_A возьмем две ее составляющие R_{Ax} и R_{Ay} по координатным осям. Удобно направить ось x из точки *A* горизонтально вправо, а ось y – вертикально вверх. Опора на катке в точке *D* не препятствует перемещению точки *D* вдоль наклонной плоскости. Следовательно, реакцию R_D следует направить перпендикулярно наклонной плоскости. По характеру опоры направляем R_D вверх по нормали к наклонной плоскости. Расчетная схема показана на рис. *б*.



P
60°
B
q
H
C
4 м
M
45°
60°
F
E
3 м
D
A
3 м
2 м
30°
а
P
y
60°
45°
K
Q
2 м
F
M
h_RD
60°
4 м
R_D
1м
1,5 м
1,5 м
2 м
2 м
1м
R_Ay
A
h_P
N
L
h_F
x
R_Ax
б
S
P''
P'
Q
3 м
F''
4 м
M
F'
R_D''
R_Ay
1м
R_Ax
R_D'
1,5 м
1,5 м
2 м
2 м
1 м
в

К задаче 1.16

В задаче три неизвестных величины: R_{Ax}, R_{Ay}, R_D. Поскольку для произвольной плоской системы сил можно составить три независимых уравнения, задача является статически определенной.

Несмотря на то, что в задаче всего одна горизонтальная сила и две вертикальных, удобно составить уравнение проекций на выбранные оси, потому что углы, составляемые силами с осями x и y, либо заданы, либо легко определяются. Реакция R_D наклонена к вертикали под углом 30°. Сила F составляет с осью x угол $-105°$. Напомним, что $\cos(-105°) = \cos(105°) = -\cos 75°$; $\sin(-105°) = -\sin 105° = -\sin 75°$. Запишем уравнение проекций на оси x и y и уравнение моментов относительно точки A:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = R_{Ax} - P\cos 60° - F\cos 75° - R_D \cos 60° = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = R_{Ay} - Q - P\sin 60° - F\sin 75° + R_D \cos 30° = 0, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(F_k) = -M - Q\cdot AL - P\cdot AN - F\cdot AS + R_D\cdot AK = 0. \tag{3}$$

Плечи всех сил, кроме плеча AL силы Q, которое равно 1,5 м, требуют довольно длинных вычислений. Поэтому при составлении уравнения моментов воспользуемся теоремой Вариньона. Каждую из сил P, F и R_D представим как сумму ее горизонтальной и вертикальной составляющих. Эти силы, обозначенные одним (горизонтальная составляющая) и двумя (вертикальная составляющая) штрихами, показаны на рис. *в*.

Хорошо видны плечи каждой из этих составляющих относительно точки A. И хотя слагаемых в уравнении моментов теперь будет больше, вычислить их будет значительно проще. Числовые значения составляющих:

$$P' = P\cos 60°, \qquad F' = F\cos 75°, \qquad R'_D = R_D \cos 60°,$$

$$P'' = P\sin 60°, \qquad F'' = F\sin 75°, \qquad R''_D = R_D \cos 30°.$$

Запишем уравнение моментов согласно рис. *в*:

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(F_k) = -M - Q\cdot 1{,}5 - P''\cdot 3 + P'\cdot 4 - F''\cdot 7 + F'\cdot 2 + R'_D\cdot 1 +$$

$$+ R''_D\cdot 8 = 0. \tag{4}$$

Подставим в (4) значение составляющих P, F и R_D:

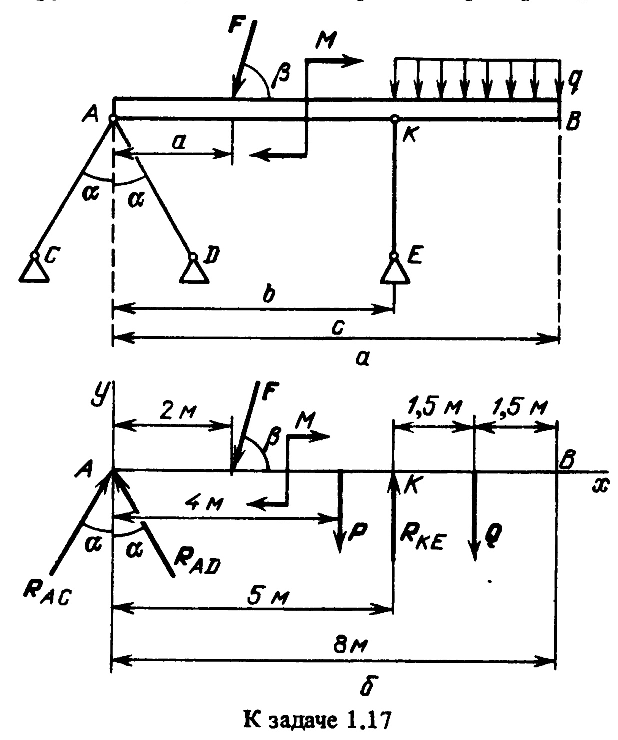
$$\sum_{k=1}^{n} m_A(F_k) = -M - Q \cdot 1{,}5 - P\sin 60^\circ \cdot 3 + P\cos 60^\circ \cdot 4 -$$

$$- F\sin 75^\circ \cdot 7 + F\cos 75^\circ \cdot 2 + R_D \cos 60^\circ \cdot 1 + R_D \cos 30^\circ \cdot 8 = 0. \qquad (5)$$

Решаем систему уравнений (1), (2) и (5) при заданных значениях сил. Получаем сначала из (5) R_D = 8,9 кН. Подставляя полученное значение R_D в (1) и (2), вычисляем:

$$R_{Ax} = 9{,}5 \text{ кН}, \quad R_{Ay} = 11{,}2 \text{ кН}.$$

Задача 1.17. Определить усилия в стержнях, поддерживающих горизонтальную балку AB, на которую действуют сила F, равномерно распределенная нагрузка q и пара сил M (рис. *а*). Заданы величины: вес балки P = 12 Н, a = 2 м, b = 5 м, c = 8 м, F = 8 Н, M = 10 Н · м, q = = 0,5 Н/м, α = 30°, β = 75°.



К задаче 1.17

Р е ш е н и е. Для определения усилий в стержнях AC, AD и KE рассмотрим равновесие балки AB. К балке приложены активные силы и моменты. Это — сила тяжести балки P, которая приложена посредине балки, заданная сила F, пара сил с моментом M и равномерно распределенная по участку KB нагрузка q. Вместо равномерно распределенной нагрузки удобнее рассмотреть сосредоточенную силу Q, равную по модулю $Q = q \cdot KB$ = 0,5 Н/м · 3 м = 1,5 Н и приложенную посредине участка KB. На расчетной схеме мы не будем изображать равномерно распределенную нагрузку, а заменим ее силой Q. (В сущности, мы уже не раз пользовались в задачах подобной заменой, когда изображали вес балки посредине балки — ведь силы тяжести тоже равномерно распределены по длине балки.)

На балку AB наложены три связи в виде невесомых стержней, шарнирно скрепленных своими концами с балкой и с неподвижным основанием.

Освобождаем балку от связей, мысленно разрезая стержни AC, AD и KE. Вместо стержней приложим реакции, направленные вдоль стержней. Расчетная схема задачи показана на рис. *б*.

Система сил, приложенных к балке, – произвольная плоская. Для такой системы можно составить три уравнения равновесия. Неизвестных в задаче также три. Задача статически определенная, можно приступать к составлению уравнений. Зададимся системой координат. Ось x направим вдоль балки из точки A вправо, ось y – из точки A вертикально вверх. За центр моментов принимаем точку A, в которой пересекаются линии действия двух неизвестных реакций. Составляем уравнения равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = R_{AC}\cos 60^\circ - F\cos 75^\circ - R_{AD}\cos 60^\circ = 0,$$
$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = R_{AC}\cos 30^\circ + R_{AD}\cos 30^\circ - F\sin 75^\circ - P + R_{KE} - Q = 0, \qquad (1)$$
$$\sum_{k=1}^{n} m_A(F_k) = -F\sin 75^\circ \cdot 2 - M - P\cdot 4 + R_{KE}\cdot 5 - Q\cdot 6{,}5 = 0.$$

Перепишем уравнения, подставив значения заданных сил, моментов и тригонометрических функций:

$$R_{AC}\cdot 0{,}5 - R_{AD}\cdot 0{,}5 - 8\cdot 0{,}26 = 0,$$
$$R_{AC}\cdot 0{,}87 + R_{AD}\cdot 0{,}87 - 8\cdot 0{,}96 - 12 + R_{KE} - 1{,}5 = 0, \qquad (2)$$
$$-8\cdot 0{,}96\cdot 2 - 10 - 12\cdot 4 + R_{KE}\cdot 5 - 1{,}5\cdot 6{,}5 = 0.$$

Из этих уравнений находим

$$R_{KE} = 11{,}8\ \text{H}, \quad R_{AC} = 6{,}4\ \text{H}, \quad R_{AD} = 4{,}4\ \text{H}. \qquad (3)$$

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 4.10, 4.11, 4.17, 4.21, 4.22, 4.23, 4.27, 4.29, 4.31.

2. Опрокидывание твердых тел. При исследовании покоя твердого тела (конструкций) встречаются задачи, в которых следует определить предельные значения сил или размеров, обеспечивающих сохранение этого состояния. В этих задачах обычно при величине силы, превышающей наибольшее допустимое значение, обеспечивающее покой твердого тела, происходит опрокидывание тела вокруг одной из точек опоры.

Такие задачи решаются в предположении, что твердое тело начинает отрываться от одной из опор. Поэтому реакции этой опоры не следует учитывать. Тогда при равновесии твердого тела реакция оставшейся опоры должна уравновешиваться с равнодействующей всех активных сил. Это значит, что линия действия равнодействующей всех активных сил проходит через оставшуюся опору и, следовательно, момент равнодействующей

относительно точки опоры равен нулю. Таким образом, в соответствии с теоремой Вариньона сумма моментов всех активных сил относительно точки опоры O равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} m_O(F_k) = 0.$$

Из этого уравнения определяются предельные значения сил или размеров твердого тела, при которых еще не наступает опрокидывание.

У к а з а н и е. Решение задач на опрокидывание твердых тел надо проводить в следующем порядке:

1) изобразить активные силы;

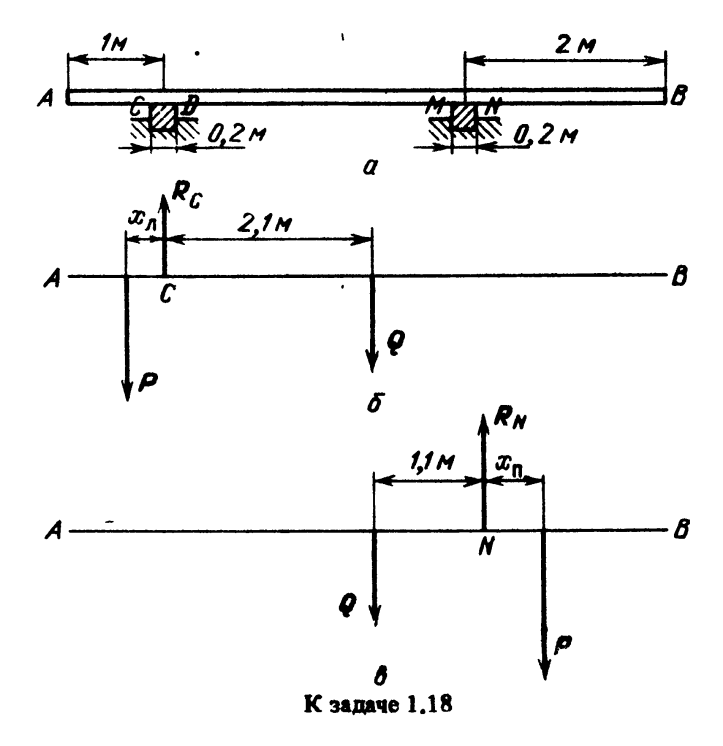
2) определить опору, относительно которой может произойти опрокидывание твердого тела;

3) положить реакцию другой опоры равной нулю;

4) составить уравнение моментов активных сил относительно этой точки опоры;

5) решив уравнение, определить искомую величину (предельную силу или предельный размер).

Задача 1.18. Доска длиной 6 м и массой 24 кг положена несимметрично на два стропильных бруса (рис. *а*). Ширина каждого бруса 20 см.



К задаче 1.18

В каком месте доски может безопасно стоять человек, масса которого 72 кг?

Решение. Существует две опасных зоны. Если человек находится слева от левой (на рисунке) опоры, может произойти отрыв доски от правой опоры и опрокидывание вокруг ребра C левого стропильного бруса. Если человек находится справа от правой (на рисунке) опоры, возможен отрыв доски от левого бруса и опрокидывание вокруг ребра N правого бруса. Вполне безопасной для человека является зона между стропильными брусьями, включая площадки опоры на брусья CD и MN, т.е. вся часть доски между точками C и N. Однако и слева от левой опоры и справа от правой опоры есть небольшие участки доски, где человек может спокойно находиться – отрыва доски от одной из опор не произойдет. Определим эти участки.

Для нахождения длин безопасных участков составим две расчетные схемы, отвечающие двум положениям критического равновесия человека на доске. Первая схема показана на рис. *б*. Человек стоит на некотором, пока неизвестном, критическом расстоянии $x_л$ от левого края C левой опоры CD, находясь слева от точки C. Опрокидывание в этом случае может произойти вокруг точки C. В положении критического равновесия доска не имеет опоры на правый стропильный брус и, следовательно, реакция правого бруса равна нулю. На левый брус доска опирается в точке C. Составляем уравнение моментов относительно точки C. В уравнение входят момент силы тяжести человека и момент силы тяжести доски:

$$72 \cdot 9{,}8 \cdot x_л - 24 \cdot 9{,}8\,(2 + 0{,}1) = 0.$$

Сокращая уравнение на общие множители, получаем $3x_л - 2{,}1 = 0$, откуда $x_л = 0{,}7$ м.

Рассмотрим теперь вторую опасную ситуацию – положение критического равновесия, когда человек находится справа от правого бруса на некотором расстоянии $x_п$ от ребра N. Расчетная схема показана на рис. *в*. Составляем уравнение моментов относительно ребра N:

$$-72 \cdot 9{,}8 \cdot x_п + 24 \cdot 9{,}8\,(1 + 0{,}1) = 0,$$

откуда

$$x_п = 0{,}36(6) \text{ м}.$$

Сопоставляя оба результата, получаем, что запретными участками являются 0,3 м от левого края доски A и 1,64 м от правого конца доски B.

Задача 1.19. В условиях задачи 1.18 человек, шагнув со стропильного бруса на доску на участке CD, начинает двигаться по доске со скоростью 0,2 м/с в сторону второго стропильного бруса.

Определить изменение опорных реакций со временем до момента, когда человек ступит с участка MN на второй брус.

Р е ш е н и е. Очевидно, что во время движения человека по доске между брусьями (рис. *а*) точками опоры служат ребра D и M.

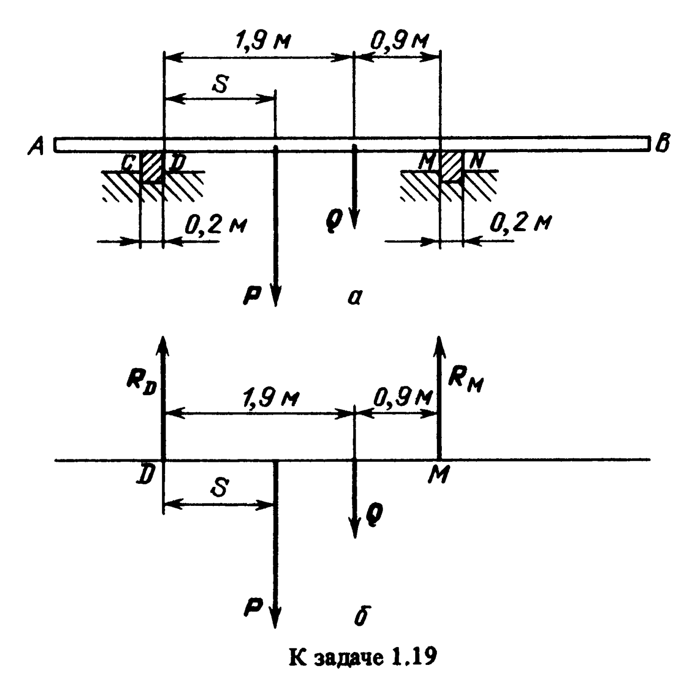
Будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$ центр тяжести человека располагается над точкой D. Для того чтобы пройти расстояние от D до M, равное 2,8 м, человеку, идущему со скоростью 0,2 м/с, понадобится 14 с. В произвольный момент времени t, меньший 14 с, человек находится на расстоянии $S = 0{,}2\,t$ м от точки D.

На рис. *б* изображена расчетная схема, соответствующая этому произвольному моменту времени. Опоры в точках D и M отброшены и заменены реакциями (прогибом доски пренебрегаем). Активными силами являются сила тяжести P человека и сила тяжести Q доски. Имеем систему параллельных сил на плоскости.

Составляем уравнение равновесия для этой системы сил. Можно сделать это двумя способами.

Составляем уравнение моментов относительно левой опоры и уравнение, приравнивающее нулю алгебраическую сумму сил:

$$\begin{aligned} &-P \cdot S - Q \cdot 1{,}9 + R_M \cdot 2{,}8 = 0, \\ &-P - Q + R_D + R_M = 0, \end{aligned} \qquad (1)$$



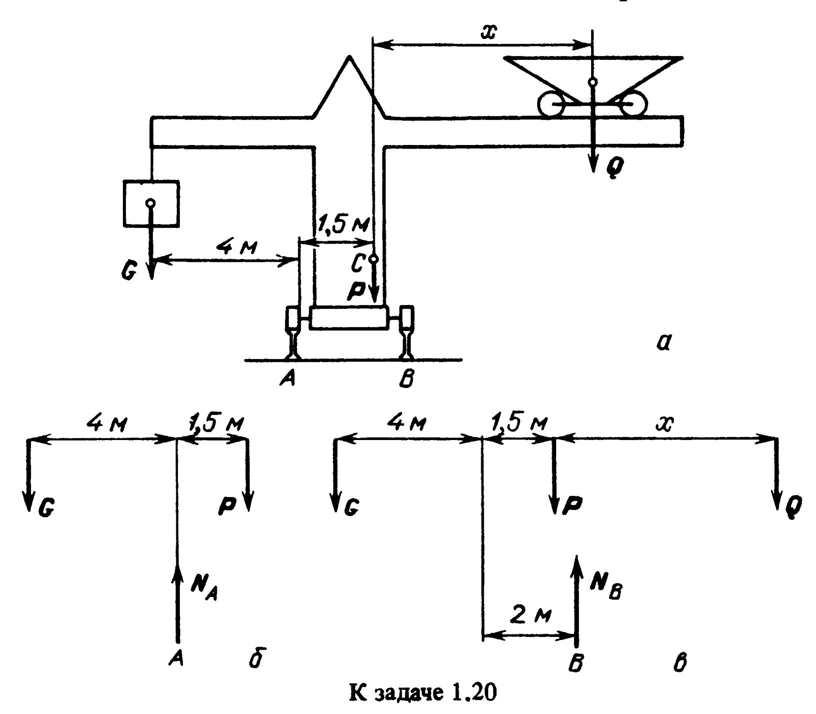
К задаче 1.19

откуда

$$R_M = 84\,(1{,}9 + 0{,}6t)\ \text{Н} = 159{,}6 + 50{,}4t\ \text{Н},$$
$$R_D = 84\,(9{,}3 - 0{,}6t)\ \text{Н} = 781{,}2 - 50{,}4t\ \text{Н}. \qquad (2)$$

Задача 1.20. Строительный кран весом $P = 24$ т установлен на рельсах A и B (рис. *а*). Ширина колеи равна 2 м. Вертикальная линия, проходящая через центр тяжести крана, пересекает колею на расстоянии 1,5 м от рельса A. На расстоянии 4 м слева от рельса A к крану подвешен противовес весом G.

Какое максимальное значение может иметь вес противовеса?



К задаче 1.20

На какое максимальное расстояние от центра тяжести крана может быть подан груз $Q = 8$ т?

Решение. Нарушение равновесия крана возможно в двух случаях:

1) слишком тяжелый противовес может опрокинуть ненагруженный кран, при этом опрокидывание произойдет вокруг рельса A;

2) если груз отведен слишком далеко вправо, он может опрокинуть кран вокруг рельса B.

Рассмотрим оба эти случая. Пусть ненагруженный кран находится в положении критического равновесия, в этом случае реакция опоры B равна нулю (рис. *б*). На кран действуют две активные силы – собственный вес P крана и сила тяжести G противовеса. В момент отрыва от рельса B

кран удерживается только одной связью – рельсом A. Освобождая кран от связи, заменим ее действие реакцией. Вместо мысленно отброшенной опоры в точке A приложим к крану реакцию N_A. Опора предполагается гладкой, поэтому реакция направлена вертикально. Так как связь односторонняя, направляем N_A вверх.

Расчетная схема представлена на рис. *б*.

Для нахождения максимального значения G составляем уравнение моментов относительно точки A:

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(F_k) = G \cdot 4 - P \cdot 1{,}5 = 0.$$

Отсюда получаем $G = 9$ т. Итак, максимально возможный вес противовеса равен 9 т.

Обратимся ко второму случаю. Рассмотрим теперь кран, несущий груз Q, причем груз отведен на максимальное расстояние вправо (рис. *в*). К крану приложены три активные силы – вес крана P, сила тяжести противовеса G и вес груза Q. В положении критического равновесия кран опирается только на рельс B. Освобождаем кран от единственной опоры в точке B, заменяя действия этой связи реакцией N_B. Реакция, как и в первом случае, направлена вертикально вверх. Расчетная схема показана на рис. *в*.

Составляем уравнение моментов относительно точки B:

$$\sum_{k=1}^{n} m_B(F_k) = G \cdot 6 + P \cdot 0{,}5 - Q\,(x - 0{,}5) = 0.$$

Отсюда находим

$$x = \frac{70}{8} = 8{,}75 \text{ м}.$$

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 3.23, 3.24, 3.25, 3.26.

3. Приведение произвольной плоской системы сил к простейшему виду. Рекомендуется следующий порядок выполнения приведения:

1) выбрать оси декартовых координат;

2) выбрать центр приведения системы сил;

3) вычислить проекции главного вектора системы сил по формулам

$$V_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \quad V_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky};$$

4) определить модуль главного вектора $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ и направляющие косинусы

$$\cos(x,\widehat{\ } V) = V_x/V, \quad \cos(y,\widehat{\ } V) = V_y/V;$$

5) вычислить главный момент системы сил относительно центра приведения по формуле

$$m_O = \sum_{k=1}^{n} m_O(F_k),$$

где O — центр приведения системы сил;

6) в зависимости от значений V и m_O возможны четыре случая:

а) если $V \neq 0$ и $m_O \neq 0$, то следует систему привести к равнодействующей R, равной силе V, отстоящей от нее на расстоянии $h = m_O/V$ и расположенной так, чтобы знак момента равнодействующей относительно центра O совпадал со знаком главного момента m_O;

б) если $V \neq 0$, $m_O = 0$, то система сил приводится к равнодействующей, совпадающей с V;

в) если $V = 0$, $m_O \neq 0$, то система сил приводится к паре сил с моментом m_O;

г) если $V = 0$ и $m_O = 0$, то система сил находится в равновесии.

Уравнение линии действия равнодействующей в случаях а) и б) имеет вид

$$xR_y - yR_x = \sum_{k=1}^{n} m_O(F_k),$$

где $R_x = V_x$, $R_y = V_y$, а x и y — текущие координаты точки линии действия равнодействующей, O — начало координат.

Оси декартовых координат следует направлять так, чтобы силы в возможно большем числе оказались параллельными либо перпендикулярными к этим осям. Центр приведения системы следует выбирать так, чтобы моменты сил относительно этого центра в возможно большем числе обратились в нуль, т.е. чтобы линии действия этих сил проходили бы через центр приведения системы.

При переходе от одного центра приведения (O) к другому центру приведения (A) следует иметь в виду, что главный вектор V от выбора центра приведения не зависит (главный вектор является статическим инвариантом), а главный момент системы изменяется в соответствии с формулой

$$m_A = m_O + m_A(V_O).$$

Задача 1.21. На двухступенчатый шкив действуют силы натяжения ветвей двух ремней: горизонтального (T_1 и T_2) и вертикального (T_3 и T_4), как показано на рисунке.

Привести эту систему сил к простейшему виду.

Принять следующие значения сил натяжения ветвей ремней: $T_1 = 20$ Н, $T_2 = 15$ Н, $T_3 = 40$ Н, $T_4 = 30$ Н. Диаметр ступеней шкива $D_1 = 80$ см, $D_2 = 40$ см.

Решение. Примем за начало координат центр O шкива. Ось x направим по горизонтали вправо, ось y – по вертикали вниз. За центр приведения возьмем точку O. Определим главный вектор V и главный момент m_O данной плоской системы сил. Вычислим проекции главного вектора V на координатные оси:

$$V_x = \Sigma F_{kx} = T_1 + T_2 = 35\text{Н},$$

$$V_y = \Sigma F_{ky} = T_3 + T_4 = 70\text{Н}.$$

Модуль главного вектора

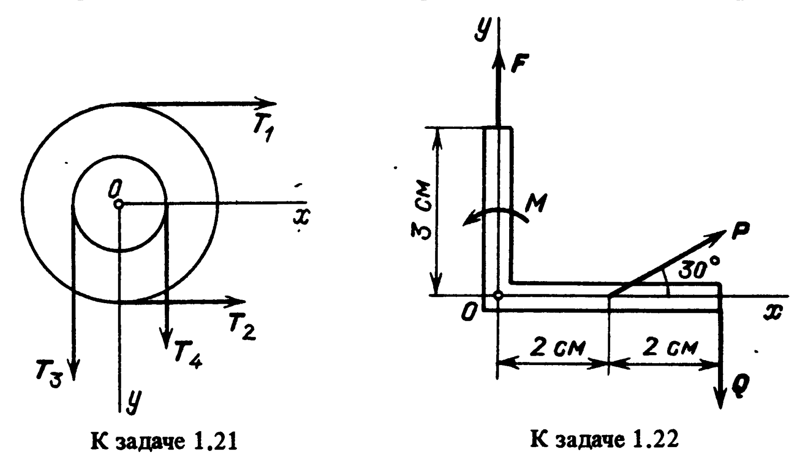
$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{35^2 + 70^2} = 35\sqrt{5} \approx 78{,}4\text{Н}.$$

Вычислим главный момент:

$$m_O = \Sigma m_O(F_k) = -T_1 \cdot \frac{D_1}{2} + T_2 \cdot \frac{D_1}{2} - T_4 \cdot \frac{D_2}{2} + T_3 \cdot \frac{D_2}{2} =$$

$$= -20 \cdot 0{,}4 + 15 \cdot 0{,}4 - 30 \cdot 0{,}2 + 40 \cdot 0{,}2 = 0.$$

Итак, $V \neq 0$ и $m_O = 0$, следовательно, система приведена к равнодействующей R, приложенной в точке O и равной главному вектору V. Углы,



К задаче 1.21 К задаче 1.22

которые равнодействующая составляет с координатными осями, определяются направляющими косинусами вектора V:

$$\cos(\widehat{R, x}) = \cos(\widehat{V, x}) = \frac{V_x}{V} = \frac{35}{35\sqrt{5}} \approx 0{,}448,$$

$$\cos(\widehat{R, y}) = \cos(\widehat{V, y}) = \frac{V_y}{V} = \frac{70}{35\sqrt{5}} \approx 0{,}896.$$

Задача 1.22. К твердому телу, имеющему форму уголка, приложены три силы F, P, Q и момент M, как показано на рисунке. Значения сил и момента равны: $F = 5$ Н, $P = 4$ Н, $Q = 6$Н, $M = 0{,}2$ Н · м. Принимая за центр приведения вершину уголка, найти, к чему приводится система сил (толщиной уголка пренебречь).

Р е ш е н и е. Направим оси x и y из вершины уголка по направлениям его полочек, как показано на рисунке. Ось z при этом перпендикулярна рисунку и направлена из точки O в сторону читателя. Вычисляем проекции главного вектора и главного момента заданной системы сил относительно точки O:

$$V_x = P\cos 30° = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3{,}464\ \text{Н},$$

$$V_y = F + P\sin 30° - Q = 5 + 4\cdot 0{,}5 - 6 = 1\text{Н},\qquad V_z = 0,$$

$$M_x = 0,\quad M_y = 0,\quad M_z = M + P\sin 30°\cdot 2\ \text{см} - Q\cdot 4\ \text{см} = 0{,}2\ \text{Н}\cdot\text{м} +$$

$$+\ 4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}02\ \text{Н}\cdot\text{м} - 6\cdot 0{,}04\ \text{Н}\cdot\text{м} = (0{,}2 + 0{,}04 - 0{,}24)\text{Н}\cdot\text{м} = 0.$$

Система привелась к равнодействующей R, равной по модулю главному вектору V:

$$R = |V| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{12 + 1} = \sqrt{13} \approx 3{,}6\ \text{Н}.$$

Равнодействующая приложена к вершине уголка под углом к оси x, равным

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{V_y}{V_x} = \operatorname{arcctg}\frac{V_x}{V_y} = \operatorname{arcctg} 3{,}464 \approx 16°6'.$$

Задача 1.23. К балке длиной l приложены четыре силы, как показано на рис. *а*. Привести систему к простейшему виду.

Р е ш е н и е. Поскольку центр приведения не указан, примем за центр приведения точку A, относительно которой легко вычисляются моменты всех сил. Так как в этой задаче все силы параллельны, то для нахождения главного вектора следует просто сложить силы. В данном случае в точке A оказывается сила, равная $6F$ и направленная вниз, и три силы, равные F, $4F$ и $2F$ и направленные вверх. Результатом сложения является сила, равная F и направленная вверх. Это и есть главный вектор системы.

Составляем главный момент системы сил относительно точки A:

$$m_A = \sum_{k=1}^{n} m_A(F_k).$$

Моменты всех сил относительно точки A — векторы, перпендикулярные плоскости рисунка. Достаточно найти их алгебраическую сумму:

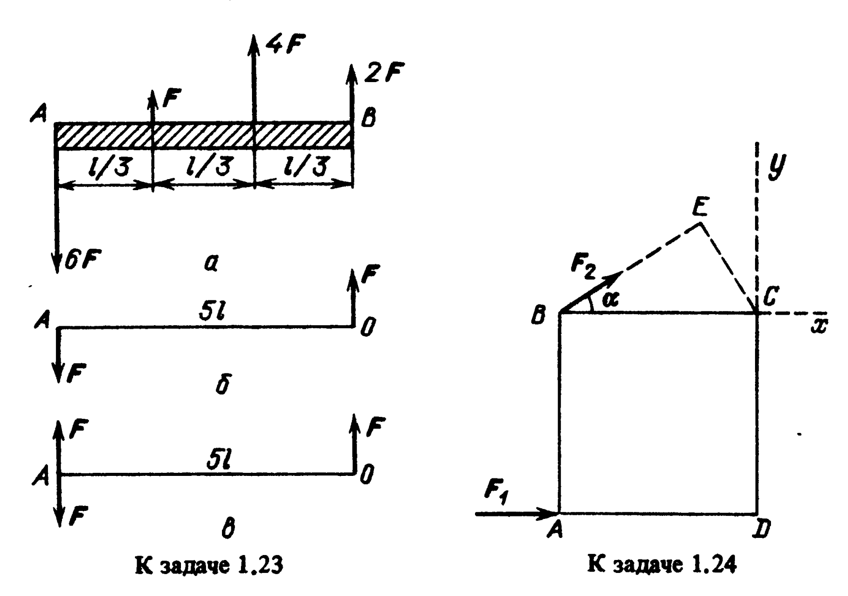
$$m_A = \sum_{k=1}^{n} m_A(F_k) = 6F\cdot 0 + F\cdot l/3 + 4F\cdot 2l/3 + 2F\cdot l = 5Fl.$$

Знак "+" соответствует вращению против хода часовой стрелки.

Итак, система привелась к главному вектору, направленному перпендикулярно балке вверх, и главному моменту. Известно, что если главный вектор и главный момент не равны нулю, то система сил приводится к равнодействующей. Для этого надо представить главный момент в виде пары сил так, чтобы каждая из сил пары была равна по модулю главному вектору.

В данной задаче (рис. *б*), где главный момент относительно точки A равен $m_A = 5Fl$, преобразованная пара состоит из сил, равных F, и имеет плечо, равное $5l$.

Пару сил можно свободно перемещать и поворачивать в ее плоскости, не изменяя момента пары. Произведем перемещение таким образом, чтобы одна из сил пары оказалась в точке A и была направлена противоположно главному вектору. Результат такого перемещения показан на рис. *в*. Мы получим систему, состоящую из трех сил: главного вектора, направленного из точки A вверх, и двух сил пары, равных по модулю главному



К задаче 1.23

К задаче 1.24

вектору. В точке A две силы, равные по модулю и противоположно направленные, уравновешиваются.

Остается только одна сила – это вторая из сил пары. Она приложена в точке O, удаленной от точки A вправо на расстояние $5l$. Оставшаяся сила эквивалентна исходной системе сил, по модулю и направлению она равна главному вектору системы и является равнодействующей.

Таким образом, заданная система сил привелась к равнодействующей.

Задача 1.24. К невесомой квадратной пластине $ABCD$ со стороной, равной 2 м, приложены две силы, F_1 и F_2. Сила F_1 приложена в вершине A, направлена вдоль стороны AD и по модулю равна 100 Н. Сила F_2, неизвестная по модулю, приложена в вершине B под углом α к стороне BC, причем угол α также неизвестен. Задан модуль главного вектора системы сил V, равный 500 Н. Главный момент системы сил относительно точки C равен – 200 Н · м и направлен по ходу часовой стрелки.

Найти модуль силы F_2 и угол α, который эта сила составляет со стороной BC.

Решение. Поскольку центр приведения указан в условии, нам следует выбрать направления осей декартовых координат. Удобные направления подсказывает рисунок задачи. Направим ось x из центра приведения C вправо, а ось y – из точки C вверх. Для нахождения искомых модуля и направления силы F_2 запишем проекции главного вектора системы сил на оси координат:

$$V_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F_1 + F_2 \cos\alpha, \quad V_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F_2 \sin\alpha.$$

Отсюда находим модуль главного вектора

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(F_1 + F_2 \cos\alpha)^2 + (F_2 \sin\alpha)^2}. \qquad (1)$$

Запишем, далее, выражение главного момента системы сил относительно точки C. Плечо силы F_1 относительно точки C – это отрезок, совпадающий со стороной CD. Плечо силы F_2 находим, опустив перпендикуляр CE из точки C на линию действия силы F_2. Длина CE получается из прямоугольного треугольника BEC:

$$CE = BC \cdot \sin\alpha = 2 \sin\alpha.$$

Главный момент системы сил относительно точки C равен:

$$m_C = \sum_{k=1}^{n} m_C(F_k) = F_1 \cdot CD - F_2 \cdot CE = F_1 \cdot 2 - F_2 \cdot 2\sin\alpha. \qquad (2)$$

Равенства (1) и (2), в которых известны V, m_C и F_1, составляют систему уравнений, из которой можно определить искомые величины F_2 и α. Записываем (1) и (2), подставив в них значения V, m_C и F_1 из условия задачи:

$$500 = \sqrt{(100 + F_2 \cos\alpha)^2 + (F_2 \sin\alpha)^2}, \qquad (3)$$

$$-200 = 100 \cdot 2 - F_2 \cdot 2 \cdot \sin\alpha. \qquad (4)$$

Отметим, что знак минус перед значением m_C в левой части (4) соответст-

вует указанному в условии задачи направлению главного момента m_C по ходу часовой стрелки.

Из (4) следует

$$F_2 \sin\alpha = 200. \quad (5)$$

Подставим полученное значение $F_2 \sin\alpha$ в (3) и возведем обе части равенства (3) в квадрат:

$$500^2 = (100 + F_2 \cos\alpha)^2 + 200^2. \quad (6)$$

Решая уравнение (6), получаем

$$100 + F_2 \cos\alpha = \pm\sqrt{500^2 - 200^2} \approx \pm 458.$$

Возможны два случая

$$F_2 \cos\alpha = 358 \quad (7)$$

и

$$F_2 \cos\alpha = -558. \quad (8)$$

Рассмотрим их отдельно.

В первом случае решаем систему (7) и (5): $F_2 \cos\alpha = 358$, $F_2 \sin\alpha = 200$. Возводим оба уравнения в квадрат и складываем:

$$F_2^2 = 358^2 + 200^2 = 168\,164.$$

Отсюда получается

$$F_2 = 410\text{Н}$$

(F_2 — это модуль силы, он может быть только положительным).

Разделим (5) на (7): $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{200}{358} = 0{,}5586$. По таблицам находим $\alpha = 29°11'$.

Рассмотрим теперь второй случай, когда справедливо равенство (8). Из (8) следует, что $\cos\alpha$ отрицателен и, следовательно, составляет с направлением BC тупой угол. Решаем систему (8) и (5): $F_2 \cos\alpha = -558$, $F_2 \sin\alpha = 200$.

Аналогично тому, как выше решалась система (7) и (5), возводим оба уравнения в квадрат и складываем:

$$F_2^2 = 558^2 + 200^2 = 351\,364.$$

Отсюда получаем значение $F_2 = 593$ Н.

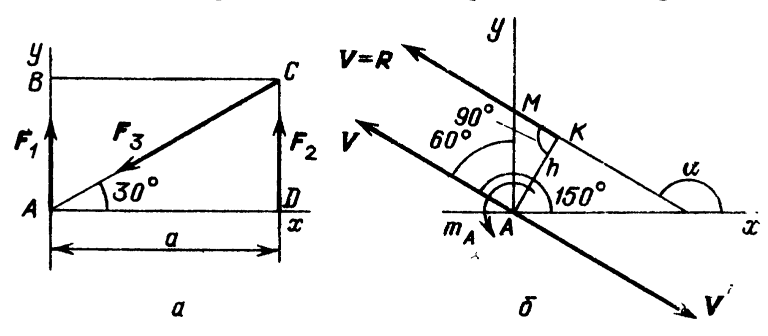
Разделим теперь (5) на (8):

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{200}{558} = -0{,}3584.$$

Угол α в этом случае равен $160°17'$.

Задача 1.25. Привести к простейшему виду систему сил F_1, F_2 и F_3, изображенную на рис. *а*. Силы F_1 и F_2 направлены по противоположным сторонам, а сила F_3 – по диагонали прямоугольника *ABCD*, сторона *AD* которого равна *a*; $|F_1| = |F_2| = \frac{1}{2}|F_3| = F$.

Решение. Выбрав начало осей декартовых координат в вершине прямоугольника *A*, направим ось *x* по горизонтали направо, а ось *y* по



К задаче 1.25

вертикали вверх. (Выбор таких направлений осей *x* и *y* удобен, так как две силы из трех параллельны оси *y* и не дают проекций на ось *x*.)

Приведем данную систему сил к главному вектору и главному моменту. Выберем в качестве центра приведения системы сил начало координат *A*. Найдем сначала проекции главного вектора на оси координат:

$$V_x = \Sigma F_{kx} = -F_3 \cos 30° = -F\sqrt{3},$$

$$V_y = \Sigma F_{ky} = F_1 + F_2 - F_3 \cos 60° = F.$$

Модуль главного вектора *V* равен

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 2F, \quad (1)$$

а направляющие косинусы будут:

$$\cos(\widehat{x, V}) = \frac{V_x}{V} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos(\widehat{y, V}) = \frac{V_y}{V} = \frac{1}{2},$$

т.е. $(\widehat{x, V}) = 150°$, $(\widehat{y, V}) = 60°$. Сила *V* изображена на рис. *б*.

Переходим к определению главного момента системы сил относительно центра приведения *A*. Учитывая, что

$$m_A(F_1) = m_A(F_3) = 0, \quad \text{а} \quad m_A(F_2) = F_2 \cdot AD = Fa,$$

находим

$$m_A = m_A(F_1) + m_A(F_2) + m_A(F_3) = Fa. \quad (2)$$

Итак, система сил оказалась приведенной к силе V и паре сил с моментом m_A, направленным против хода часовой стрелки.

Известно, что если $V \neq 0$ и $m_A \neq 0$, то систему сил можно привести к равнодействующей силе R. Для этого изобразим пару сил, соответствующую главному моменту m_A, так, чтобы силы, входящие в состав пары сил равнялись по модулю силе V, причем одна из них (V') лежала бы на одной линии действия с силой V и была направлена ей противоположно. При этом вторая сила, входящая в состав пары сил, приложенная к точке K, окажется векторно равной силе V. Плечо пары $h = AK$ следует подобрать так, чтобы момент этой пары сил был равен главному моменту m_A, т.е. $m_A = Vh$, откуда $h = AK = m_A/V$. Воспользовавшись формулами (1) и (2), находим $h = a/2$. Теперь мы получили систему, состоящую из трех сил. Модуль каждой из этих сил равен модулю главного вектора V. Две силы, приложенные в точке A, равные по модулю и направленные в противоположные стороны по общей линии действия, уравновешиваются. Эти силы можно отбросить, не нарушая состояния твердого тела. Остается одна сила V, приложенная к точке K, эквивалентная данной системе сил. Следовательно, эта сила, равная главному вектору V, является равнодействующей R. Таким образом, данная система из трех сил статически эквивалентна одной силе, равнодействующей R.

Определим уравнение линии действия равнодействующей R, воспользовавшись формулой

$$xR_y - yR_x = \sum_{k=1}^{n} m_A(F_k). \quad (3)$$

Проекции равнодействующей R на оси декартовых координат равны проекциям главного вектора V на соответствующие оси, т.е. $R_x = -F\sqrt{3}$, $R_y = F$. Сумма моментов всех данных сил относительно начала координат A является главным моментом m_A, определяемым формулой (2):

$$\Sigma m_A(F_k) = m_A = Fa.$$

Подставив значения R_x, R_y, $\Sigma m_A(F_k)$ в уравнение (3), находим уравнение линии действия равнодействующей R:

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

Это – уравнение прямой с угловым коэффициентом, равным $-\sqrt{3}/3$, откуда следует, что угол, образованный этой прямой с осью x, составляет $150°$.

Найдем точки пересечения линии действия равнодействующей с осями координат. Имеем: при $x = 0$ $y = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, при $y = 0$ $x = a$. Следовательно, равнодействующая направлена по диагонали DB прямоугольника $ABCD$.

§ 3. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

В статике твердого тела наряду с равновесием одного тела рассматриваются сочлененные системы материальных тел, т.е. совокупности твердых тел, касающихся друг друга своими поверхностями или соединенных друг с другом шарнирами, гибкими нитями или стержнями.

Важной задачей статики системы твердых тел является определение реакций связей. Для этого основным является способ расчленения, при котором наряду с равновесием всей системы тел рассматривается равновесие отдельных тел (или групп тел системы). При этом все остальные тела системы и соответствующие связи мысленно отбрасываются, а их действие на тело, равновесие которого рассматривается, заменяется реакциями.

Следует заметить, что при рассмотрении равновесия всей системы твердых тел реакции связей между телами, входящими в систему, не должны учитываться; они не входят в уравнения равновесия, как внутренние, взаимно уравновешенные силы. А при рассмотрении равновесия каждого тела в отдельности или какой-либо группы тел, входящих в систему, соответствующие реакции связей, которые были мысленно расчленены, становятся внешними силами и входят в уравнение равновесия.

Задачи на равновесие системы твердых тел, находящихся под действием произвольной плоской системы сил, решаются путем применения уравнений равновесия твердого тела, разобранных в § 2 (уравнения (1*) или (2*), или (3*)).

Рассмотрим в качестве примера системы твердых тел, изображенные на рис. 1.33, 1.34.

Кривошипно-ползунный механизм OAB (рис. 1.33) состоит из трех твердых тел: кривошипа OA, шатуна AB и ползуна B. Эти тела соединены друг с другом шарнирами A и B. Кроме того, на них наложены еще две связи: шарнирное закрепление в точке O и горизонтальные направляющие, препятствующие вертикальному перемещению ползуна B.

Если рассматривать равновесие всего кривошипно-ползунного механизма как системы тел, то кроме активных сил следует приложить реакции шарнира O и горизонтальных направляющих. Реакция шарнира O, неизвестная по величине и направлению, должна быть представлена двумя составляющими: вертикальной и горизонтальной. Отбросив горизонтальные направляющие, следует их заменить вертикальной реакцией. Число неизвестных равно трем и они могут быть определены из трех уравнений равно-

весия, составленных для всего кривошипно-ползунного механизма. Для определения реакций в шарнире A после этого достаточно рассмотреть равновесие кривошипа OA, отбросив мысленно шатун с ползуном. Две составляющие реакции шарнира A определяются сразу.

Цилиндрический стакан (рис. 1.34) поставлен вверх дном на горизонтальный пол, внутри стакана покоятся два шара. Эта система состоит из трех твердых тел: шара O_1, шара O_2 и стакана, находящихся друг с другом

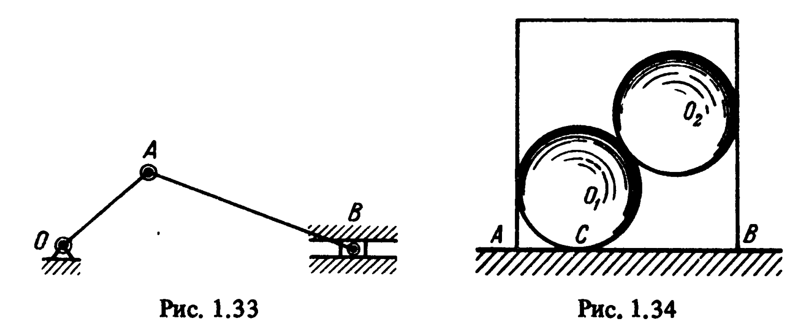


Рис. 1.33 Рис. 1.34

в контакте. На эту систему тел наложена одна внешняя связь: гладкий горизонтальный пол.

При решении задач на равновесие системы тел недостаточно, как правило, рассмотреть равновесие этой системы в целом. Для всей системы условия равновесия сводятся или к трем уравнениям равновесия для плоской системы сил, или к двум уравнениям для плоской системы параллельных сил. В этом случае число неизвестных может быть больше числа перечисленных уравнений.

Однако это обстоятельство еще не делает систему статически неопределимой, так как если разделить систему на отдельные твердые тела и составить уравнения равновесия для каждого из них, то число новых неизвестных может быть меньше числа новых уравнений равновесия. Если число всех составленных таким образом независимых уравнений равновесия для всей системы и отдельных ее частей будет равно числу всех неизвестных, то такая задача является статически определенной.

Поясним это на примере трехшарнирной арки (рис. 1.35, *а*). Арка состоит из двух симметричных полуарок, соединенных в точке C шарниром. В точках A и B арка шарнирно прикреплена к фундаменту.

На арку действуют две активные известные силы: горизонтальная сила Q, приложенная в точке D, и вертикальная сила P, приложенная в точке E. Применяя принцип освобождаемости от связей, отбросим мысленно шарнирные закрепления в точках A и B и заменим их действие силами реакций. Величины и направление этих реакций неизвестны. Следовательно, их нужно представить двумя составляющими каждую: F_{Ax} и F_{Ay},

F_{Bx} и F_{By}. Таким образом, для системы твердых тел, состоящей из двух полуарок (рис. 1.35, *б*), можно составить три уравнения равновесия, в то время как число неизвестных сил равно четырем. Тем не менее задача является статически определенной. Рассмотрим равновесие какой-либо одной полуарки (рис. 1.35,*в*). На левую полуарку действует одна сила Q. Отбрасывая мысленно шарниры A и C вместе с правой полуаркой, заменяем их действие реакциями. Реакция в точке A представлена двумя

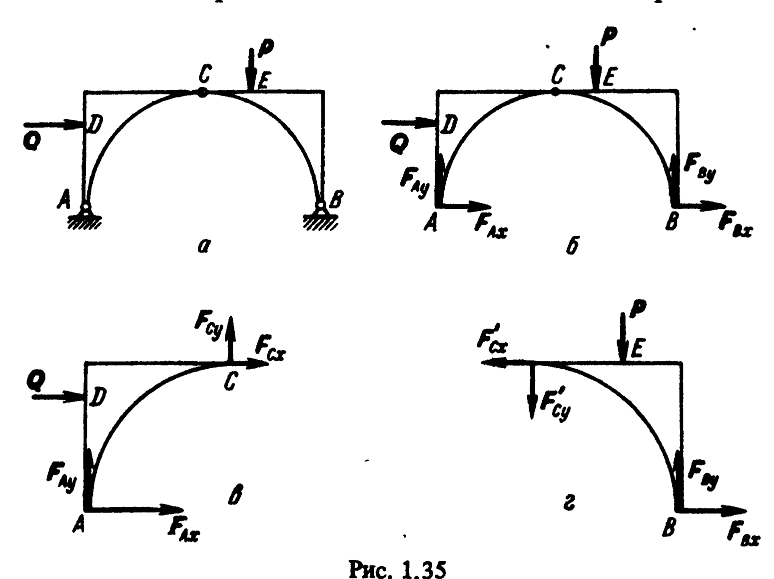


Рис. 1.35

ранее выбранными составляющими F_{Ax} и F_{Ay}, реакция в точке C, также неизвестная по модулю и направлению, определена составляющими F_{Cx} и F_{Cy}. Для левой полуарки можно составить три уравнения равновесия, между тем как новых неизвестных только два: F_{Cx} и F_{Cy}. Таким образом, рассматривая равновесие всей арки и левой полуарки, имеем шесть уравнений равновесия и шесть неизвестных, т.е. задача является статически определенной. Эта же задача может быть решена и другим способом, если рассмотреть равновесие левой полуарки (рис. 1.35, *в*) и отдельно равновесие правой полуарки (рис. 1.35,*г*). И в этом случае число уравнений равновесия равно числу неизвестных (шести). На основании пятого закона (закон равенства действия и противодействия) составляющие F'_{Cx}, F'_{Cy} реакции шарнира C, приложенные к правой полуарке, равны по модулю и направлены прямо противоположно соответствующим составляющим реакции того же шарнира C, приложенным к левой полуарке.

Указание. При решении задач на равновесие твердых тел надо выполнить четыре первых пункта, указанных в начале книги, на с. 16.

При этом следует выделить систему твердых тел и отдельные твердые тела, входящие в систему, равновесие которых надо рассмотреть. Затем:

5) сопоставить число неизвестных величин и число независимых уравнений равновесия; эти числа должны быть равны, если задача является статически определенной;

6) выбрать наиболее удобные системы координат; при этом для каждого тела и для всей системы тел может быть избрана своя система координат;

7) составить уравнения равновесия для каждого твердого тела или для каждой системы твердых тел, равновесие которых исследуется;

8) решить систему всех уравнений равновесия.

Если система твердых тел разделяется на отдельные тела, то при замене их взаимодействия реакциями связей следует ввести реакции, приложенные к одному телу, и на основании закона равенства действия и противодействия выбрать реакции, действующие на второе тело, равными по модулю и направленными прямо противоположно (см., например, рис. 1.35, *в* и *г*).

В том случае, когда значение неизвестной силы окажется по ответу отрицательным, направление этой силы следует взять противоположным тому, которое было изображено на рисунке.

При составлении уравнений равновесия целесообразно оси координат и точки, относительно которых составляются уравнения моментов сил, выбирать так, чтобы в каждое уравнение входила только одна неизвестная величина.

Если по условию задачи требуется определить лишь некоторые неизвестные величины, то надо составить только те из уравнений равновесия, которые необходимы для получения ответа.

Задача 1.26. Два гладких цилиндра A и B помещены в ящик (рис. *а*). Цилиндр A весит $Q = 400$ Н и его радиус $R = 80$ мм; цилиндр B весит $P = 300$ Н и его радиус $r = 50$мм.

Определить реакции вертикальных стен в точках C и E, горизонтального пола в точке D и давление между цилиндрами, если ширина ящика 250 мм.

Р е ш е н и е. Отбросим мысленно стены и пол ящика и рассмотрим равновесие каждого цилиндра в отдельности. Цилиндр B находится в равновесии под действием трех сил: веса $\boldsymbol{P}$, горизонтальной реакции стены $\boldsymbol{F}$ и реакции $\boldsymbol{N}$ цилиндра A, направленной по прямой, соединяющей центры O и O_1 обоих цилиндров (рис. *б*).

Чтобы найти угол α, образованный реакцией $\boldsymbol{N}$ с горизонтом, рассмотрим треугольник OO_1H (рис. *в*). В этом треугольнике сторона $OO_1 = R + r = 130$ мм, катет $OH = 120$ мм. Пользуясь теоремой Пифагора, находим длину второго катета $O_1H = 50$ мм. Таким образом,

$$\sin\alpha = 5/13, \quad \cos\alpha = 12/13.$$

Составим уравнения равновесия для цилиндра B. Так как линии действия сил, приложенных к цилиндру, пересекаются в центре цилиндра, то достаточно составить два уравнения, приравняв нулю сумму проекций всех сил на оси x и y (рис. *а*):

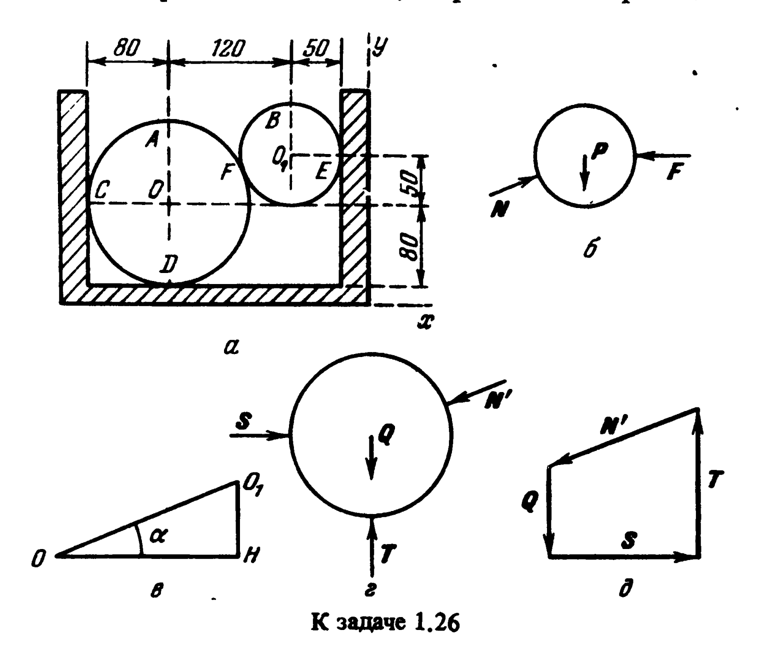
$$\Sigma F_{kx} = N\cos\alpha - F = 0,$$

$$\Sigma F_{ky} = N\sin\alpha - P = 0.$$

Подставляя значение $P = 300$ Н, находим

$$N = 780\,\text{Н}, \quad F = 720\,\text{Н}.$$

Цилиндр A находится в равновесии под действием четырех сил: веса Q, горизонтальной реакции стены S, вертикальной реакции пола T и



К задаче 1.26

реакции N' цилиндра B, равной по модулю и направленной противоположно силе N. Все четыре силы (рис. *г*) пересекаются в точке O, центре цилиндра A. Составим два уравнения равновесия этих сил. Суммы проекций сил на ось x и ось y равны нулю:

$$\Sigma F_{kx} = S - N\cos\alpha = 0,$$

$$\Sigma F_{ky} = T - Q - N\sin\alpha = 0,$$

Отсюда находим

$$S = 720\,\text{Н}, \quad T = 700\,\text{Н}.$$

Следует заметить, что эта задача может быть решена и другим, графическим способом. Действительно, зная модуль и направление силы P, а также направления сил N и F, строим силовой замкнутый треугольник. Этот треугольник совпадает с треугольником OO_1H (рис. *в*), если сторону O_1H положить равной силе P. Тогда сторона OH даст в этом же масштабе силу F, а сторона OO_1 силу N.

Далее строим замкнутый силовой многоугольник для сил, приложенных к цилиндру A. Построение начинаем с известных по модулю и направлению сил N' и Q. Проводя из конца силы Q прямую, параллельную S, а из начала силы N' прямую, параллельную T, получаем замкнутый силовой многоугольник (рис. *д*), стороны которого в избранном масштабе и определяют неизвестные силы.

Задача 1.27. Блоки A и B весом соответственно 6кН и 3кН удерживаются в равновесии на гладкой плоскости, наклоненной под углом 30° к горизонту, силой P, параллельной OO_1, при помощи рычага OD, перпендикулярного наклонной плоскости (рис. *а*). Тросы, соединяющие рычаг с блоками, также параллельны плоскости OO_1.

Определить, пренебрегая трением, усилия в тросах и модуль силы P. Расстояния OH = 8 см, HC = 8 см, CD = 16 см.

Решение. Рассмотрим равновесие каждого блока в отдельности и равновесие рычага. Блок A (рис. *б*) находится в равновесии под действием четырех сил: веса Q_2, натяжения T_2, параллельного наклонной плоскости, реакции N_1 блока B и реакции наклонной плоскости N_2, перпендикулярных плоскости OO_1.

Выберем оси координат xy (рис. *а*) и составим уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = T_2 - Q_2 \sin 30° = 0,$$
$$\Sigma F_{ky} = N_2 - Q_2 \cos 30° - N_1 = 0. \qquad (1)$$

Из первого уравнения найдем

$$T_2 = Q_2 \sin 30° = 3 \text{ кН}.$$

Во втором уравнении две неизвестные: N_1 и N_2. Для их определения необходимо рассмотреть добавочно равновесие блока B.

Блок B (рис. *в*) находится в равновесии под действием трех сил: веса Q_1, реакции N_1, перпендикулярной плоскости OO_1, и натяжения троса T_1, параллельного OO_1. Составим уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = T_1 - Q_1 \sin 30° = 0,$$
$$\Sigma F_{ky} = N_1 - Q_1 \cos 30° = 0.$$

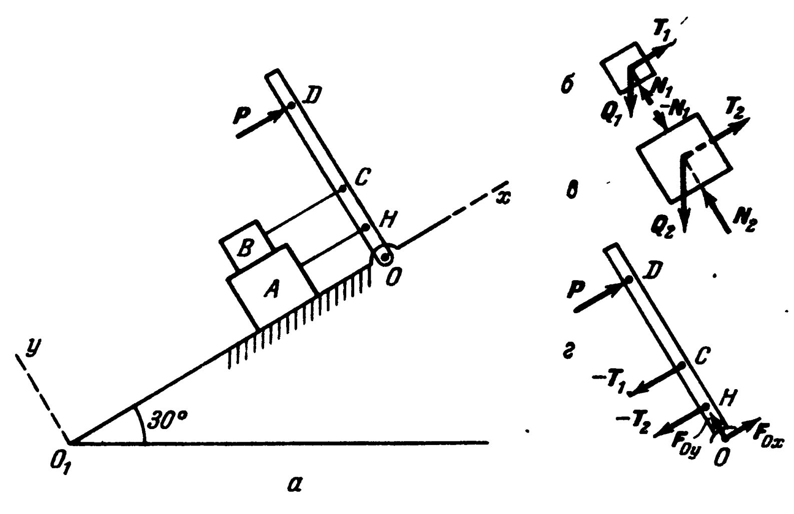
Отсюда находим

$$T_1 = Q_1 \sin 30° = 1{,}5 \text{ кН}, \quad N_1 = 1{,}5\sqrt{3} \text{ кН}.$$

Из второго уравнения системы (1) получим

$$N_2 = Q_2 \cos 30° + N_1 = 3\sqrt{3} + 1{,}5\sqrt{3} = 4{,}5\sqrt{3} \text{ кН}.$$

Зная натяжение тросов, рассмотрим равновесие рычага (рис. *г*), находящегося под действием сил: P, $-T_1$, $-T_2$ и реакции шарнира O, которую



К задаче 1.27

представим в виде ее проекций F_{Ox} и F_{Oy}. Уравнения равновесия для рычага будут

$$\Sigma F_{kx} = F_{Ox} + P - T_1 - T_2 = 0,$$

$$\Sigma F_{ky} = F_{Oy} = 0,$$

$$\Sigma m_O(F_k) = T_2 \cdot 8 + T_1 \cdot 16 - P \cdot 32 = 0.$$

Отсюда находим: $P \dfrac{8 \cdot 3 + 16 \cdot 1{,}5}{32} = 1{,}5$ кН, $F_{Ox} = T_1 + T_2 - P = 3$ кН.

Задача 1.28. В приборе (рис. *а*) тела A и B могут скользить по сторонам угла K; одна из сторон вертикальна, а другая образует угол 20° с горизонтом. Наклонная плоскость соприкосновения обоих тел составляет угол 40° с вертикалью. Сжатая пружина давит вниз с силой P = 100 Н на тело A.

Пренебрегая весом тел и предполагая, что все соприкасающиеся поверхности гладкие, найти горизонтальную силу Q, удерживающую систему в равновесии.

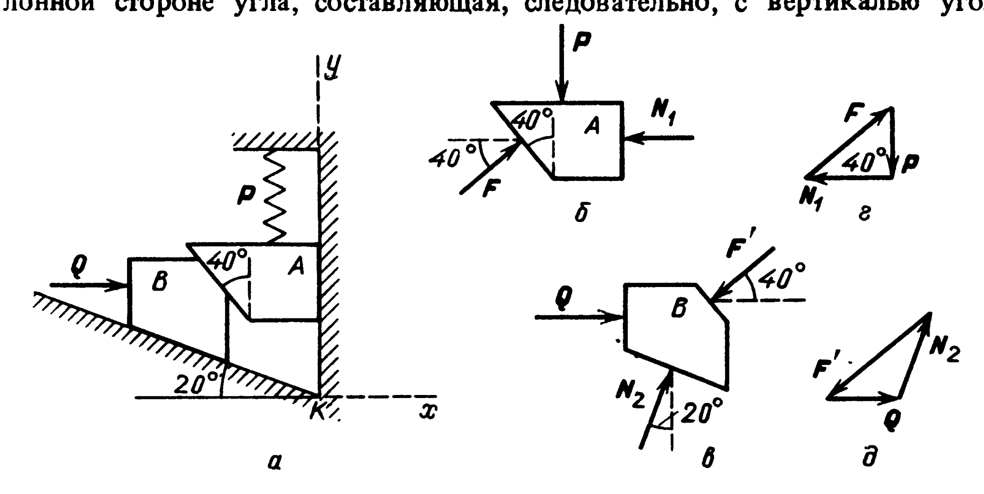
Р е ш е н и е. Отбросим мысленно стороны угла K и рассмотрим отдельно равновесие тела A и тела B. На тело A (рис. *б*) действуют три силы: давление пружины $\boldsymbol{P}$, направленное по вертикали вниз, реакция вертикальной стены N_1, направленная по горизонтали влево, и реакция $\boldsymbol{F}$ отброшенного тела B, перпендикулярная наклонной плоскости соприкосновения обоих тел. Линии действия этих сил пересекаются в одной точке, так как тело A находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости. Следовательно, для них достаточно составить два уравнения равновесия, приравняв нулю сумму проекций всех сил на оси x и y. Выберем оси так, как это показано на рис. *а*. Тогда

$$\Sigma F_{kx} = F \cos 40° - N_1 = 0,$$

$$\Sigma F_{ky} = F \sin 40° - P = 0.$$

Подставляя значение силы P, находим из уравнений $F = 155{,}8$ Н, $N_1 = 120$ Н.

На тело B (рис. *в*) действуют три силы: реакция $\boldsymbol{F}'$ тела A, равная известной уже силе $\boldsymbol{F}$, но направленная в соответствии с законом равенства действия и противодействия в противоположную сторону, неизвестная по величине горизонтальная сила Q и реакция N_2, перпендикулярная наклонной стороне угла, составляющая, следовательно, с вертикалью угол



К задаче 1.28

20°. Запишем для этих трех сил, пересекающихся в одной точке, два уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = Q + N_2 \sin 20° - F \cos 40° = 0,$$

$$\Sigma F_{ky} = N_2 \cos 20° - F \sin 40° = 0.$$

Подставляя в эти уравнения найденное ранее значение F, определяем остальные силы $Q = 83$ Н, $N_2 = 106$ Н.

Эта задача может быть решена другим способом. Тело A находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости. Строим на этих силах замкнутый силовой треугольник. Для этого откладываем силу P, известную по модулю и направлению (рис. *г*). Из ее конца проводим направление силы N_1 по горизонтали, а из начала силы P проводим направление силы F (под углом 40° к горизонтали). Из этого силового треугольника легко находятся неизвестные N_1 и F. Теперь можно построить силовой треугольник для трех сил, приложенных к телу B (рис. *д*). Их линии действия согласно теореме о трех непараллельных силах пересекаются в одной точке. Откладываем вначале силу F', равную по модулю и направленную противоположно силе F согласно закону о равенстве действия и противодействия. Из ее конца проводим направление силы Q (по горизонтали), а из ее начала – направление силы N_2 под углом 20° к вертикали. Из этого силового треугольника находятся неизвестные Q и N_2.

Задача 1.29. Две балки, AC и CD, соединенные шарниром C (рис. *а*), закреплены шарнирно в точке A, а в точках B и D опираются при помощи катков на горизонтальные направляющие.

Определить реакции опор A, B, D и усилие в шарнире C, если на балку действуют: пара сил с моментом M = 200 Н · м, сила P = 80 Н, сила Q = = 120 Н. Даны размеры: AE = 4 м, EB = 2 м, BC = 3 м, CH = HD = 2 м.

Р е ш е н и е. Система твердых тел состоит из двух балок. Рассмотрим равновесие каждой из балок отдельно. На балку AC действуют (рис. *б*): активная сила P и активная пара сил с моментом M. Кроме того, на балку наложены связи – шарниры A и C, подвижная опора B. Отбрасывая мысленно связи, заменяем их действие реакциями. Так как реакция шарнира A неизвестна по направлению и модулю, заменяем ее двумя составляющими R_{Ax} и R_{Ay}. Аналогично реакция шарнира C также изобразится двумя составляющими R_{Cx} и R_{Cy}. Реакцию опоры B представим вертикальной силой R_B. Рассмотрим, далее, равновесие балки AC как равновесие свободного твердого тела, находящегося под действием шести сил и одной пары сил. Выберем оси координат с началом в точке A; ось абсцисс направим по горизонтали вправо, ось ординат по вертикали вверх. Составим уравнения равновесия балки AC:

$$\Sigma F_{kx} = R_{Ax} + R_{Cx} = 0, \qquad (1)$$

$$\Sigma F_{ky} = R_{Ay} + R_B + R_{Cy} - P = 0, \qquad (2)$$

$$\Sigma m_A(F_k) = R_B \cdot AB + R_{Cy} \cdot AC - P \cdot AE - M = 0. \qquad (3)$$

Можно было бы вместо второго уравнения равновесия составить сумму моментов всех сил относительно точки C. В это уравнение вошли бы только две неизвестные силы R_{Ay} и R_B, так как линии действия остальных неизвестных сил пересекаются в точке C. Однако в обоих случаях уравнение

(1) является независимым от остальных уравнений и содержит два неизвестных; уравнения (2) и (3) связаны между собой и содержат три неизвестных.

Таким образом, из полученной системы ни одно из неизвестных не может быть определено. Рассмотрим поэтому равновесие второй балки *CD* (рис. *в*). На балку действует одна активная сила *Q*. Применяя закон освобождаемости от связей, заменим действие шарнира *C* и опоры *D* реакциями

К задаче 1.29

связей. Реакция R_D направлена по вертикали, перпендикулярно к горизонтальной плоскости, на которую опираются катки. Реакция шарнира *C* неизвестна по модулю и направлению. На основании закона равенства действия и противодействия составляющие этой реакции равны по модулю составляющим реакции шарнира, приложенным к балке *AC*, и направлены в прямо противоположные стороны (рис. *в*). Таким образом, имеем свободное твердое тело — балку *CD*, находящуюся в равновесии под действием пяти сил. Составим уравнения равновесия, выбрав оси координат с началом в точке *C*; ось абсцисс направим по балке вправо, ось ординат — вертикально вверх. Имеем

$$\Sigma F_{kx} = -R_{Cx} = 0, \qquad (4)$$

$$\Sigma F_{ky} = R_D - Q - R_{Cy} = 0, \qquad (5)$$

$$\Sigma m_C(F_k) = R_D \cdot CD - Q \cdot CH = 0. \qquad (6)$$

В этих трех уравнениях равновесия только одна новая неизвестная R_D. А всего в шести уравнениях равновесия шесть неизвестных. Из уравнений (4) и (1) следует:

$$R_{Cx} = R_{Ax} = 0.$$

Из уравнения (6) находим

$$R_D = Q \cdot \frac{CH}{CD} = 120 \cdot \frac{2}{4} = 60\ \text{Н},$$

а из (5) получаем

$$R_{Cy} = R_D - Q = 60 - 120 = -60\ \text{Н}.$$

Знак минус показывает, что в действительности направления составляющих R_{Cy} и R'_{Cy} противоположны принятым на рисунке.

Далее, из (3) имеем

$$R_B = P\frac{AE}{AB} + \frac{M}{AB} - R_{Cy}\frac{AC}{AB} = 80\cdot\frac{4}{6} + \frac{200}{6} + 60\cdot\frac{9}{6} = 176{,}6\ \text{Н}$$

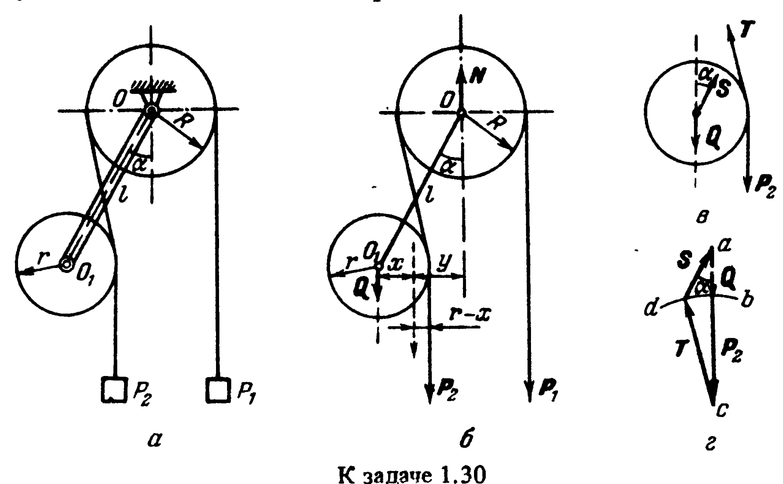
и, наконец, из (2) находим

$$R_{Ay} = P - R_B - R_{Cy} = 80 - 176{,}6 + 60 = -36{,}6\ \text{Н}.$$

Знак минус указывает, что и реакция R_{Ay} направлена не вверх, как предполагалось, а по вертикали вниз.

Эта задача может быть решена и другим путем. Можно рассмотреть равновесие балки CD и равновесие всей двухпролетной балки $ABCD$. Из уравнений равновесия для балки CD (4), (5) и (6) легко находятся реакции шарнира C и опоры D, так как эти три уравнения содержат три неизвестных: R_{Cx}, R_{Cy}, R_D. Рассматривая далее равновесие двухпролетной балки $ABCD$, составим три уравнения равновесия, из которых определяются три оставшихся неизвестных: R_{Ax}, R_{Ay}, R_B.

Задача 1.30. Через блок с неподвижной осью O и радиусом R (рис. *а*) перекинута нить, к концам которой подвешены два одинаковых груза



К задаче 1.30

P_1 и P_2. Правый конец нити свисает вертикально. Левый конец нити огибает блок с подвижной осью O_1 и радиусом r. Вес блока с подвижной осью Q. Ось нижнего блока насажена на конец стержня длиной l, другой конец которого закреплен на оси верхнего блока.

Пренебрегая весом стержня, определить угол α, который образует стержень с вертикалью в положении равновесия, и усилие в стержне OO_1. $P_1 = P_2 = 100$ Н, $Q = 40$ Н, $R = 4$ см, $r = 3$ см, $l = 10$ см.

Решение. Рассмотрим равновесие системы твердых тел, состоящей из двух блоков и стержня, соединяющего их центры (рис. *б*). Для этого мысленно отбросим ось O, поддерживающую верхний блок, и заменим ее реакцией N. Кроме того, на систему действуют внешние силы $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{Q}$. Реакция N вертикальна, так как все остальные силы заведомо вертикальны. Составим для данной системы параллельных сил два уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{iy} = N - P_1 - P_2 - Q = 0,$$

$$\Sigma m_O(F_i) = P_1 R - P_2(l \sin\alpha - r) - Ql \sin\alpha = 0.$$

Из первого уравнения определим реакцию N:

$$N = P_1 + P_2 + Q = 240 \text{ Н}.$$

Из второго уравнения находим угол α:

$$100 \cdot 4 - 100(10 \sin\alpha - 3) - 40 \cdot 10 \sin\alpha = 0,$$

откуда $\sin\alpha = 1/2$, $\alpha = 30°$.

Для определения усилия в стержне рассмотрим равновесие блока с подвижной осью. Он находится в равновесии под действием четырех сил (рис. *в*): веса $\boldsymbol{Q}$, двух равных по величине реакций нити $\boldsymbol{P}_2$ и $\boldsymbol{T}$, а также реакции невесомого стержня $\boldsymbol{S}$, направленной по стержню, но неизвестной по модулю. Таким образом, геометрическая сумма этих четырех сил должна быть равна нулю:

$$\boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{S} = 0.$$

Так как угол α известен и $T = P_2$, то проще всего модуль S определить графически, построением силового многоугольника. Отложим из точки a (рис. *г*) две вертикальные силы $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{P}_2$ в избранном для сил масштабе. Далее, из точки c, конца силы $\boldsymbol{P}_2$, как из центра, проведем дугу окружности радиусом, равным по величине $\boldsymbol{P}_2$. На этой дуге должен находиться конец силы $\boldsymbol{T}$ и начало силы $\boldsymbol{S}$, составляющей угол $\alpha = 30°$ с вертикалью. Проведя из точки a под углом 30° к вертикали прямую до пересечения с дугой окружности в точке d, соединим прямой точки d и c. Отрезок da и определит величину усилия в стержне. Измерив его в избранном для сил масштабе, находим, что усилие в стержне $S = 50$ Н.

Аналитическое определение усилия S можно получить, спроектировав все силы, образующие замкнутый силовой треугольник, на горизонтальную и вертикальную оси координат:

$$S \sin 30° - P_2 \sin\beta = 0,$$

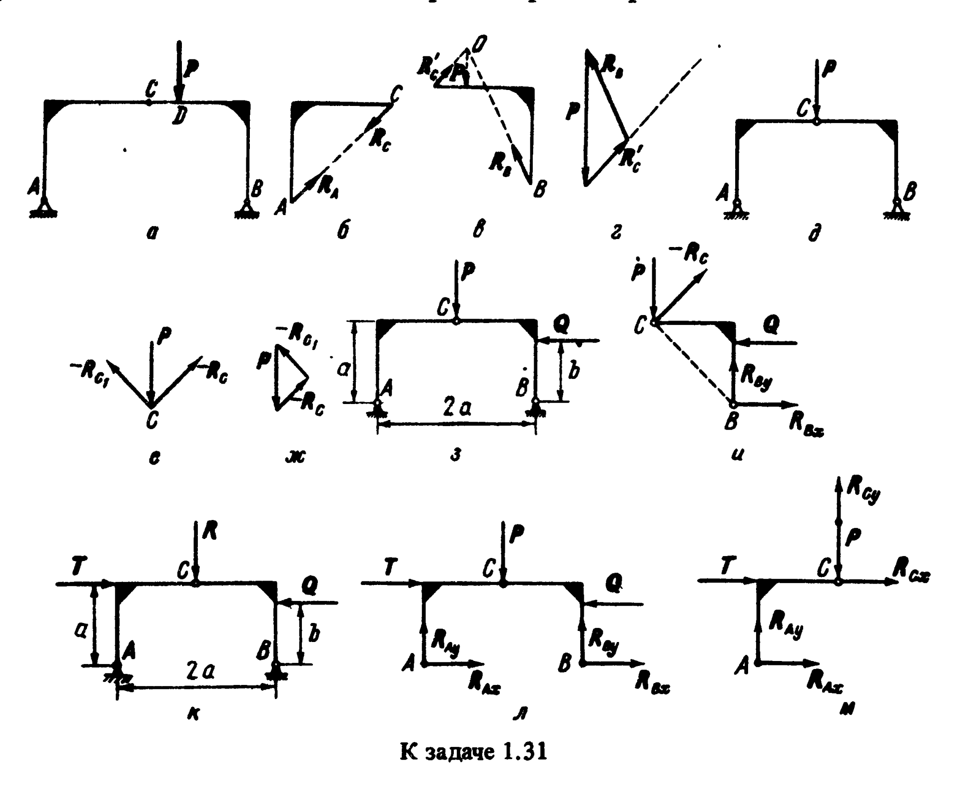
$$S \cos 30° + P_2 \cos\beta - P_2 - Q = 0.$$

Внося в эти уравнения известные значения P_2 и Q и решая их совместно, находим неизвестные $S = 50$ Н и угол $\beta = 14°30'$.

Задача 1.31. Арка состоит из двух жестких частей AC и BC (рис. *а*), соединенных шарниром C и прикрепленных к фундаменту шарнирными опорами A и B.

Определить реакции в шарнирах A, B, C, если в точке D приложена вертикальная сила $P = 10$ Н. Задачу решить графически.

Р е ш е н и е. Реакции шарниров A и B неизвестны по модулю и направлению. Следовательно, если рассматривать равновесие всей системы



К задаче 1.31

ACB, отбросив опоры A и B и заменив их действие реакциями, то число неизвестных будет равно четырем: R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Bx}, R_{By}, а уравнений равновесия будет три.

Рассмотрим поэтому отдельно равновесие левой части арки (рис. *б*). К этому твердому телу никаких активных сил не приложено. Применяя закон освобождаемости от связей, отбросим мысленно шарниры A и C и заменим их действие реакциями. Полуарка AC находится в равновесии под действием двух сил: R_A и R_C. Согласно второму закону статики эти силы должны быть равны по модулю и направлены по одной прямой в разные стороны. Так как одна сила приложена в точке A, а другая — в точке C, то общей линией действия этих сил будет AC.

Рассмотрим, далее, равновесие правой части BC арки. К ней приложена одна активная сила P. Освобождаясь мысленно от двух связей: шарниров B и C, заменяем их действие реакциями. Реакция R'_C на основании закона равенства действия и противодействия равна по модулю R_C и направлена в противоположную сторону по AC (рис. *в*). Направление реакции R_B может быть определено на основании теоремы о трех непараллельных силах. Действительно, часть BC находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости. Линии действия двух сил известны: они пересекаются в точке O. Согласно теореме о трех силах линия действия третьей силы, т.е. реакции R_B, должна также проходить через точку O. Три силы, P, R'_C, R_B, линии действия которых пересекаются в точке O, находятся в равновесии. Следовательно, они должны образовать замкнутый треугольник. Откладываем из произвольной точки (рис. *г*) силу P, известную по модулю и направлению. Из конца силы P проводим линию, параллельную AC, т.е. линии действия силы R'_C. Из начала силы P проводим линию, параллельную OB, т.е. линии действия силы R_B. Получаем замкнутый силовой треугольник, стороны которого и определяют в принятом для силы P масштабе величины искомых реакций: R'_C и R_B. Согласно ранее доказанному реакция шарнира A равна R'_C.

Решение задачи об определении реакций шарниров трехшарнирной арки осложняется, если среди активных сил, действующих на трехшарнирную арку, имеется одна сила, приложенная к шарниру C. Рассмотрим в этом случае трехшарнирную арку как составленную из трех тел: двух полуарок и шарнирного болта. Полуарки не соприкасаются друг с другом. Шарнирный болт соприкасается с каждой из них.

Рассмотрим три возможных варианта задачи.

1. В первом варианте (рис. *д*) активная сила P приложена к шарнирному болту, а к полуаркам никаких активных сил не приложено. В этом случае на левую полуарку, находящуюся в равновесии, действуют две равные силы R_A и R_C (рис. *б*), направленные по прямой AC в противоположные стороны. Совершенно аналогично на правую полуарку действуют две взаимно уравновешивающиеся силы R_B и R_{C_1}, направленные по прямой BC. Рассмотрим равновесие шарнирного болта C, к которому приложены три силы: сила P, реакции левой и правой полуарок $-R_C$, $-R_{C_1}$ (рис. *е*), причем сила P известна по модулю и направлению, а у реакций полуарок известны только линии действия. Строя замкнутый треугольник (рис. *ж*), находим реакции R_C, R_{C_1} и, следовательно, равные им реакции R_A, R_B.

2. Во втором варианте (рис. *з*) активные силы, кроме шарнирного болта C, приложены только к одной правой полуарке (сила Q). Рассмотрим равновесие левой полуарки (рис. *б*). Направление реакций R_C и R_A совпадает с прямой AC.

Далее, присоединяем шарнирный болт C вместе с приложенной к нему активной силой P к правой полуарке и рассматриваем ее равновесие (рис. *и*) под действием сил: P, Q, $-R_C$ и реакции R_B, которую раскладываем на две составляющие R_{Bx}, R_{By}.

Замечая, что $-R_C$ образует угол 45° с горизонталью, составляем три уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = R_C \cos 45^\circ - Q + R_{Bx} = 0,$$

$$\Sigma F_{ky} = R_C \sin 45^\circ - P + R_{By} = 0,$$

$$\Sigma m_B(F_k) = R_C a\sqrt{2} - P \cdot a - Q \cdot b = 0,$$

откуда и определяются все три неизвестные.

3. В третьем варианте (рис. *к*) активные силы приложены, кроме шарнирного болта, к обеим полуаркам.

В этом случае сначала определяем реакции шарниров A и B. Для этого рассмотрим равновесие всей арки, отбросив мысленно шарниры A и B и заменив их действие реакциями (рис. *л*). Три уравнения равновесия будут

$$\Sigma F_{kx} = T + R_{Ax} + R_{Bx} - Q = 0,$$

$$\Sigma F_{ky} = R_{Ay} + R_{By} - P = 0,$$

$$\Sigma m_A(F_k) = Q \cdot b - T \cdot a - P \cdot a + R_{By} \cdot 2a = 0.$$

В этих трех уравнениях четыре неизвестных: R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Bx}, R_{By}. Чтобы составить четвертое недостающее уравнение равновесия, рассмотрим равновесие любой полуарки (например, левой), присоединив к ней шарнирный болт с приложенной к нему силой P (рис. *м*). При этом составляем уравнение равновесия, в которое бы не входила реакция правой полуарки на болт. Таким уравнением равновесия будет равенство нулю суммы моментов всех сил относительно шарнирного болта C

$$\Sigma m_C(F_k) = R_{Ax} \cdot a - R_{Ay} \cdot a = 0.$$

Из этой системы четырех уравнений определяются R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Bx}, R_{By}. Далее, составляя остальные уравнения равновесия для левой полуарки, находим R_{Cx}, R_{Cy} — составляющие реакции правой полуарки на болт.

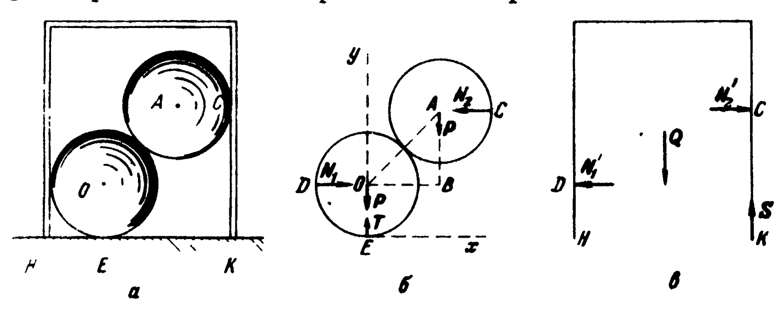
Для определения реакции левой полуарки на болт (она в этом случае не равна реакции на болт правой полуарки) необходимо рассмотреть отдельно равновесие правой полуарки.

Задача 1.32. Цилиндрический стакан радиусом R поставлен открытой стороной на гладкий горизонтальный пол. Внутри стакана находятся два одинаковых шара радиусом r и весом P каждый.

Определить вес Q цилиндрического стакана, при котором шары не опрокинут его. Стенки стакана абсолютно гладкие.

Р е ш е н и е. Для определения искомого веса стакана рассмотрим отдельно равновесие двух шаров (рис. *б*) и равновесие стакана (рис. *в*).

На систему двух шаров действуют силы: вес каждого шара P, приложенный в центре шара и направленный по вертикали вниз; реакция гладкого пола T, направленная по вертикали вверх; реакции стенок стакана N_1 и N_2, направленные по горизонтали и приложенные в точках D и C.



К задаче 1.32

Проведем оси координат: ось x горизонтально, ось y вертикально. Уравнения равновесия для системы, состоящей из двух шаров, имеют вид

$$\Sigma F_{kx} = N_1 - N_2 = 0, \tag{1}$$

$$\Sigma F_{ky} = T - 2P = 0, \tag{2}$$

$$\Sigma m_O(F_k) = N_2 \cdot AB - P \cdot OB = 0. \tag{3}$$

Третье уравнение – уравнение моментов – составлено относительно точки O, где пересекаются линии действия трех сил, в том числе двух неизвестных. Из первого уравнения следует:

$$N_1 = N_2 = N. \tag{4}$$

Из третьего уравнения находим

$$N_2 = \frac{P \cdot OB}{AB}. \tag{5}$$

Рассмотрим, далее, равновесие цилиндрического стакана (рис. *в*). На стакан действуют силы: вес Q по вертикали вниз, реакции шаров N_1' и N_2', приложенные в точках D и C, реакции пола в точках H и K. (Ясно, что $N_1' = N_1$ и $N_2' = N_2$.) В момент опрокидывания стакана, который мы рассматриваем, давление в точке H на пол и, следовательно, реакция пола обращаются в нуль и стакан опирается на горизонтальную плоскость только в точке K.

Составим уравнение моментов относительно точки K

$$\Sigma m_K(F_k) = N_2' \cdot CK - N_1' \cdot DH - Q \cdot R = 0. \tag{6}$$

Далее из (6), учитывая (4), имеем

$$N \cdot AB - Q \cdot R = 0.$$

Подставляя в это равенство значение N, определенное формулой (5), имеем

$$Q = N\frac{AB}{R} = \frac{P \cdot OB \cdot AB}{R \cdot AB} = \frac{P \cdot OB}{R};$$

но $OB = 2R - 2r$, и, следовательно, для равновесия необходимо, чтобы выполнялось неравенство

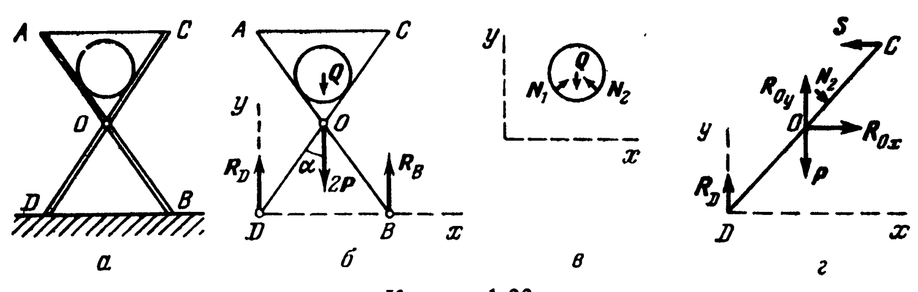
$$Q \geqslant 2P(1 - r/R)$$

(знак неравенства соответствует случаю, когда давление на горизонтальную плоскость будет распределяться по всему ободу).

Задача 1.33. Два однородных стержня AB и CD длиной $2l$ и весом P каждый опираются в точках D и B на гладкий горизонтальный пол и соединены посередине шарниром O. Концы стержней A и C соединены нитью. Между верхними половинами стержней лежит гладкий диск радиусом r и весом Q. Угол $DOB = 2\alpha$.

Определить натяжение нити.

Р е ш е н и е. Для нахождения реакций пола в точках D и B рассмотрим равновесие системы твердых тел (два стержня, скрепленных шарниром и нитью, и диск), отбросив мысленно пол и заменив его действие вертикальными реакциями R_D и R_B (рис. *б*). Кроме реакций пола, к системе твердых



К задаче 1.33

тел приложены: в центре диска его вес Q, в шарнире O вес стержней $2P$. Оси координат показаны на рисунке. Составляем два уравнения:

сумма проекций всех параллельных сил на вертикаль равна нулю:

$$\Sigma F_{ky} = R_D + R_B - 2P - Q = 0;$$

сумма моментов всех сил относительно точки D равна нулю:

$$\Sigma m_D(F_k) = R_B \cdot BD - (2P + Q)\frac{BD}{2} = 0.$$

Решая совместно эти уравнения, находим

$$R_D = R_B = P + Q/2.$$

Как и следовало ожидать, ввиду симметрии реакции пола равны между собой.

Рассмотрим, далее, равновесие диска, отбросив стержни и заменив их действие на диск реакциями N_1 и N_2 (рис. *в*). Реакции N_1 и N_2 соответственно перпендикулярны стержням AB и CD, так как трение между диском и стержнями по условию отсутствует. Следовательно, N_1 и N_2 образуют с горизонталью равные углы α. Кроме реакций, на диск действует сила тяжести Q. Линии действия всех трех сил пересекаются в центре диска. Напишем уравнения равновесия сил, приложенных к диску:

$$\Sigma F_{kx} = N_1 \cos\alpha - N_2 \cos\alpha = 0,$$

$$\Sigma F_{ky} = N_1 \sin\alpha + N_2 \sin\alpha - Q = 0.$$

Решая совместно эти два уравнения, имеем

$$N = N_1 = N_2 = \frac{Q}{2\sin\alpha}.$$

Таким образом, реакции стержней равны между собой по модулю, что очевидно и по соображениям симметрии.

Далее, рассмотрим равновесие одного из стержней, заменив действие пола известной реакцией R_D и давление диска найденной величиной N_2 (рис. *г*). На стержень, кроме того, действуют следующие силы: неизвестное по модулю натяжение нити S, неизвестная по модулю и направлению реакция шарнира O, которую представляем двумя составляющими R_{Ox} и R_{Oy}, и вес стержня P. Благодаря тому, что ранее были найдены реакции R_D и N_2, число неизвестных сил, действующих на стержень, равно трем, т.е. задача является статически определенной. Так как по условию требуется найти только натяжение нити, то достаточно составить одно уравнение равновесия, приравняв нулю сумму моментов всех сил относительно точки O:

$$\Sigma m_O(F_k) = Sl\cos\alpha - R_D l \sin\alpha - N_2 \frac{r}{\operatorname{tg}\alpha} = 0.$$

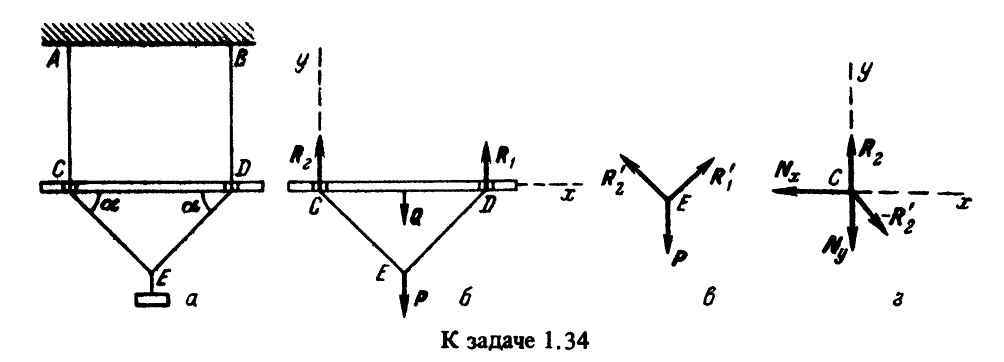
Отсюда

$$S = (P + 0{,}5\,Q)\operatorname{tg}\alpha + \frac{Qr}{2l\sin^2\alpha}.$$

Если бы нужно было найти составляющие реакции R_{Ox}, R_{Oy} шарнира O, то достаточно было бы составить сумму проекций всех сил (рис. *г*) на оси x и y и приравнять их нулю. Из этих уравнений найдутся составляющие реакций шарнира O.

Задача 1.34. Нить *AEB* прикреплена к потолку в точках *A* и *B* и пропущена через два отверстия в балке *CD* (рис. *а*). В середине *E* нити подвешен груз *P*. Вес балки *CD* равен *Q*. Расстояние *CD* между отверстиями в балке равно *AB*.

Полагая нить и балку абсолютно гладкими, определить угол α, образованный в положении равновесия балкой и нижними отрезками нити, натяжение нити и реакции между балкой и нитью в точках *C* и *D*.



К задаче 1.34

Р е ш е н и е. Для определения натяжения нити разрежем мысленно *AC* и *BD* и рассмотрим равновесие нижней части системы (рис. *б*) под действием веса груза *P*, веса балки *Q* и реакций нитей R_1 и R_2. Проведя оси координат (рис. *б*), составляем два уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{ky} = R_1 + R_2 - P - Q = 0,$$

$$\Sigma m_C(F_k) = R_1 \cdot CD - (Q + P)\,CD/2 = 0.$$

Решая совместно эти два уравнения, имеем

$$R_1 = R_2 = R = (P + Q)/2,$$

что, впрочем, очевидно вследствие симметрии системы.

Для нахождения угла α рассмотрим равновесие сил, приложенных к точке *E* (рис. *в*). Следует заметить, что натяжение во всех частях нити по модулю одно и то же, так как в точках *C* и *D*, где нить проходит через отверстия в балке, трение отсутствует. Если бы в этих точках между нитью и балкой существовало трение, то натяжения нити по разные стороны от отверстия были бы различны.

В точке *E* приложены вес *P* и натяжения R'_1 и R'_2 нитей, образующих угол α с горизонталью. Для определения угла α достаточно составить одно уравнение равновесия (сумма проекций всех сил на вертикаль равна нулю):

$$2R\sin\alpha - P = 0,$$

откуда

$$\sin\alpha = \frac{P}{P+Q}.$$

Второе уравнение равновесия (сумма проекций всех сил на горизонталь равна нулю) составлять нет необходимости, так как оно только вновь подтвердит ранее установленное равенство натяжений в левой и правой половинах нити $R_1' = R_2' = R$. Для определения реакции между балкой и нитью рассмотрим равновесие нити в точке C, отбросив балку и заменив ее действие реакцией, составляющие которой обозначим через N_x и N_y (рис. *г*). Кроме того, на нить в точке C действуют натяжения R_2 и $-R_2'$ отрезков нитей AC и EC. Составляем уравнения равновесия точки C:

$$\Sigma F_{kx} = R\cos\alpha - N_x = 0, \quad (1)$$

$$\Sigma F_{ky} = R - N_y - R\sin\alpha = 0. \quad (2)$$

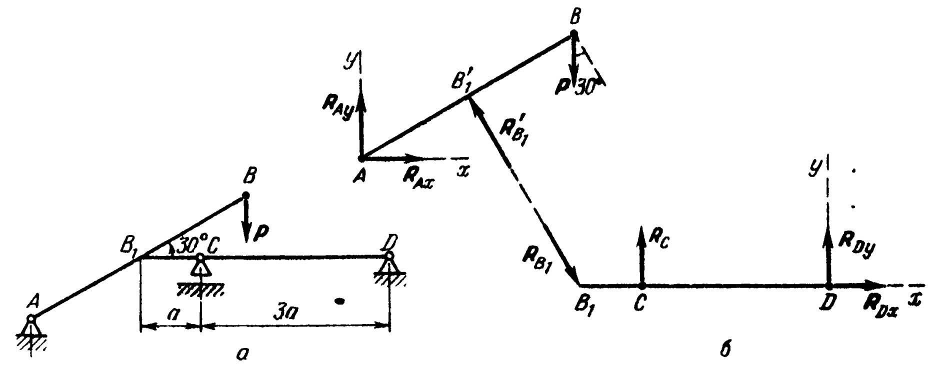
Из уравнения (2), подставляя найденные значения R и $\sin\alpha$, найдем

$$N_y = R(1 - \sin\alpha) = Q/2.$$

Уравнение (1) дает

$$N_x = 0{,}5\sqrt{Q^2 + 2PQ}.$$

Задача 1.35. Балка AB имеет неподвижную цилиндрическую опору A, а серединой B_1 опирается на ребро консоли балки CD, поддерживаемой



К задаче 1.35

двумя цилиндрическими опорами, подвижной и неподвижной (рис. *а*). Пренебрегая весом балок, определить опорные реакции цилиндрических опор при действии силы P, приложенной к концу балки AB. Трением между стержнями в точке B_1 пренебречь.

Р е ш е н и е. Система твердых тел состоит из двух балок. Рассмотрим равновесие каждой из балок отдельно. Балка B_1D находится в равновесии

под действием трех сил: реакции R_C подвижной опоры C, реакции R_D шарнирной неподвижной опоры D и реакции R_B, направленной перпендикулярно балке AB (рис. *б*). Сила R_B образует с вертикалью угол 30°, так как R_B перпендикулярна балке AB, а вертикаль перпендикулярна балке CD. Так как реакция шарнира D неизвестна по направлению и по величине, заменяем ее двумя составляющими R_{Dx} и R_{Dy}. Рассмотрим равновесие балки B_1D как равновесие твердого тела, находящегося под действием четырех сил. За начало координат примем точку D, ось абсцисс направим по горизонтали вправо, ось ординат – по вертикали вверх. Составим уравнения равновесия балки B_1D:

$$\Sigma F_{kx} = R_{B_1} \cos 60° + R_{Dx} = 0, \quad (1)$$

$$\Sigma F_{ky} = R_C + R_{Dy} - R_{B_1} \sin 60° = 0, \quad (2)$$

$$\Sigma m_{B_1}(F_k) = R_C a + R_{Dy} 4a = 0. \quad (3)$$

В случае плоской системы сил задача является статически определенной, если число алгебраических неизвестных не более трех. Следовательно, этих уравнений недостаточно. Рассмотрим поэтому равновесие второй балки AB. На балку действует одна активная сила P и реакции связей R_A и R'_{B_1} (рис. *б*). На основании закона равенства и противодействия ($R_{B_1} = -R'_{B_1}$, $R_{B_1} = R'_{B_1}$) можем записать уравнения равновесия для балки AB:

$$\Sigma F_{kx} = R_{Ax} - R_{B_1} \sin 30° = 0, \quad (4)$$

$$\Sigma F_{ky} = R_{Ay} + R_{B_1} \cos 30° - P = 0, \quad (5)$$

$$\Sigma m_A(F_k) = R_{B_1} \cdot AB'_1 - P\cos 30° \cdot AB = 0. \quad (6)$$

Всего в шести полученных уравнениях шесть неизвестных. Учитывая, что $AB'_1 = ½AB$, можем переписать уравнение (6) в следующем виде:

$$R_{B_1} \cdot AB'_1 - 2P\cos 30° \cdot AB'_1 = 0. \quad (7)$$

Из уравнения (7) следует

$$R_{B_1} = 2P\cos 30° = P\sqrt{3}.$$

После подстановки этого значения в (4) и (5) получаем

$$R_{Ax} = R_{B_1} \sin 30° = P\sqrt{3}/2,$$

$$R_{Ay} = P - R_{B_1} \cos 30° = P - P\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}/2 = -P/2.$$

Знак минус показывает, что составляющая R_{Ay} направлена не вверх, как предполагалось, а вниз по вертикали. Величина R_A равна геометрической сумме ее составляющих:

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{(P\sqrt{3}/2)^2 + (-P/2)^2} = P.$$

Далее, из (1) находим

$$R_{Dx} = -R_{B_1} \cos 60° = -P\sqrt{3}/2.$$

Так как из (3) имеем

$$R_C = -4R_{Dy}, \qquad (8)$$

то можно записать после подстановки в уравнение (2)

$$R_{Dy} = R_{B_1} \sin 60° / -3 = -P/2.$$

Знак минус показывает, что в действительности направления составляющих R_{Dx} и R_{Dy} противоположны принятым на рисунке. Величина R_D равна геометрической сумме ее составляющих:

$$R_D = \sqrt{R_{Dx}^2 + R_{Dy}^2} = \sqrt{(-P\sqrt{3}/2)^2 + (-P/2)^2} = P.$$

Теперь из выражения (8) определим реакцию R_C:

$$R_C = -4R_{Dy} = 2P.$$

Задача 1.36. Человек весом $Q = 600$ Н удерживается в равновесии на доске весом $P = 400$ Н с помощью веревки, перекинутой через два блока, как показано на рис. *а*. С какой силой F человек должен тянуть веревку, чтобы удержать доску в горизонтальном положении? Как далеко может пройти по доске второй человек, весящий также 600 Н, чтобы первый еще мог удержать систему в равновесии?

Решение. Составляем расчетную схему для первого случая.

Человек, натягивающий веревку, давит на доску с силой, меньшей, чем его вес, на величину усилия F, приложенного к веревке:

$$R_B = Q - F.$$

В середине доски C приложен вес доски P. Усилие, приложенное к веревке, меняет свое направление благодаря двум блокам. В точке D к доске приложена сила F, направленная вверх. Составляем уравнение моментов сил относительно точки A (рис. *б*):

$$-P \cdot AC + F \cdot AD - (Q - F)AB = 0.$$

Подставляя сюда числовые значения, находим силу, с которой человек тянет за веревку:

$$F = 500 \text{ Н}.$$

Составляем расчетную схему для второго случая. Теперь человек, натягивающий веревку, нависает на ней всей тяжестью, обеспечивая в точке D максимальную силу $F_{max} = Q$, направленную вверх. Обозначим расстояние, которое сможет пройти по доске второй человек, через x. Составляем уравнение моментов относительно точки A:

$$-Q \cdot x - P \cdot AC + Q \cdot AD = 0.$$

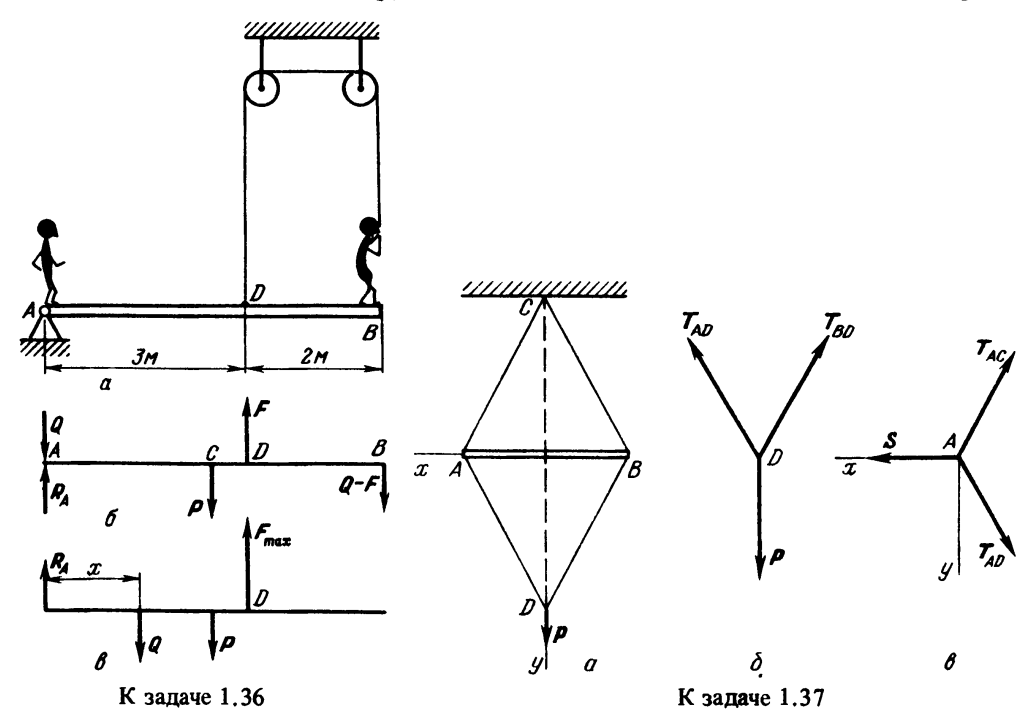
Подставим сюда числовые значения:

$$-600x - 400 \cdot 2{,}5 + 600 \cdot 3 = 0.$$

Находим

$$x = 1{,}33 \text{ м}.$$

Задача 1.37. Невесомый брус AB длиной 2 м подвешен в точке C посредством двух невесомых нитей длиной 2 м каждая. К брусу при помощи таких же нитей подвешен груз D весом 1 кН. Найти силы, сжимающие брус.



К задаче 1.36 К задаче 1.37

Р е ш е н и е. Рассмотрим вначале равновесие груза D (рис. *а*). Для этого разрежем мысленно нити AD и BD, заменив их действие реакциями T_{AD} и T_{BD}, направленными по соответствующим нитям. Силы, приложенные к точке D, показаны на рис. *б*. Составим уравнения равновесия сил, приравняв нулю суммы проекций сил на оси x и y:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \qquad T_{AD} \sin\alpha - T_{BD} \sin\alpha = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \qquad P - T_{AD} \cos\alpha - T_{BD} \cos\alpha = 0, \tag{2}$$

где буквой α обозначен угол, образованный нитями с вертикалью. Из первого уравнения следует

$$T_{AD} = T_{BD}.$$

Из второго уравнения затем находится эта реакция. Натяжение нитей

$$T_{AD} = T_{BD} = \frac{P}{2\cos\alpha} = \frac{1}{2\cos 30^\circ}. \qquad (3)$$

Переходим к определению силы, сжимающей брус. Отбросим мысленно брус AB и разрежем нити AD и AC, заменив их действие реакциями (рис. *в*). Рассмотрим далее равновесие точки A. К этой точке приложены: известная сила – натяжение нити T_{AD} и две неизвестные силы – натяжение нити T_{AC} и сила S. Составляем уравнение равновесия сил:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad S - T_{AD}\cos 60^\circ - T_{AC}\cos 60^\circ = 0, \qquad (4)$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad T_{AD}\cos 30^\circ - T_{AC}\cos 30^\circ = 0. \qquad (5)$$

Из уравнения (5) имеем $T_{AC} = T_{AD}$. Следовательно,

$$T_{AD} = T_{AC} = \frac{1}{2\cos 30^\circ}.$$

Далее из уравнения (4) находим

$$S = P\,\mathrm{tg}\,30^\circ = 1\ \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}577 \text{ кН}.$$

Задача 1.38. Два цилиндрических ролика весом P_1 и P_2 соединены невесомым нерастяжимым стержнем M_1M_2. Ролики могут перемещаться без трения по гладким наклонным стенкам AB и AC прямоугольного паза. Стенка AB наклонена к горизонту под углом α.

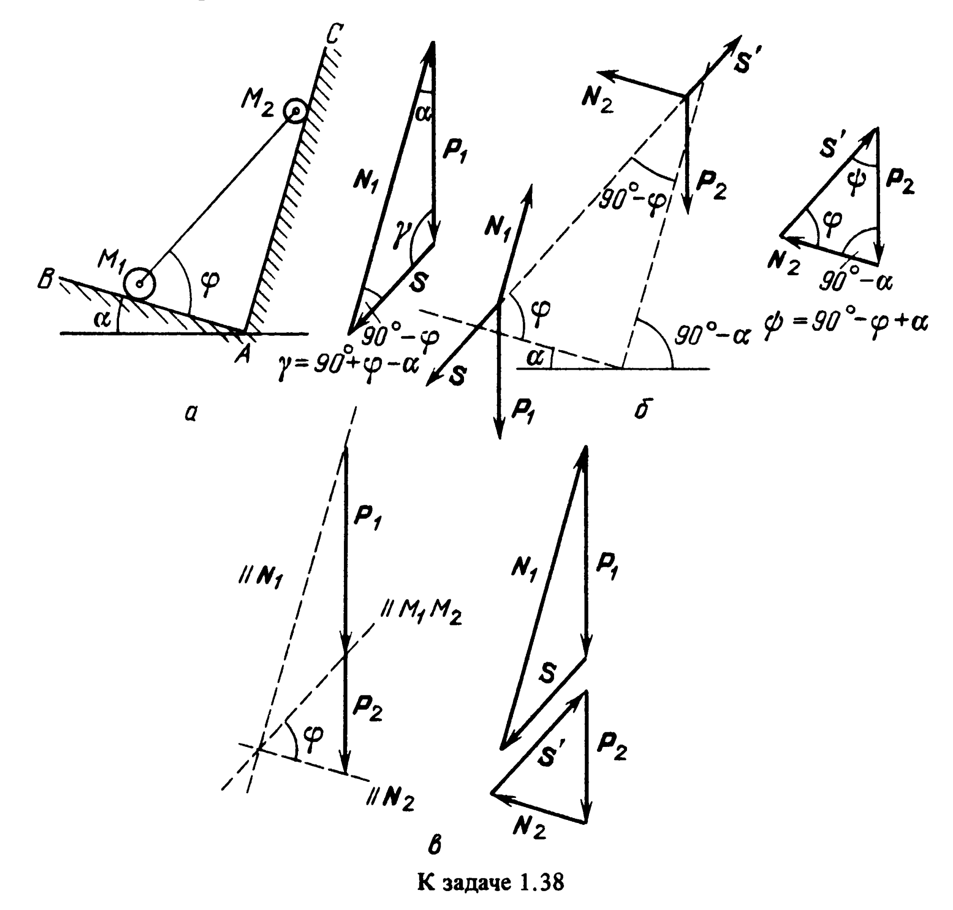
Какой угол φ составляет стержень M_1M_2 со стенкой AB, когда система занимает положение равновесия?

Определить также силы давления роликов на стенки и усилие в стержне M_1M_2 при равновесии.

Решение. По условию два ролика, соединенные невесомым стержнем, находятся в равновесии. Следовательно, каждый ролик находится в равновесии. Для определения требуемых в задаче величин рассмотрим равновесие каждого из роликов в отдельности.

Обратимся сначала к ролику M_1. На него действует одна активная сила – сила тяжести P_1. Перемещение ролика ограничено двумя связями –

гладкой наклонной стенкой AB и неизменяемым стержнем M_1M_2. Применим закон освобождаемости от связей, мысленно отбросим связи и заменим их действие реакциями: реакцией N_1, направленной перпендикулярно наклонной стенке AB, и реакцией S, которую направляем вдоль стержня. Действительно, если отбросить мысленно ролики и заменить их действие силами, то стержень будет находиться в равновесии под действием двух



К задаче 1.38

сил. Следовательно, эти силы равны и направлены по стержню в противоположные стороны. Выбор направления S – из точки M_1 в сторону, противоположную отрезку M_1M_2, – может быть сделан из следующих соображений: во-первых, при построении рис. *б*, проведя в точке M_1 силу P_1 вертикально вниз и реакцию N_1 вправо вверх, мы сразу видим, что S для равновесия следует направить только влево вдоль стержня; во-вторых, на рис. *а* видим, что стержень стеснен стенками AB и AC и его напряженное состояние может быть только сжатием.

Итак, ролик M_1 находится в равновесии под действием трех сил, $\boldsymbol{P}_1$, N_1 и S. По теореме о трех силах они должны образовывать замкнутый треугольник. Зная силу $\boldsymbol{P}_1$, мы могли бы построить силовой треугольник, проведя через концы вектора $\boldsymbol{P}_1$ штриховые линии, параллельные реакциям N_1 и S, до их пересечения, но здесь нас останавливает то, что мы не знаем направления стержня при равновесии (мы должны определить угол φ), и значит, не знаем точно, под каким углом к $\boldsymbol{P}_1$ надо провести вторую штриховую линию. Из этого затруднительного положения можно выйти, рассмотрев равновесие ролика M_2.

К ролику M_2 приложена активная сила $\boldsymbol{P}_2$ и две реакции связей: нормальная реакция N_2, направленная перпендикулярно стенке AC, и реакция стержня M_1M_2. Реакция $\boldsymbol{S}'$ стержня на ролик M_2 равна усилию в стержне и, следовательно, равна модулю реакции $\boldsymbol{S}$ стержня на ролик M_1. Векторы же $\boldsymbol{S}'$ и $\boldsymbol{S}$ направлены противоположно (см. рис. *в*). Ролик M_2 находится в равновесии под действием трех сил $\boldsymbol{P}_2$, N_2 и $\boldsymbol{S}'$. Согласно теореме о трех силах они должны составить замкнутый треугольник. Зная силу $\boldsymbol{P}_2$, мы могли бы построить силовой треугольник, проведя через концы вектора $\boldsymbol{P}_2$ штриховые линии, параллельные N_2 и $\boldsymbol{S}'$. И опять перед нами встает препятствие – незнание точного направления стержня.

Воспользуемся следующими двумя соображениями:

1) сторона $\boldsymbol{S}$ в силовом треугольнике для ролика M_1 и сторона S' в силовом треугольнике для ролика M_2 совпадают по направлению и отличаются лишь направлением стрелки вектора. Если треугольники сблизить сторонами $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{S}'$, то эти стороны сольются;

2) безразлично, в каком порядке – через начало или конец известного вектора – провести ту или иную штриховую линию.

Проведем теперь построение, опираясь на наши пока неполные знания о направлениях сторон треугольников.

Построим в выбранном масштабе силу $\boldsymbol{P}_1$. Через ее начало проведем штриховую линию, параллельную N_1. Вплотную к концу вектора $\boldsymbol{P}_1$ проведем вектор силы $\boldsymbol{P}_2$ в том же масштабе. Через конец вектора $\boldsymbol{P}_2$ проведем штриховую линию, параллельную реакции N_2. Пересечение двух штриховых линий определит в одной точке сразу две недостающие вершины двух разных силовых треугольников. Из этой точки проведем – пока также штрихами – линию в точку стыка $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$.

Теперь можно раздвинуть получившиеся два силовых треугольника и в каждом из них расставить стрелки так, чтобы треугольники замкнулись.

Графическая часть решения закончена. Длины неизвестных сторон и искомый угол φ можно получить из рисунка с помощью линейки и транспортира, если длины векторов $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$ и направления N_1 и N_2 выдержаны точно.

Можно решить треугольник и аналитически. Проведем такое аналитическое решение. Запишем теорему синусов для силового треугольника

(рис. *б*):

$$\frac{P_1}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{S}{\sin\alpha} = \frac{N_1}{\sin(90^\circ + \varphi - \alpha)}$$

или

$$\frac{P_1}{\cos\varphi} = \frac{S}{\sin\alpha} = \frac{N_1}{\cos(\varphi - \alpha)}. \tag{1}$$

В (1) содержится два уравнения, а неизвестных три: реакция N_1, усилие S и угол φ.

Запишем теперь теорему синусов для силового треугольника на рис. *в*, учитывая, что модули векторов $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{S}'$ равны,

$$\frac{P_2}{\sin\varphi} = \frac{S}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{N_2}{\sin(90^\circ - \varphi + \alpha)},$$

или иначе

$$\frac{P_2}{\sin\varphi} = \frac{S}{\cos\alpha} = \frac{N_2}{\cos(\varphi - \alpha)}. \tag{2}$$

В (2) также содержится два уравнения, но по сравнению с (1) имеется только одна новая неизвестная – реакция N_2. Перепишем (1) и (2) в виде системы четырех уравнений:

$$P_1 \sin\alpha = S\cos\varphi, \tag{3}$$

$$P_1 \cos(\varphi - \alpha) = N_1 \cos\varphi, \tag{4}$$

$$P_2 \cos\alpha = S \sin\varphi, \tag{5}$$

$$P_2 \cos(\varphi - \alpha) = N_2 \sin\varphi. \tag{6}$$

Сначала решим уравнения (3) и (5): разделим (5) на (3)

$$\frac{P_2}{P_1} \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi. \tag{7}$$

Возведем обе части (3) и (5) в квадрат и сложим уравнения:

$$P_1^2 \sin^2\alpha + P_2^2 \cos^2\alpha = S^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi).$$

Отсюда получаем

$$S = \sqrt{P_1^2 \sin^2\alpha + P_2^2 \cos^2\alpha}. \tag{8}$$

Теперь, когда мы определили угол φ равенством (7), можно из (4) и (6)

найти реакции стенок AB и AC:

$$N_1 = P_1 \frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\cos\varphi} = P_1 \frac{\cos\varphi\cos\alpha + \sin\varphi\sin\alpha}{\cos\varphi} = P_1\cos\alpha + P_1\,\mathrm{tg}\varphi\sin\alpha.$$

Воспользовавшись (7), получаем

$$N_1 = P_1\cos\alpha + P_1\frac{P_2}{P_1}\,\mathrm{ctg}\,\alpha\sin\alpha = P_1\cos\alpha + P_2\cos\alpha = (P_1 + P_2)\cos\alpha. \quad (9)$$

Из (6) имеем

$$N_2 = \frac{P_2\cos(\varphi - \alpha)}{\sin\varphi}.$$

После небольших преобразований и подстановки $\mathrm{tg}\,\alpha$ получаем

$$N_2 = (P_1 + P_2)\sin\alpha. \quad (10)$$

Эту задачу можно решить также методом проекций. Рассмотрим рис. *б*, на котором построены расчетные схемы для обоих роликов. Каждый из роликов находится в равновесии под действием плоской системы сходящихся сил. Условием равновесия являются два уравнения проекций на декартовы координатные оси. Выберем вершину A за начало координат. Ось x направим вдоль стенки AC, ось y — вдоль стенки AB.

Для системы сил, приложенных к ролику M_1, получаем уравнения:

$$\Sigma F_{kx} = N_1 - P_1\cos\alpha - S\cos(90^\circ - \varphi) = 0,$$

$$\Sigma F_{kx} = S\cos\varphi - P_1\sin\alpha = 0.$$

Для системы сил, приложенных к ролику M_2, уравнения имеют вид

$$\Sigma F_{kx} = S'\cos(90^\circ - \varphi) - P_2\sin(90^\circ - \alpha) = 0,$$

$$\Sigma F_{ky} = N_2 - S'\cos\varphi - P_2\cos(90^\circ - \alpha) = 0.$$

Учитывая равенство модулей реакций стержня, имеем $S' = S$. Перепишем уравнения равновесия в виде

$$N_1 - P_1\cos\alpha - S\sin\varphi = 0, \quad (11)$$

$$S\cos\varphi - P_1\sin\alpha = 0, \quad (12)$$

$$S\sin\varphi - P_2\cos\alpha = 0, \quad (13)$$

$$N_2 - S\cos\varphi - P_2\sin\alpha = 0. \quad (14)$$

Сложим (11) и (13):

$$N_1 - P_1\cos\alpha - P_2\cos\alpha = 0.$$

Отсюда получаем совпадающее с (9) значение реакции стенки AB, равное

силе давления ролика M_1 на стенку AB:

$$N_1 = (P_1 + P_2)\cos\alpha.$$

Сложим теперь (12) и (14) и получим значение реакции стенки AC, равное силе давления ролика M_2 на стенку AC:

$$N_2 = (P_1 + P_2)\sin\alpha.$$

Такая формула для N_2 получена нами выше (10). Перепишем (12) и (13) в виде

$$S\cos\varphi = P_1 \sin\alpha,$$

$$S\sin\varphi = P_2 \cos\alpha.$$

Если второе из этих уравнений разделить на первое, то получим формулу (7)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{P_2}{P_1} \operatorname{ctg}\alpha,$$

а если обе части уравнений возвести в квадрат и потом сложить, то получим

$$S^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = P_1^2 \sin^2\alpha + P_2^2 \cos^2\alpha,$$

откуда, извлекая корень, находим формулу (8)

$$S = \sqrt{P_1^2 \sin^2\alpha + P_2^2 \cos^2\alpha}.$$

Указание. Для приобретения навыков в решении задач на равновесие системы твердых тел рекомендуется решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 3.34–3.37, 4.34, 4.35, 4.38, 4.49, 4.50, 4.53, 4.56, 4.58, 4.59.

§ 4. РАВНОВЕСИЕ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

1. Равновесие твердого тела при наличии трения скольжения. Силы *трения скольжения* возникают между шероховатым телом и шероховатой поверхностью, если равнодействующая активных сил $\boldsymbol{R}$ не направлена по нормали к поверхности, на которой покоится тело (рис. 1.36). При равновесии тела необходимо, чтобы реакция шероховатой поверхности $\boldsymbol{S}$ (рис. 1.37) равнялась по модулю $\boldsymbol{R}$ и была направлена в противоположную сторону. Разложим активную силу $\boldsymbol{R}$ на нормальную составляющую $\boldsymbol{N}$ и касательную составляющую $\boldsymbol{T}$, реакцию шероховатой поверхности $\boldsymbol{S}$ на нормальную составляющую $\boldsymbol{N}_1$ и касательную составляющую $\boldsymbol{F}$, называемую *силой трения скольжения* или *силой трения первого рода*. При равновесии

должны соблюдаться равенства

$$N - N_1 = 0, \qquad (1^*)$$

$$T - F = 0. \qquad (2^*)$$

Из опыта известно, что при изменении составляющей T в определенных пределах равновесие тела не нарушается. Следовательно, и сила трения скольжения согласно уравнению (2*) будет меняться в этих пределах.

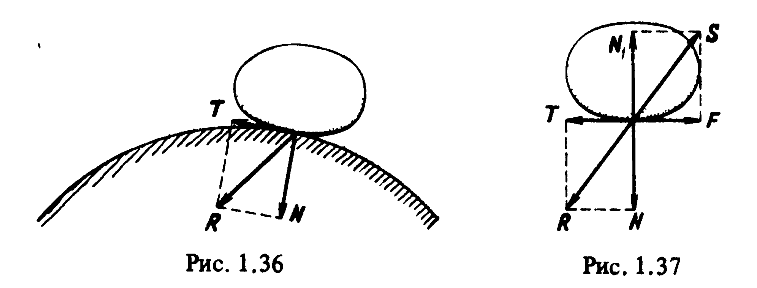


Рис. 1.36

Рис. 1.37

Таким образом, сила трения скольжения при покое есть составляющая реакции связи, возникающая при действии активных сил, стремящихся сдвинуть тело. Эта составляющая реакции направлена в сторону, противоположную возможному движению тела. Под *возможным движением* следует понимать скольжение точки соприкосновения движущегося тела по общей касательной с соприкасающейся точкой второго тела. На рис. 1.36 направление возможного движения совпадает с направлением силы T. Сила трения может меняться от нуля до некоторого предела, в зависимости от модуля и направления активных сил, с тем чтобы воспрепятствовать перемещению тела. Отличие силы трения от других реакций связей заключается в том, что ее модуль не может превысить определенного предела.

Зависимость между силой трения и нормальным давлением определяется *законом Кулона*: наибольшая сила трения скольжения пропорциональна нормальному давлению тела на поверхность

$$F_{\max} = fN. \qquad (3^*)$$

Сила трения определяется формулой

$$F \leqslant fN.$$

Трение скольжения впервые экспериментально изучал французский ученый Амонтон (1663–1705). Он установил независимость силы трения от площади поверхности соприкосновения тел. Законы трения скольжения были сформулированы французским физиком Кулоном (1736–1806) спустя сто лет. Сила трения всегда направлена в сторону, противоположную возможному относительному движению.

Постоянная f называется *коэффициентом трения скольжения*. Экспериментально установлено, что этот коэффициент зависит от материала соприкасающихся тел и их шероховатости (чистоты обработки). Для абсолютно гладких тел коэффициент f равен нулю. Для реальных тел

$$f > 0. \qquad (4^*)$$

Коэффициент трения не зависит от силы нормального давления и площади соприкосновения*).

Угол φ между нормалью к поверхности и полной ее реакцией в положении предельного равновесия, когда $F = F_{max}$, называется *углом трения* (рис. 1.38). Этот угол определяется равенством

$$\operatorname{tg}\varphi = f, \quad \text{т.е.} \quad \varphi = \operatorname{arctg} f. \qquad (5^*)$$

Построим в точке соприкосновения нормаль к поверхности и прямую OA, составляющую с ней угол φ. Конус, описанный этой прямой как образующей, называется *конусом трения*.

Если линия действия равнодействующей активных сил, приложенных к твердому телу, лежит внутри конуса трения, то вне зависимости от ее модуля тело останется в покое. Это объясняется тем, что в этом случае движущая сила будет меньше предельной силы трения.

Действительно, рассмотрим равновесие тела, находящегося на горизонтальной плоскости S (рис. 1.39). К телу приложена равнодействующая активных сил Q под углом α к нормали (вес тела входит в Q).

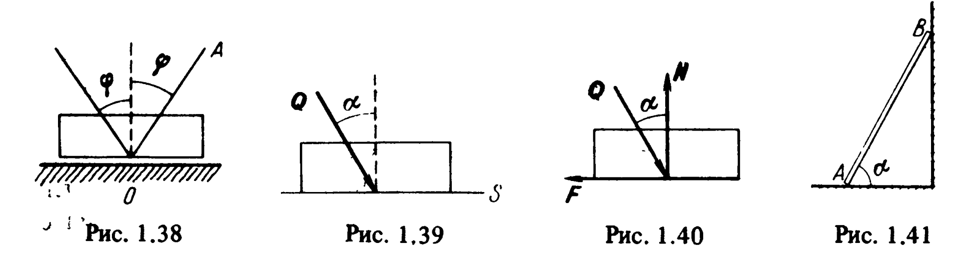


Рис. 1.38 Рис. 1.39 Рис. 1.40 Рис. 1.41

Коэффициент трения скольжения $f = \operatorname{tg}\varphi$ известен. Полагая $\alpha < \varphi$, составим уравнение равновесия, приравняв нулю сумму проекций всех сил на направление нормали (рис. 1.40):

$$N - Q\cos\alpha = 0 \quad \text{или} \quad N = Q\cos\alpha. \qquad (6^*)$$

Проектируя все силы на горизонтальное направление, находим

$$Q\sin\alpha - F = 0 \quad \text{или} \quad Q\sin\alpha = F. \qquad (7^*)$$

*) В последнее время экспериментально установлено, что с изменением нормального давления и площади соприкосновения коэффициент трения незначительно меняется. Этим изменением мы будем пренебрегать.

Замечая, что наибольшее значение силы трения равно

$$F_{max} = fQ\cos\alpha, \quad (8^*)$$

и учитывая, что $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\varphi$, заключаем

$$Q\sin\alpha < fQ\cos\alpha. \quad (9^*)$$

Следовательно, сила Q, линия действия которой находится внутри конуса трения, не может сдвинуть тело с места, как бы велика она ни была. На этом свойстве основаны некоторые самотормозящиеся устройства.

Если из Q выделить вес тела P, то неравенство (9*) примет вид

$$Q_1\sin\alpha < f(P + Q_1\cos\alpha). \quad (10^*)$$

Следовательно, сила Q_1 не может нарушить равновесие тела при

$$f = \operatorname{tg}\varphi > \frac{Q_1\sin\alpha}{P + Q_1\cos\alpha}. \quad (11^*)$$

Сила трения может принимать различные значения от нуля до наибольшего. Поэтому уравнения равновесия твердого тела, которые выражались равенствами [§ 2, уравнения (1*), (2*), (3*)], при наличии сил трения превращаются в неравенства. В связи с этим при решении задач, как правило, рассматривают наибольшее значение силы трения и находят при этом из уравнений равновесия предельные (наибольшие и наименьшие) значения искомых величин.

Так, например, рассматривая равновесие лестницы AB (рис. 1.41), опирающейся на гладкую стену и шероховатый пол, мы найдем наименьшее значение угла α, при котором лестница будет в покое, если возьмем максимальное значение силы трения. Положений равновесия лестницы будет при этом бесчисленное множество, так как при любом значении угла α, большем найденного, но меньшем 90°, для равновесия необходима сила трения меньшая, чем ее максимальное значение.

Указание. При решении задач на равновесие твердого тела при наличии сил трения следует выполнить четыре первых пункта, указанных в начале книги, на с. 16. При этом следует реакцию шероховатой поверхности представить двумя составляющими – нормальной реакцией и силой трения, или же, не раскладывая эту реакцию на составляющие, направить ее под углом трения φ к нормали к поверхности (при максимальной силе трения);

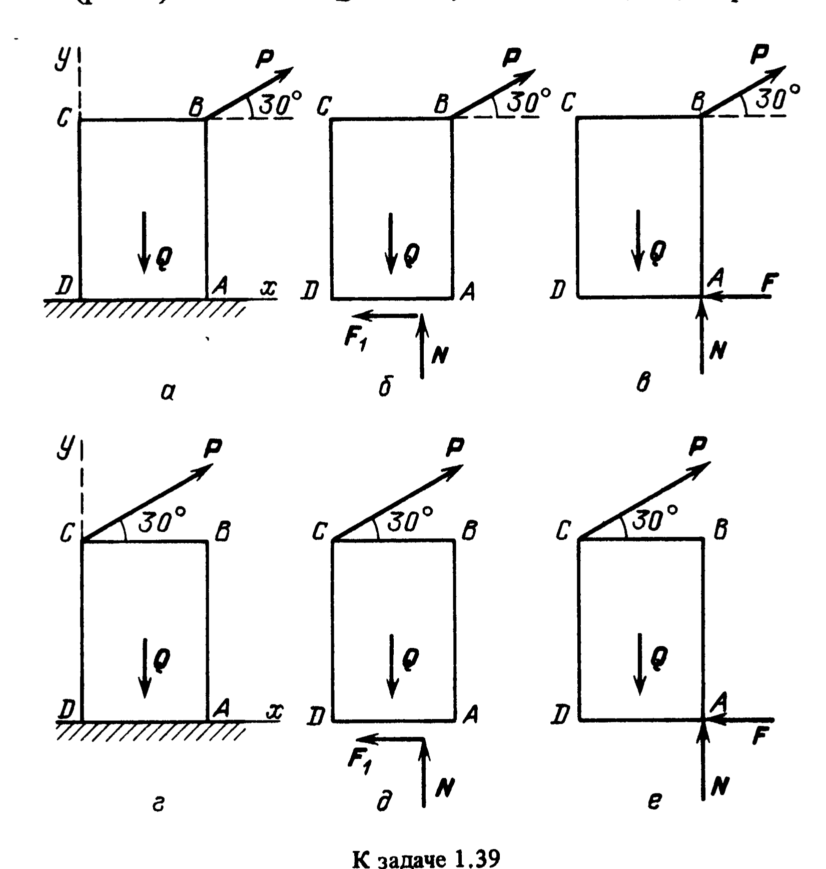
5) сопоставить число неизвестных величин и число независимых уравнений равновесия, которые должны быть равны для статически определенных задач; при этом к уравнениям равновесия твердого тела следует добавить зависимость силы трения от нормального давления (3*);

6) выбрать систему координат;

7) составить систему уравнений равновесия для сил, приложенных к твердому телу или к системе твердых тел;

8) решив систему уравнений равновесия, определить искомые величины.

Задача 1.39. Определить модуль силы P, при которой начнется движение блока (рис. *а*). Вес блока $Q = 2$ кН, высота $h = 0{,}8$ м, ширина $b = 0{,}6$ м.



К задаче 1.39

Сила P, приложенная в точке B, образует угол 30° с горизонтом. Коэффициент трения между блоком и горизонтальным полом $f = 0{,}2$. Решить эту же задачу, если сила P приложена в точке C (рис. *г*).

Решение. *Вариант* 1 (рис. *а*). Движение блока может начаться в двух случаях: а) если начнется скольжение блока по плоскости вправо (рис. *б*) и б) если блок начнет опрокидываться вокруг ребра (рис. *в*).

Рассмотрим первый случай. В этом случае точка приложения реакции пола N неизвестна. Составим уравнения равновесия — приравняем суммы

проекций всех сил на оси координат (рис. *б*) нулю

$$\Sigma F_{kx} = P\cos 30° - F_1 = 0,$$

$$\Sigma F_{ky} = N + P\sin 30° - Q = 0.$$

Кроме того, учтем зависимость силы трения от нормального давления

$$F_1 = fN.$$

Определим из данной системы уравнений силу P. Исключая силы F_1 и N, находим

$$P = \frac{fQ}{\cos 30° + f\sin 30°} = \frac{0{,}4}{0{,}965} = 0{,}415 \text{ кН}.$$

Если величина силы P станет больше этого значения, то блок начнет скользить вправо.

Рассмотрим второй случай. В случае возможного опрокидывания блока вокруг ребра A нормальная реакция N и сила трения $\boldsymbol{F}$ будут приложены в точке A (рис. *в*).

Составим три уравнения равновесия и четвертое уравнение — зависимость силы трения от нормального давления:

$$\Sigma F_{kx} = P\cos 30° - F = 0, \qquad (1)$$

$$\Sigma F_{ky} = N - Q + P\sin 30° = 0, \qquad (2)$$

$$\Sigma m_A(\boldsymbol{F}_k) = Q \cdot \frac{b}{2} - P\cos 30° h = 0, \qquad (3)$$

$$F = fN. \qquad (4)$$

Для нахождения силы P достаточно найти ее значение из (3):

$$P = \frac{Qb}{2h\cos 30°} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 2}{2 \cdot 0{,}8 \cdot \sqrt{3}} = 0{,}866 \text{ кН}.$$

Если модуль силы P станет больше этого значения, то блок начнет опрокидываться около ребра A.

Уравнения (1), (2), (4) смогут быть использованы для определения нормальной реакции и силы трения.

При плавном увеличении силы $\boldsymbol{P}$ от нуля осуществится то из двух возможных движений, которое требует меньшего значения силы $\boldsymbol{P}$.

Сопоставляя значения модуля силы $\boldsymbol{P}$ в первом и во втором случаях, заключаем, что так как модуль силы $\boldsymbol{P}$ при скольжении меньше ее модуля при опрокидывании, то при возрастании модуля силы $\boldsymbol{P}$ от нуля до максимума блок начнет сначала скользить, а не опрокидываться.

Вариант 2. Переходим к решению задачи в случае, когда сила $\boldsymbol{P}$ приложена в точке C (рис. *г*).

Как и в варианте 1, движение блока может начаться в двух случаях: а) если начнется скольжение блока по плоскости вправо (рис. *д*) и б) если блок начнет опрокидываться вокруг ребра A (рис. *е*).

В первом случае составляем предельные уравнения равновесия, приравняем суммы проекций всех сил (рис. *д*) на оси координат нулю. Точка приложения сил N и F_1 неизвестна, однако это не мешает решению задачи. Имеем

$$P\cos 30^\circ - F_1 = 0,$$

$$N + P\sin 30^\circ - Q = 0.$$

Зависимость силы трения от нормального давления

$$F_1 = fN$$

является третьим уравнением, замыкающим систему трех уравнений с тремя неизвестными. Из этой системы уравнений исключаем неизвестные F_1 и N. Далее находим предельное значение силы P при равновесии

$$P = \frac{fQ}{\cos 30^\circ + f\sin 30^\circ} = 0{,}415 \text{ кН}.$$

Сравнивая ответ с аналогичным ответом варианта 1, убеждаемся, что они тождественны.

Иначе обстоит дело во втором случае (рис. *е*). Здесь нормальная реакция и сила трения приложены в точке A. Для нахождения предельного значения силы P достаточно составить уравнение моментов относительно точки B

$$Q \cdot \frac{b}{2} - P\cos 30^\circ h - P\sin 30^\circ \cdot b = 0.$$

В этом уравнении сила P разложена на две составляющие: горизонтальную $P\cos 30^\circ$ и вертикальную $P\sin 30^\circ$. Согласно теореме Вариньона момент равнодействующей системы сходящихся сил, лежащих в одной плоскости, равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно одного и того же центра. Следовательно, сумма моментов составляющих в уравнении моментов эквивалентна моменту силы P относительно точки B. Из последнего уравнения находим предельное значение силы P:

$$P = \frac{Q \cdot b}{2 \cdot (\cos 30^\circ \cdot h + \sin 30^\circ \cdot b)} = \frac{2 \cdot 0{,}6 \cdot 2}{2 \cdot (\sqrt{3} \cdot 0{,}8 + 0{,}6)} = 0{,}605 \text{ кН}.$$

Сравнивая это предельное значение силы P, выше которого блок начнет опрокидываться вокруг ребра A, с аналогичным значением P (при опрокидывании) в варианте 1, равным $P = 0{,}866$ кН, видим, что перенос точки приложения силы P из B в точку C привел к уменьшению предельного

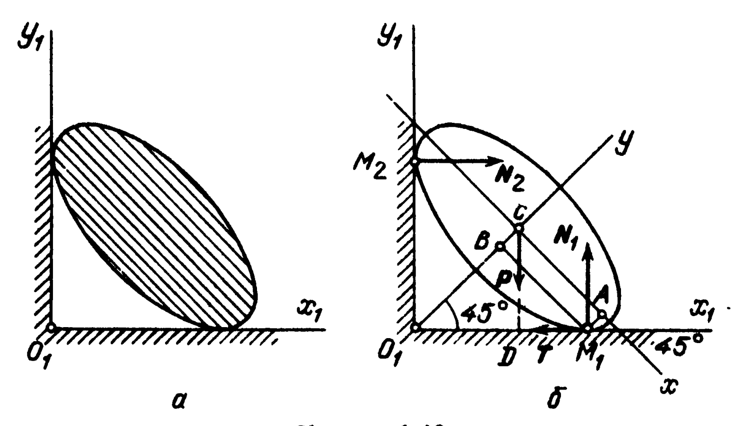
значения P, необходимого для опрокидывания блока. Это объясняется тем, что вертикальная составляющая силы P не создает опрокидывающего момента в случае приложения в точке B. Эта же вертикальная составляющая силы P образует опрокидывающий момент с плечом b в случае приложения силы в точке C.

Однако и в этом случае при плавном увеличении силы P от нуля блок начнет скользить по полу, так как модуль силы P, необходимый для начала скольжения, меньше, чем модуль этой же силы, необходимый для опрокидывания.

Задача 1.40. Эллиптическая шайба опирается на шероховатый пол и совершенно гладкую стену так, что ее оси наклонены к горизонту под углом в 45° (рис. *а*). При этом малая ось симметрии эллипса проходит через точку O_1 линии пересечения стены и пола.

Найти коэффициент трения между полом и шайбой, если последняя в данном положении начинает скользить.

Решение. Рассмотрим положение шайбы по отношению к полу и стене. Поскольку как пол, так и стена (точнее, линии их пересечения с плоскостью рисунка) образуют с большой осью эллипса одинаковые углы, равные по 45°, то по симметрии продолжение малой оси эллипса должно проходить через точку O_1 линии пересечения стены и пола.



К задаче 1.40

Рассмотрим действующие на шайбу силы (рис. *б*). В точке M_2 касания со стеной действует нормальная реакция N_2. В точке M_1 касания с полом действуют нормальная реакция N_1 и сила трения T, направленная против возможного движения; в центре тяжести шайбы C действует сила тяжести, направленная по вертикали CD.

Проведем оси O_1x_1 и O_1y_1 соответственно по полу и стене и составим уравнения равновесия.

Запишем уравнения проекций сил

$$N_2 - T = 0, \quad (1)$$

$$-P + N_1 = 0 \quad (2)$$

и уравнение моментов относительно точки M_1

$$-N_2 \cdot O_1M_2 + P \cdot DM_1 = 0. \quad (3)$$

Из (1) имеем

$$N_2 = T. \quad (4)$$

Из (2) имеем

$$N_1 = P. \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в (3), получим

$$-T \cdot O_1M_2 + N_1 \cdot DM_1 = 0 \quad (6)$$

или

$$T = N_1 \cdot \frac{DM_1}{O_1M_2}. \quad (7)$$

Условием начала скольжения при сухом трении является

$$T = fN_1, \quad (8)$$

где f – коэффициент сухого трения.

Сравнивая (7) и (8), получим

$$f = DM_1/O_1M_2. \quad (9)$$

Для нахождения величин в правой части (9) необходимо решить геометрическую задачу.

Проведем оси Cx и Cy по главным осям эллипса. Обозначим полуоси эллипса через a и b.

Тогда уравнение эллипса в системе xCy будет

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (10)$$

Координаты точки M_1 в этой системе обозначим (x_1, y_1). Прямая O_1M_1 представляет касательную к эллипсу, наклоненную к оси Ox под углом 45°. Угловой коэффициент этой касательной

$$k = \operatorname{tg} 45° = 1. \quad (11)$$

Дифференцируя уравнение (10), имеем

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0. \quad (12)$$

Отсюда

$$y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}. \tag{13}$$

Поскольку угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания, имеем

$$k = y_1' = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}. \tag{14}$$

В соответствии с (11) это дает

$$-\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} = 1 \tag{15}$$

или

$$x_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2}. \tag{16}$$

Для нахождения уравнения касательной подставляем (14) в уравнение пучка прямых

$$y - y_1 = k(x - x_1) = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1). \tag{17}$$

Отсюда, умножая на y_1 и разделив на b^2, имеем

$$\frac{yy_1}{b^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = -\frac{xx_1}{a^2} + \frac{x_1^2}{a^2} \tag{18}$$

или

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}. \tag{19}$$

Поскольку точка $M_1(x_1, y_1)$ лежит на эллипсе,

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1. \tag{20}$$

Подставляя это в (19), получим

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \tag{21}$$

— известную форму уравнения касательной к эллипсу.

Для нахождения координаты y_1 подставим (16) в (20):

$$\frac{a^4 y_1^2}{a^2 b^4} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1. \qquad (22)$$

Отсюда

$$y_1^2 = \frac{b^4}{a^2 + b^2} \qquad (23)$$

и

$$y_1 = -\frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,. \qquad (24)$$

Берем знак "минус", так как y_1, очевидно, отрицательна.

Найдем теперь координату точки O_1. Это – точка пересечения касательной с осью Cy. Очевидно, $x_{O_1} = 0$.

Подставляя значение x_{O_1} в уравнение касательной (21), получим

$$\frac{0 \cdot x_1}{a^2} + \frac{y_{O_1} \cdot y_1}{b^2} = 1. \qquad (25)$$

Отсюда

$$y_{O_1} = \frac{b^2}{y_1} \qquad (26)$$

и, используя (24), находим

$$y_{O_1} = -\sqrt{a^2 + b^2}. \qquad (27)$$

Теперь нетрудно найти длины отрезков DM_1 и O_1M_2.

Поскольку треугольник O_1CD прямоугольный, то

$$O_1D = O_1C \cdot \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + b^2}. \qquad (28)$$

Знак здесь не учитываем, так как нам нужна только длина отрезка O_1C, равная $|y_{O_1}|$.

Опустим теперь перпендикуляры из точки M_1 на оси x и y ($\overline{M_1A}$ и $\overline{M_1B}$). Имеем

$$|\overline{BC}| = |\overline{M_1A}| = M_1A = |y_2| = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad (29)$$

Следовательно,

$$O_1B = O_1C - BC = \sqrt{a^2 + b^2} - \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,. \qquad (30)$$

(Этот результат можно получить и из (16), если учесть, что $O_1B = M_1B = |x_1|$.)

Поскольку O_1BM_1 — равнобедренный прямоугольный треугольник, то

$$O_1M_1 = \frac{O_1B}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}\,\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\,; \tag{31}$$

по симметрии

$$O_1M_2 = O_1M_1 = \sqrt{2}\,\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\,. \tag{32}$$

Далее, из (31) и (28) имеем

$$DM_1 = O_1M_1 - O_1D = \sqrt{2}\,\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}\,(2a^2 - a^2 - b^2) = \frac{a^2-b^2}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{c^2}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}\,. \tag{33}$$

Здесь использовано известное соотношение

$$c^2 = a^2 - b^2. \tag{34}$$

Наконец, из (32) и (33) получим

$$\frac{DM_1}{O_1M_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}} : \left(\sqrt{2}\,\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{c^2}{a^2} = \frac{\epsilon^2}{2}\,, \tag{35}$$

где

$$\epsilon = c/a \tag{36}$$

— эксцентриситет эллипса.

Подставляя (35) в (9), получаем для значения коэффициента трения, при котором начнется скольжение,

$$f = \epsilon^2/2. \tag{37}$$

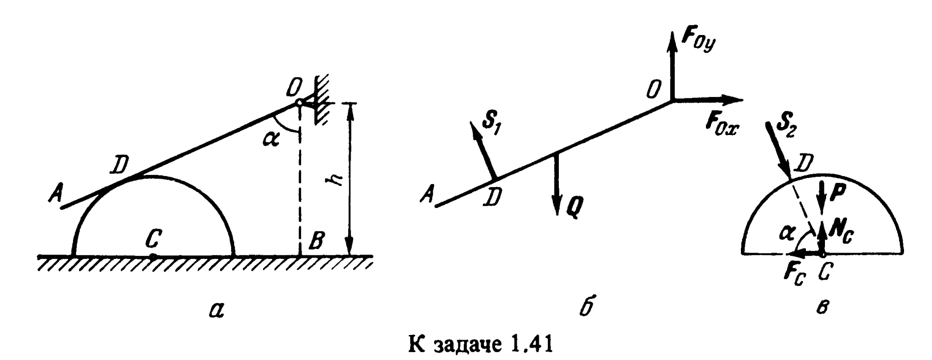
Задача 1.41. Полуцилиндр весом P и радиусом R лежит на негладкой горизонтальной плоскости (рис. *а*). Однородный стержень OA длиной l и весом Q шарнирно закреплен в точке O. Он опирается на гладкую поверхность полуцилиндра, образуя угол α с вертикалью $OB = h$.

Определить наименьшее значение коэффициента трения скольжения f между полуцилиндром и горизонтальной плоскостью при равновесии.

Решение. Полуцилиндр и стержень являются системой твердых тел, находящихся в равновесии. Под действием веса стержня полуцилиндр может начать движение вправо (при недостаточной силе трения между

полуцилиндром и полом). Для определения искомого наименьшего значения коэффициента трения скольжения между полуцилиндром и горизонтальной плоскостью рассмотрим отдельно равновесие стержня и полуцилиндра.

Рассматривая равновесие стержня *OA* (рис. *б*), отбросим мысленно шарнир *O* и заменим его действие реакцией. Реакция шарнира приложена



К задаче 1.41

в точке *O* и неизвестна по модулю и направлению. Представим поэтому реакцию двумя составляющими F_{Ox} и F_{Oy}. Отбрасывая мысленно полуцилиндр, заменим его действие на стержень реакцией S_1, направленной перпендикулярно к стержню, так как согласно условию трение между стержнем и полуцилиндром отсутствует. Модуль реакции S_1 неизвестен. Кроме указанных реакций, к стержню в его середине приложена сила веса Q, направленная по вертикали.

На рис. *в* представлены силы, действующие на полуцилиндр при равновесии. Полуцилиндр находится в равновесии под действием трех сил: веса P, реакции стержня S_2 и реакции негладкой горизонтальной плоскости. Вес P направлен по вертикальной оси симметрии полуцилиндра и, следовательно, линия действия этой силы проходит через точку *C*, лежащую на оси цилиндра. Реакция стержня S_2 согласно пятому закону (закон равенства действия и противодействия) равна по модулю S_1 и направлена противоположно. Следовательно, реакция S_2 перпендикулярна к стержню, совпадающему по направлению с касательной к полуцилиндру, и направлена по радиусу *DC*. Этот радиус образует с горизонтальным диаметром полуцилиндра угол α, так как стороны *AO* и *BO*, образующие угол α, соответственно перпендикулярны к прямой *DC* и горизонтальному диаметру. Равнодействующая реакций негладкой горизонтальной плоскости должна быть приложена в точке *C*. Действительно, полуцилиндр находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости. Следовательно, линии действия всех трех сил пересекаются в одной точке. Но силы S_2 и P пересекаются в точке *C*. Значит, и линия действия равно-

действующей реакции негладкой плоскости должна проходить через точку C. А это возможно только в том случае, если эта реакция приложена в точке C. Разложим реакцию горизонтальной плоскости на две составляющие: нормальную реакцию N_C и силу трения F_C. Перейдем к составлению уравнений равновесия обоих тел. Составим для стержня сумму проекций всех сил на оси x и y и приравняем их нулю:

$$F_{Ox} - S_1 \cos\alpha = 0, \tag{1}$$

$$F_{Oy} - Q + S_1 \sin\alpha = 0. \tag{2}$$

Уравнение моментов относительно точки O будет

$$Q \frac{AO}{2} \sin\alpha - S_1 \cdot OD = 0. \tag{3}$$

Точка O выбрана за центр моментов, так как при этом составляющие реакции шарнира O не входят в уравнение моментов. Таким образом, из последнего уравнения непосредственно находится неизвестная сила S_1, а только эта сила из входящих в систему уравнений (1)–(3) и войдет далее в уравнения равновесия полуцилиндра. Уравнения (1)–(2) могут быть использованы для нахождения неизвестных составляющих реакций шарнира F_{Ox}, F_{Oy}.

Из уравнения (3), пользуясь очевидным равенством

$$OD \cos\alpha = h - r \sin\alpha, \tag{4}$$

найдем

$$S_1 = Q \frac{AO}{2 \cdot OD} \sin\alpha = Q \frac{l \cos\alpha \sin\alpha}{2(h - r\sin\alpha)}. \tag{5}$$

Перейдем к составлению уравнений равновесия для полуцилиндра. Проектируя силы, приложенные к полуцилиндру, на оси координат, получим два уравнения равновесия:

$$S_2 \cos\alpha - F_C = 0, \tag{6}$$

$$N_C - S_2 \sin\alpha - P = 0. \tag{7}$$

Кроме того, сила трения связана с нормальной реакцией зависимостью

$$F_C = f N_C. \tag{8}$$

Учитывая равенство $S_1 = S_2$, получим систему четырех уравнений (5)–(8) с четырьмя неизвестными S, F_C, N_C, f. Для нахождения наименьшего значения коэффициента трения f исключим из рассматриваемой системы остальные неизвестные. Внося (5) и (8) в уравнение (6), получим

$$Q \frac{l \sin 2\alpha \cos\alpha}{4(h - r\sin\alpha)} - f N_C = 0. \tag{9}$$

Подставляя (5) в (7), найдем

$$N_C = P + Q\frac{l}{4}\frac{\sin 2\alpha \sin\alpha}{(h - r\sin\alpha)}. \tag{10}$$

Исключая из полученных уравнений (9) и (10) реакцию N_C, получим окончательно

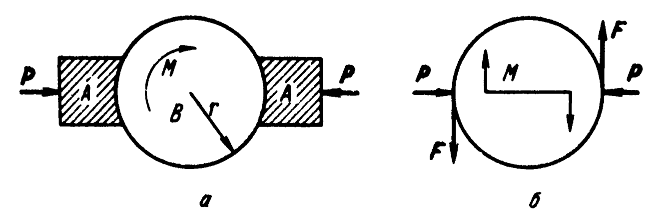
$$f = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha + \frac{2P}{Q}\left(\frac{2h}{l\sin 2\alpha} - \frac{r}{l\cos\alpha}\right)}.$$

Это и есть наименьшее значение коэффициента трения, при котором полуцилиндр и стержень будут находиться в равновесии.

Задача 1.42. Крутящий момент электродвигателя лебедки равен $M = 1{,}2$ кН · м. Для остановки двигателя служат тормозные колодки тормоза A (рис. *а*), прижимающиеся силами P к тормозному диску B, жестко связанному с ротором двигателя. Радиус тормозного диска $r = 600$ мм.

Определить силу давления P, необходимую для удержания ротора в равновесии, если коэффициент трения между деревянными колодками и чугунным тормозным диском равен $f = 0{,}5$.

Решение. Рассмотрим равновесие тормозного диска B (рис. *б*). К диску приложена активная пара – крутящий момент M. Отбрасывая мысленно тормозные колодки, заменяем их действие реакциями. Каждая реакция раскладывается на две составляющие: нормальное давление P и силу трения F. Силы трения направлены по касательным к тормозному диску в сторону, противоположную возможному движению. Они равны



К задаче 1.42

по модулю и образуют пару сил, препятствующую повороту диска. Зависимость между нормальным давлением и силой трения выражается при помощи коэффициента трения

$$F = fP. \tag{1}$$

Для равновесия диска необходимо, чтобы сумма моментов всех сил, приложенных к диску, равнялась нулю. Силы P взаимно уравновешивают-

ся и в уравнение моментов не входят. Силы трения образуют пару сил; крутящий момент представляет собой также пару сил. Сумма моментов сил, составляющих пару относительно любой точки, равна моменту пары. Таким образом,

$$F \cdot 2r - M = 0. \qquad (2)$$

Подставляя значение силы трения (1) в уравнение (2), имеем

$$fP \cdot 2r - M = 0,$$

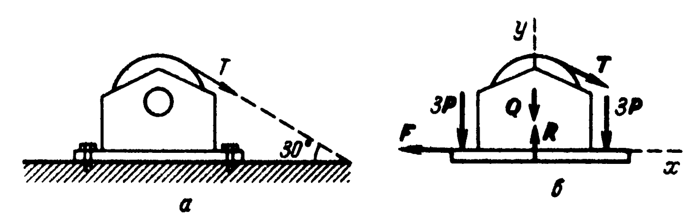
откуда

$$P = \frac{M}{2rf} = \frac{1,2}{2 \cdot 0,6 \cdot 0,5} = 2 \text{ кН}.$$

Задача 1.43. Электрическая лебедка (рис. *а*) весом $Q = 2$ кН крепится к фундаменту при помощи шести болтов. Сила тяги T равна 8 кН и направлена под углом 30° к горизонту. Коэффициент трения между основанием лебедки и фундаментом равен $f = 0,5$.

Определить силу затяжки болтов, при которой срезывающее усилие в них равно нулю и лебедка удерживается от сдвига одной силой трения.

Решение. Рассмотрим равновесие лебедки. К ней приложены две активные силы: вес $\boldsymbol{Q}$ и сила тяги $\boldsymbol{T}$. Отбрасывая мысленно связи — болты и фундамент, заменим их действие реакциями (рис. *б*). Полагая затяжку всех шести болтов одинаковой, заменяем их действие двумя силами по $3\boldsymbol{P}$ каждая. Реакцию фундамента раскладываем на нормальную составляющую $\boldsymbol{R}$ и силу трения $\boldsymbol{F}$. Силу трения направляем по горизонтали влево, в сторону, противоположную возможному сдвигу лебедки. Так как



К задаче 1.43

срезывающее усилие в болтах равно нулю, то следует рассмотреть равновесие лебедки как равновесие свободного твердого тела, находящегося под действием сил: $\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{T}, 3\boldsymbol{P}, 3\boldsymbol{P}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{F}$.

Выберем оси координат: ось x направим по горизонтали вправо, ось y вертикально вверх. Составим сумму проекций всех сил на ось y и приравняем ее нулю:

$$R - 6P - Q - T\sin 30° = 0.$$

Из этого уравнения определяется нормальная составляющая реакции фундамента, равная силе нормального давления на фундамент:

$$R = 6P + Q + T\sin 30^\circ = 6P + 2 + 8 \cdot 0{,}5 = 6P + 6. \qquad (1)$$

Приравнивая нулю сумму проекций всех сил на ось x, имеем

$$T\cos 30^\circ - F = 0.$$

Из этого уравнения определяется необходимая для равновесия сила трения:

$$F = T\cos 30^\circ = 8\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 6{,}92 \text{ кН}. \qquad (2)$$

Зависимость между силой трения и силой нормального давления дается формулой

$$F \leqslant fR.$$

Подставив в это выражение значение силы трения (2), нормального давления (1) и коэффициента трения, получим

$$6{,}92 \leqslant (6P + 6)f = (6P + 6)\,0{,}5,$$

откуда определим необходимую силу затяжки болтов

$$P \geqslant \frac{6{,}92 - 6 \cdot 0{,}5}{6 \cdot 0{,}5} \approx 1{,}3 \text{ кН}.$$

Таким образом, для того чтобы болты не испытывали срезывающих усилий и лебедка удерживалась от сдвига силой трения, необходимо и достаточно, чтобы затяжка каждого болта удовлетворяла условию

$$P \geqslant 1{,}3 \text{ кН}.$$

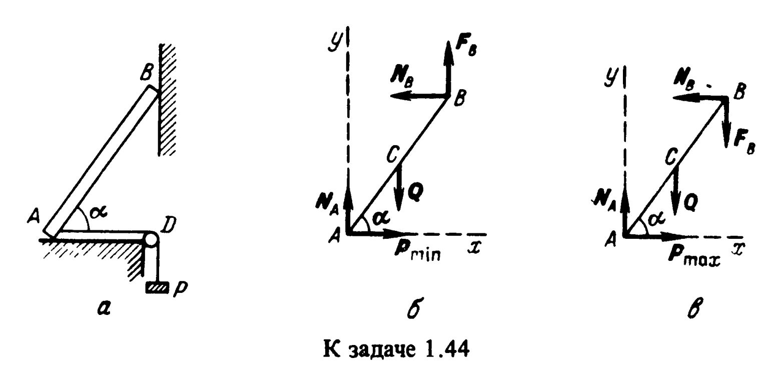
Долговечность болтового соединения лебедки с фундаментом возрастает, если срезывающее усилие в болтах будет равно нулю.

Задача 1.44. Однородный прямолинейный стержень AB весом Q (рис. *а*) опирается в точке B на шероховатую вертикальную стену. Коэффициент трения между стержнем и стеной равен f. В точке A стержень опирается на горизонтальный гладкий пол. Стержень удерживается в равновесии нитью AD, перекинутой через блок D. К концу нити подвешен груз P.

Определить пределы, в которых можно изменять величину груза P, чтобы не нарушить равновесия стержня.

Решение. Рассмотрим равновесие стержня AB. На него действует одна активная сила, вес стержня Q, приложенный посредине стержня в точке C и направленный по вертикали вниз. На стержень наложены три связи: горизонтальный пол, вертикальная стена и нить AD. На основании закона освобождаемости от связей отбросим мысленно связи и заменим

их действие реакциями. Реакция гладкого пола N_A направлена перпендикулярно к полу, натяжение нити P направлено по горизонтали вправо, реакция шероховатой вертикальной стены может быть представлена двумя составляющими: нормальной реакцией N_B, направленной по горизонтали влево, и силой трения F_B. Сила трения направлена по вертикали: 1) в случае, когда груз P наименьшей величины и, следовательно, возможное



К задаче 1.44

направление движения точки A – влево, а точки B – вниз; сила трения F_B направлена вверх (рис. *б*), в сторону, противоположную возможному движению; 2) в случае, когда груз P наибольшей величины, точка A может начать двигаться вправо, а точка B может начать скользить по стене вверх и, следовательно, сила трения F_B (рис. *в*) направлена по вертикали вниз, опять-таки в сторону, противоположную возможному движению.

Рассматривая равновесие стержня AB как свободного твердого тела, находящегося под действием пяти сил: Q, N_A, N_B, F_B, $P_{\min}$ (рис. *б*), найдем минимальное значение веса груза $P_{\min}$. Выберем оси координат – ось x направляем по горизонтали вправо, ось y вертикально вверх. Составим уравнения равновесия (рис. *б*):

$$\Sigma F_{kx} = P_{\min} - N_B = 0,$$
$$\Sigma F_{ky} = N_A + F_B - Q = 0,$$
$$\Sigma m_B(F_k) = P_{\min}\, l \sin\alpha + Q \cdot 0{,}5 l \cos\alpha - N_A\, l \cos\alpha = 0.$$

Через l в последнем уравнении обозначена длина стержня AB. Кроме того, напишем зависимость силы трения от нормального давления

$$F_B = f N_B.$$

Задача является статически определенной, так как система из четырех уравнений содержит четыре неизвестных: N_A, F_B, N_B, $P_{\min}$. Решая совместно эту систему уравнений, находим искомое минимальное значение

величины груза P:

$$P_{min} = \frac{Q}{2(\operatorname{tg}\alpha + f)}.$$

Для определения наибольшей величины груза P рассмотрим равновесие стержня AB (рис. *в*) как свободного твердого тела, находящегося под действием пяти сил: N_B, F_B, Q, N_A, P_{max}. Тогда уравнения равновесия имеют вид

$$\Sigma F_{kx} = P_{max} - N_B = 0,$$

$$\Sigma F_{ky} = N_A - F_B - Q = 0,$$

$$\Sigma m_B(F_k) = P_{max}\, l\sin\alpha + Q\cdot 0{,}5l\cos\alpha - N_A l\cos\alpha = 0,$$

кроме того,

$$F_B = fN_B.$$

Решая совместно эту систему уравнений, находим наибольшую величину груза P, при которой стержень будет в равновесии:

$$P_{max} = \frac{Q}{2(\operatorname{tg}\alpha - f)}. \tag{1}$$

Из уравнения (1) следует, что P_{max} неограниченно возрастает, если $\operatorname{tg}\alpha \to f$. При $\operatorname{tg}\alpha < f$ для возможности подъема стержня (скольжения точки B вверх по стене) необходимо, чтобы сила Q была направлена вверх по вертикали, что невозможно. Таким образом, в этом случае не существует силы P_{max}, которая могла бы нарушить равновесие лестницы.

Таким образом, равновесие стержня возможно при изменении веса груза P в пределах

$$\frac{Q}{2(\operatorname{tg}\alpha - f)} \geqslant P \geqslant \frac{Q}{2(\operatorname{tg}\alpha + f)}. \tag{2}$$

Эта задача может быть решена и несколько иным путем. Замечаем, что по условию задачи не требуется определения неизвестной реакции гладкого пола N_A. Поэтому из возможных уравнений равновесия стержня (рис. *б*) выберем такие, которые не содержат N_A. Составим уравнение моментов всех сил относительно точки A:

$$\Sigma m_A(F_k) = N_B l\sin\alpha + F_B l\cos\alpha - Q\frac{l}{2}\cos\alpha = 0. \tag{3}$$

Второе уравнение равновесия — равенство нулю суммы проекций всех сил на горизонтальную ось x. В него также не войдет неизвестная сила N_A:

$$\Sigma F_{kx} = P_{min} - N_B = 0. \tag{4}$$

К этим двум уравнениям добавляется соотношение между нормальной реакцией и силой трения в точке B:

$$F_B = fN_B. \tag{5}$$

Подставив значение F_B из (5) в (3) и учитывая (4), сразу получим

$$P_{\min} = \frac{Q}{2(\operatorname{tg}\alpha + f)}. \tag{6}$$

Аналогично для нахождения наибольшего значения силы P составим такие же уравнения равновесия (рис. *в*):

$$\Sigma m_A(F_k) = N_B l \sin\alpha - F_B l \cos\alpha - Q\frac{l}{2}\cos\alpha = 0,$$

$$\Sigma F_{kx} = P_{\max} - N_B = 0,$$

$$F_B = fN_B.$$

Решив совместно эту систему уравнений, определим максимальное значение силы P:

$$P_{\max} = \frac{Q}{2(\operatorname{tg}\alpha - f)}. \tag{7}$$

Таким образом, как и следовало ожидать, мы пришли к результату, выражаемому формулой (2).

Сопоставляя оба решения, мы видим, что в первом случае мы применили общий метод составления уравнений равновесия для твердого тела, находящегося под действием произвольной плоской системы сил, не учитывая особенностей данной задачи. Достоинство общих методов и заключается в том, что они ведут к цели, несмотря на различия в условиях задач.

Иногда такой путь не является самым простым и коротким. На примере второго способа решения мы видим, что при учете особенности данной задачи (в задаче не требуется определить реакции гладкого поля N_A) удалось составить меньшее число уравнений равновесия, которые проще и скорее привели к цели.

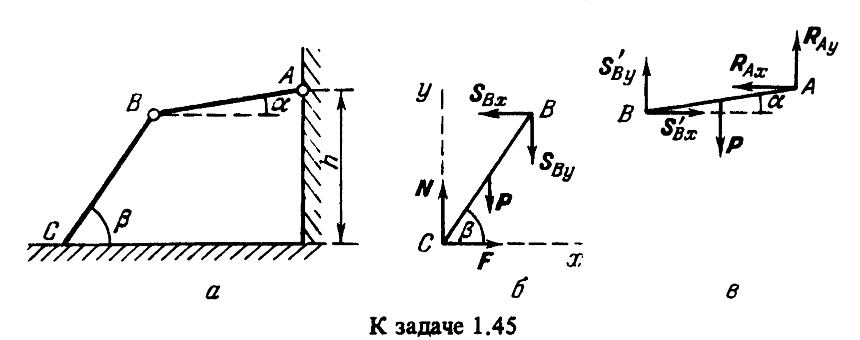
Задача 1.45. Два одинаковых однородных стержня AB и BC, весом P и длиной l каждый, шарнирно соединены между собой. В точке A стержень AB шарнирно прикреплен к вертикальной стене. Точка A находится на высоте h над горизонтальным полом, на который концом C свободно опирается стержень BC; $h \leqslant 2l$.

Зная коэффициент трения f между стержнем BC и горизонтальным полом, определить угол β при равновесии.

Р е ш е н и е. Рассмотрим отдельно равновесие стержня BC (рис. *б*) и стержня AB (рис. *в*). Отбросив мысленно связи, заменим их действие

реакциями. К стержню BC приложены силы: вес P, нормальная реакция горизонтального пола N и сила трения F, направленная в сторону, противоположную возможному движению; реакция шарнира B не известна ни по модулю, ни по направлению (представим ее двумя составляющими S_{Bx} и S_{By}).

К стержню AB приложены силы: вес P; составляющие реакции шарнира B, равные и противоположные силам, приложенным в точке B к



К задаче 1.45

стержню BC (обозначим эти составляющие через S'_{Bx} и S'_{By}); составляющие реакции шарнира A, названные R_{Ax} и R_{Ay}.

Составим уравнения предельного равновесия для стержня BC:

$$F - S_{Bx} = 0, \tag{1}$$

$$N - P - S_{By} = 0, \tag{2}$$

$$Fl \sin\beta - Nl \cos\beta + P\frac{l}{2}\cos\beta = 0, \tag{3}$$

$$F = fN. \tag{4}$$

Уравнение моментов (3) составлено относительно точки B, уравнение (4) дает зависимость силы трения от нормального давления.

Уравнения равновесия для стержня AB будут

$$S'_{Bx} - R_{Ax} = 0, \tag{5}$$

$$S'_{By} - P + R_{Ay} = 0, \tag{6}$$

$$S'_{Bx}\, l \sin\alpha - S'_{By}\, l \cos\alpha + P\frac{l}{2}\cos\alpha = 0. \tag{7}$$

Здесь введен вспомогательный угол α, образованный стержнем AB с горизонталью. Сумма моментов сил (7) составлена относительно точки A.

Чтобы найти уравнения, определяющие зависимость между углами α и β, решим совместно составленные уравнения, кроме уравнений (5) и (6),

так как последние содержат R_{Ax} и R_{Ay}, которые согласно условию задачи находить не нужно. Из уравнения (1), (2) и (4) найдем

$$S_{Bx} = f(P + S_{By}). \tag{8}$$

Исключив из уравнения (3) неизвестные F, N, получим

$$S_{Bx} l \sin\beta - (P + S_{By}) l \cos\beta + \frac{Pl}{2} \cos\beta = 0. \tag{9}$$

Разделив это равенство на $l \cos\beta$ и воспользовавшись равенством (8), найдем

$$f(P + S_{By}) \operatorname{tg}\beta - S_{By} - \frac{P}{2} = 0. \tag{10}$$

С другой стороны, разделив уравнение (7) на $l \cos\alpha$ и воспользовавшись равенством (8), получим

$$f(P + S_{By}) \operatorname{tg}\alpha - S_{By} + P/2 = 0. \tag{11}$$

Исключив из уравнений (10) и (11) S_{By}, найдем

$$3 \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha = 2/f. \tag{12}$$

Это – первое уравнение, определяющее углы α, β в положении равновесия.

Вторoccе уравнение найдем из геометрического равенства

$$l \sin\beta + l \sin\alpha = h, \tag{13}$$

откуда получим

$$\sin\beta + \sin\alpha = h/l. \tag{14}$$

Исключив из равенств (12) и (14) угол α, найдем

$$3 \operatorname{tg}\beta - \frac{h/l - \sin\beta}{\sqrt{1 - (h/l - \sin\beta)^2}} = \frac{2}{f}. \tag{15}$$

Если β_0 – корень этого уравнения, то равновесие системы будет при любом $\beta > \beta_0$. Решение задачи (15) справедливо для следующего диапазона значений угла β: $0 \leqslant \beta \leqslant \pi/2$.

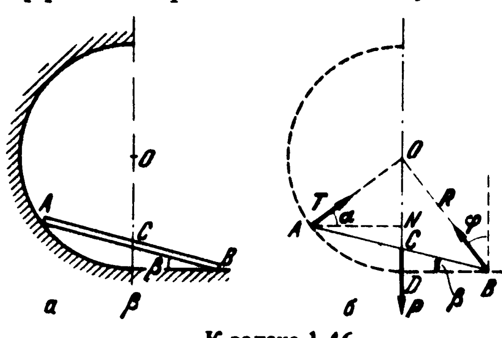
В интервале $\pi/2 \leqslant \beta \leqslant \pi$ уравнения равновесия изменяются, так как сила трения F меняет знак на противоположный. Уравнение (15) для $\pi/2 \leqslant \beta \leqslant \pi$ запишется в виде

$$3 \operatorname{tg}\beta - \frac{h/l - \sin\beta}{\sqrt{1 - (h/l - \sin\beta)^2}} = -\frac{2}{f}. \tag{16}$$

Задача 1.46. Однородный стержень AB длиной l опирается концом A на внутреннюю гладкую поверхность пустотелого полуцилиндра радиу-

сом r и концом B на шероховатый горизонтальный пол ($l < 2r$). В положении равновесия центр тяжести стержня C находится на вертикальном диаметре полуцилиндра.

Определить угол β, составляемый стержнем с полом в положении равновесия, и коэффициент трения скольжения f между стержнем и полом,



К задаче 1.46

полагая, что сила трения достигает в этом положении стержня своего предельного значения.

Решение. Рассмотрим равновесие стержня AB (рис. *а*). На стержень действует одна активная сила, вес стержня P. Так как центр тяжести стержня C лежит на одной вертикали с центром цилиндра O, то линия действия силы тяжести проходит через точку O. На стержень наложены две связи: гладкая поверхность полуцилиндра и шероховатый пол. Применим закон освобождаемости от связей. Отбросим мысленно связи (рис. *б*) и заменим их действие реакциями. Реакция гладкой стенки полуцилиндра направлена нормально к его поверхности, т.е. по радиусу AO. Изобразим ее силой T. Следовательно, в точке O пересекаются линии действия двух сил: реакции T и веса P. Но стержень находится в равновесии под действием трех сил: T, P и реакции пола в точке B. Согласно теореме о трех непараллельных силах линия действия реакции пола R должна также пересекать точку O. Направим реакцию R по линии BO (рис. *б*). Угол между нормалью к полу и реакцией R есть угол трения φ, причем $f = \operatorname{tg}\varphi$. Из треугольника OBD найдем

$$f = \operatorname{tg}\varphi = \frac{BD}{OD} = \frac{BC\cos\beta}{OD} = \frac{l\cos\beta}{2r}. \qquad (1)$$

Обозначим угол между силой T и линией горизонта буквой α. Тогда, опуская перпендикуляр AN из точки A на вертикальный диаметр, имеем $AN = AO\cos\alpha = AC\cos\beta$, или

$$r\cos\alpha = \frac{l}{2}\cos\beta. \qquad (2)$$

Аналогично $ON = r\sin\alpha$ и $DN = l\sin\beta$; следовательно,

$$r\sin\alpha + l\sin\beta = r. \tag{3}$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), находим

$$\cos\alpha = f. \tag{4}$$

Обозначив для краткости $\frac{l}{2r} = b < 1$ (так как по условию $l < 2r$), найдем из (2) и (3), что

$$\cos\alpha = b\cos\beta, \tag{5}$$

$$\sin\alpha = 1 - 2b\sin\beta. \tag{6}$$

Возведем равенства (5) и (6) в квадрат и сложим. После несложных преобразований получим

$$3b\sin^2\beta - 4\sin\beta + b = 0,$$

откуда

$$\sin\beta = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 3b^2}}{3b}.$$

Следовательно,

$$\cos\beta = \frac{2}{3b}\sqrt{3b^2 - 2 \pm \sqrt{4 - 3b^2}}.$$

Знак "минус" перед вторым корнем должен быть отброшен, так как

$$3b^2 - 2 - \sqrt{4 - 3b^2} < 0$$

и значение $\cos\beta$ будет при этом мнимым. Итак, окончательно

$$\cos\beta = \frac{2}{3b}\sqrt{3b^2 - 2 + \sqrt{4 - 3b^2}},$$

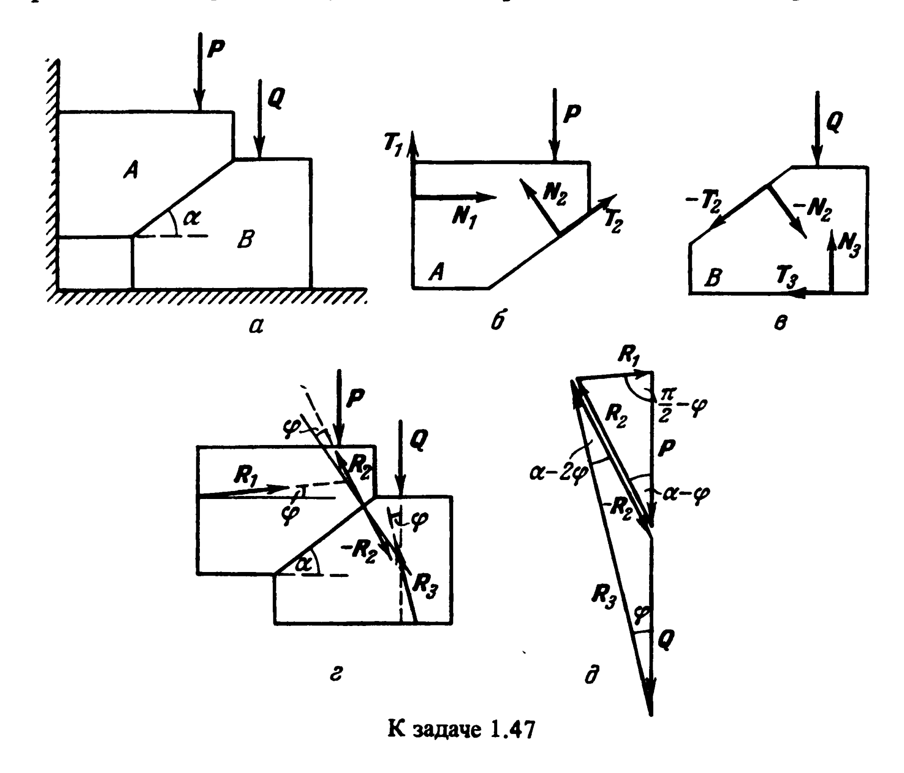
$$f = b\cos\beta = \frac{2}{3}\sqrt{3b^2 - 2 + \sqrt{4 - 3b^2}}.$$

Решение этой задачи отличается от большинства задач на равновесие при наличии трения тем, что мы не разлагаем реакцию шероховатой поверхности на нормальную составляющую и силу трения.

Задача 1.47. Две одинаковые призмы A и B образуют лестницу. Ступени нагружены силами P и Q, точки приложения которых заданы (рис. *а*). Призма A опирается на вертикальную стену и наклоненную под углом α плоскость второй призмы. Призма B опирается на горизонтальный пол.

Определить условия равновесия, учитывая трение всех контактирующих поверхностей. Коэффициенты трения призм о горизонтальный пол, вертикальную стену и друг о друга одинаковы и равны $f = \operatorname{tg}\varphi$. Собственными весами призм можно пренебречь по сравнению с силами P и Q.

Решение. Рассмотрим равновесие каждой из призм, отбросив мысленно стену, пол и другую призму, заменив их действия нормальными реакциями N_1, N_2, N_3 и силами трения T_1, T_2, T_3. Направления сил



К задаче 1.47

трения следует выбирать в сторону, противоположную возможному движению. Так, призма A при недостаточном значении силы трения начнет опускаться, а призма B – перемещаться вправо. Поэтому силу трения T_1 направляем вверх, силу трения T_2 – вправо вверх (рис. *б*). Для призмы B (рис. *в*) силу трения T_2 направляем влево вниз, силу трения T_3 – по горизонтали влево. Расчетные схемы показаны на рис. *б* для верхней призмы и на рис. *в* для нижней.

Максимальные значения касательных сил (сил трения) при равновесии равны

$$T_1 = fN_1, \quad T_2 = fN_2, \quad T_3 = fN_3.$$

В проекциях на координатные оси уравнения равновесия имеют вид

для призмы A

$$N_1 - N_2 \sin\alpha + fN_2 \cos\alpha = 0, \quad N_2 \cos\alpha + fN_1 - P + fN_2 \sin\alpha = 0,$$

для призмы B

$$-fN_2 \cos\alpha + N_2 \sin\alpha - fN_3 = 0,$$
$$-fN_2 \sin\alpha - N_2 \cos\alpha - Q + N_3 = 0.$$

Решив эту систему уравнений равновесия, найдем

$$P = fQ\,\frac{2f \sin\alpha + (1 - f^2)\cos\alpha}{(1 - f^2)\sin\alpha - 2f\cos\alpha}$$

или, после подстановки $f = \operatorname{tg}\varphi$ и несложных тригонометрических преобразований,

$$P = Q\,\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}(\alpha - 2\varphi)}.$$

Отсюда видно, что решение существует, если $\alpha > 2\varphi$. Таким образом, условие равновесия лестницы, образованной двумя призмами, будет

$$P \leqslant Q\,\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}(\alpha - 2\varphi)}.$$

Эта задача наряду с приведенным аналитическим решением может быть решена и графически.

Если заменить касательную и нормальную составляющую реакции в каждом случае одним вектором (рис. *г*) :

$$\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{T}_1,$$
$$\pm\boldsymbol{R}_2 = \pm\boldsymbol{N}_2 \pm \boldsymbol{T}_2,$$
$$\boldsymbol{R}_3 = \boldsymbol{N}_3 + \boldsymbol{T}_3,$$

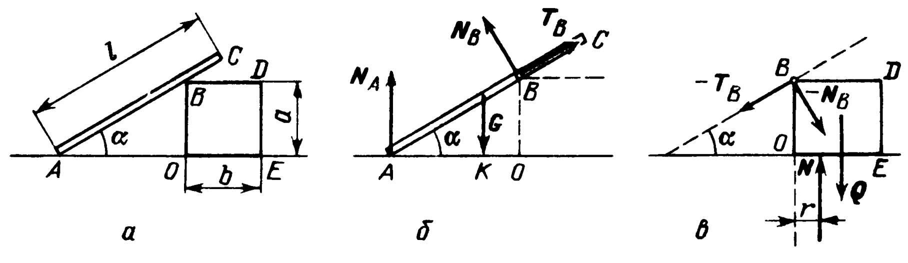
то к каждой из призм будет приложено три силы (см. рис. *г*) и можно воспользоваться теоремой о трех силах. Графическое решение — комбинация двух замкнутых силовых треугольников — представлено на рис. *д*.

Задача имеет решение только при $\alpha > 2\varphi$. Это учтено на рис. *г*, где угол α начерчен достаточно большим.

Задача 1.48. Однородный стержень AC длиной l и весом G опирается концом A на гладкую горизонтальную плоскость, а промежуточной точкой B на прямоугольную призму, стоящую на той же гладкой плоскости. Угол трения между стержнем и призмой равен φ. Стержень составляет с горизонтом угол α. Размеры призмы заданы (рис. *а*).

Найти реакции связей и условия равновесия призмы.

Решение. Рассмотрим равновесие стержня и призмы в отдельности. Отбросим мысленно горизонтальную гладкую плоскость и шероховатую призму, заменив их действие на стержень реакциями. На стержень действуют (рис. *б*): вес G, нормальная реакция гладкой плоскости N_A, нормальная реакция призмы N_B, касательная реакция призмы (сила трения) T_B.



К задаче 1.48

Составляем три уравнения равновесия для плоской системы сил, приложенных к стержню.

$$-N_B \sin\alpha + T_B \cos\alpha = 0, \tag{1}$$

$$N_A + N_B \cos\alpha + T_B \sin\alpha - G = 0, \tag{2}$$

$$-N_A \cdot AO + G \cdot KO = -N_A a \operatorname{ctg}\alpha + G\left(a \operatorname{ctg}\alpha - \frac{l}{2}\cos\alpha\right) = 0. \tag{3}$$

Четвертое уравнение – зависимость силы трения от нормального давления

$$T_B \leqslant fN_B = N_B \operatorname{tg}\varphi. \tag{4}$$

Тогда из уравнения (3) находим

$$N_A = G\left(1 - \frac{l}{2a}\sin\alpha\right). \tag{5}$$

Далее, из уравнения (1) имеем

$$T_B = N_B \operatorname{tg}\alpha \quad \text{или} \quad N_B = T_B \operatorname{ctg}\alpha. \tag{6}$$

Подставляя найденные значения T_B и N_A в уравнение (2), получим

$$G\left(1 - \frac{l}{2a}\sin\alpha\right) + N_B \cos\alpha + N_B \operatorname{tg}\alpha \sin\alpha - G = 0, \tag{7}$$

или

$$N_B = G\frac{l}{2a}\sin\alpha\cos\alpha. \tag{8}$$

Согласно (6) и (8)

$$T_B = N_B \operatorname{tg}\alpha = G\frac{l}{2a}\sin^2\alpha. \quad (9)$$

Но согласно условию коэффициент трения $f = \operatorname{tg}\varphi$. Следовательно, равновесие возможно, если

$$T_B = N_B \operatorname{tg}\alpha \leqslant fN_B, \quad (10)$$

или

$$\operatorname{tg}\alpha \leqslant f = \operatorname{tg}\varphi. \quad (11)$$

Следовательно, равновесие возможно, если

$$\alpha \leqslant \varphi. \quad (12)$$

Переходим к рассмотрению равновесия призмы (рис. *в*).

Силы N_B и T_B, действующие на призму, направлены в сторону, противоположную этим же реакциям, приложенным к стержню.

Уравнения равновесия сил, приложенных к призме, будут (рис. *в*)

$$N_B\sin\alpha - T_B\cos\alpha = 0, \quad (13)$$

$$-N_B\cos\alpha - T_B\sin\alpha - Q + N = 0, \quad (14)$$

$$Nr - Q\frac{b}{2} = 0. \quad (15)$$

Здесь N – равнодействующая нормальных реакций между гладкой плоскостью и призмой.

Уравнение (13) удовлетворяется автоматически, так как оно совпадает с уравнением (1).

Из уравнения (14) находим, учитывая (8) и (9),

$$N = Q + G\frac{l}{2a}\sin\alpha\cos^2\alpha + G\frac{l}{2a}\sin^3\alpha = Q + G\frac{l}{2a}\sin\alpha. \quad (16)$$

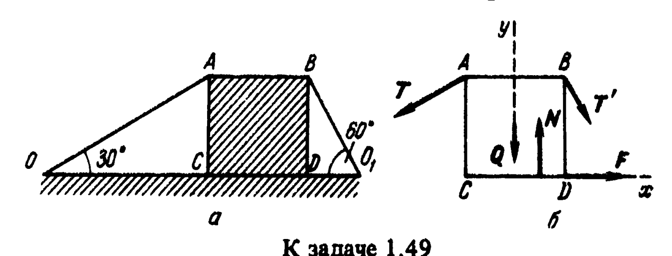
Из уравнения (15) имеем

$$r = \frac{Q}{N}\frac{b}{2} = \frac{b}{2}\,\frac{Q}{Q + G\dfrac{l}{2a}\sin\alpha}. \quad (17)$$

Задача 1.49. Квадратный ящик весом $\vec{Q}$ находится в покое на горизонтальном негладком полу. Коэффициент трения между полом и ящиком равен f. Через ящик перекинут трос, закрепленный своими концами в O и O_1. Ветви троса образуют с полом углы 30° и 60°.

Пренебрегая трением между ящиком и тросом, определить натяжение троса, при котором ящик будет оставаться в покое (рис. *а*).

Решение. Рассмотрим равновесие ящика (рис. *б*). На ящик действует одна активная сила – вес Q, приложенная в центре и направленная по вертикали вниз. На ящик наложены две связи – трос и пол. Отбрасывая мысленно эти связи, заменим их действие реакциями. Так как трение



К задаче 1.49

между ящиком и тросом отсутствует, то натяжение троса T будет везде одинаковым. Натяжение троса будет действовать на ящик по направлениям OA и O_1B (рис. *а*). Разложим реакцию пола на нормальную реакцию N и касательную реакцию F, являющуюся силой трения.

Рассмотрим равновесие ящика как свободного тела, находящегося под действием пяти сил, указанных на рисунке. Составим уравнения равновесия, приравняв нулю сумму проекций всех сил на оси x и y:

$$T\cos 60° - T\cos 30° + F = 0, \quad (1)$$

$$N - Q - T\sin 60° - T\sin 30° = 0. \quad (2)$$

Кроме того, имеем зависимость между силой трения и нормальным давлением (по модулю равным нормальной реакции), а именно:

$$F = fN. \quad (3)$$

Из (2) находим

$$N = Q + T(\sin 60° + \sin 30°). \quad (4)$$

Подставляя это значение в (3), находим

$$F = fQ + fT(\sin 60° + \sin 30°).$$

Внося найденное значение F в (1), имеем

$$T(\cos 60° - \cos 30°) + f[Q + T(\sin 60° + \sin 30°)] = 0. \quad (5)$$

Решая уравнение (5) относительно неизвестного T, находим натяжение троса в предельном случае

$$T = \frac{fQ}{\cos 30° - \cos 60° - f(\sin 60° - \sin 30°)} = \frac{2fQ}{\sqrt{3} - 1 - f(\sqrt{3} + 1)}.$$

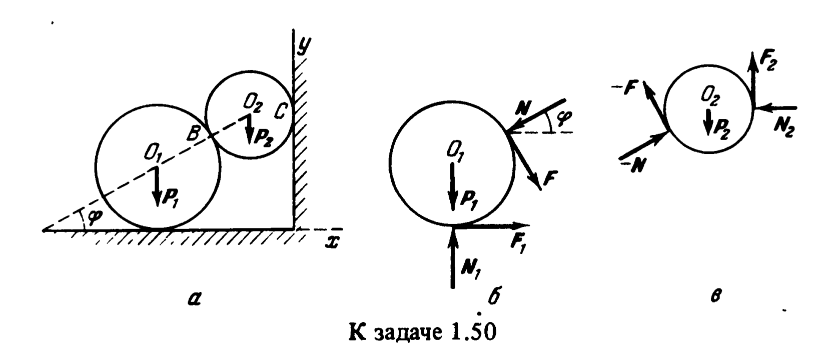
Ящик будет находиться в покое при

$$T \leqslant \frac{2fQ}{\sqrt{3}-1-f(\sqrt{3}+1)}.$$

Задача 1.50. Два цилиндра с радиусами r_1 и r_2 и весами P_1 и P_2 опираются на горизонтальный пол и вертикальную стену так, что прямая O_1O_2, соединяющая центры цилиндров, образует угол φ с горизонтом (рис. *а*). Коэффициенты трения: между первым цилиндром и горизонтальным полом f_1, между вторым цилиндром и вертикальной стеной f_2 и меду цилиндрами f.

Определить минимальные значения этих коэффициентов, при которых система может находиться в равновесии, а также нормальные реакции пола, стены и реакции между цилиндрами.

Решение. Рассмотрим равновесие каждого из цилиндров в отдельности (рис. *б* и *в*), отбросив мысленно пол, стену и другой цилиндр, заменив их действие реакциями. Каждую реакцию разложим на нормальную составляющую и силу трения. Тогда первый цилиндр можно рассматривать как свободное твердое тело, находящееся в рановесии под действием пяти сил: веса, двух нормальных реакций и двух сил трения (рис. *б*). Аналогично рассматривается равновесие второго цилиндра (рис. *в*). Силы трения



К задаче 1.50

направлены по касательным, проведенным к цилиндрам в точках соприкосновения в сторону, противоположную возможному движению цилиндра.

Составим уравнения равновесия для первого цилиндра:

$$\Sigma F_{kx} = F_1 - N\cos\varphi + F\sin\varphi = 0,$$

$$\Sigma F_{ky} = N_1 - P_1 - N\sin\varphi - F\cos\varphi = 0, \qquad (1)$$

$$\Sigma m_{O_1}(\boldsymbol{F}_k) = F_1 r_1 - F r_1 = 0.$$

Уравнения равновесия для второго цилиндра будут

$$\Sigma F_{kx} = N\cos\varphi - N_2 - F\sin\varphi = 0,$$
$$\Sigma F_{ky} = N\sin\varphi - P_2 + F_2 + F\cos\varphi = 0, \qquad (2)$$
$$\Sigma m_{O_2}(F_k) = F_2 r_2 - F r_2 = 0.$$

К этим уравнениям равновесия следует добавить зависимости предельных сил трения от нормального давления

$$F_1 = f_1 N_1, \quad F = fN, \quad F_2 = f_2 N_2. \qquad (3)$$

Решив совместно систему из девяти уравнений (1) – (3), найдем

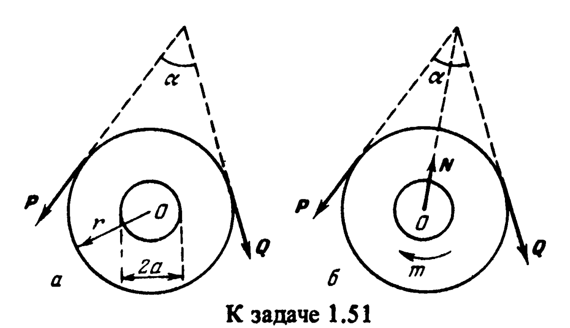
$$f_1 = \frac{P_2\cos\varphi}{P_1(1+\sin\varphi+\cos\varphi)+P_2(1+\sin\varphi)}, \qquad N_1 = P_1 + P_2\frac{1+\sin\varphi}{1+\sin\varphi+\cos\varphi},$$

$$f_2 = 1, \qquad N_2 = \frac{P_2\cos\varphi}{1+\sin\varphi+\cos\varphi},$$

$$f = \frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi}, \qquad N = P_2\frac{1+\sin\varphi}{1+\sin\varphi+\cos\varphi}.$$

Полученные значения коэффициентов трения являются минимальными; если они будут превышать их, то равновесие системы сохранится, а силы трения при этом не будут достигать своих предельных значений.

Заметим, что коэффициенты трения скольжения, определенные экспериментально для различных сочетаний материалов, приводимые в технических справочниках, всегда меньше единицы.



К задаче 1.51

Задача 1.51. Шкив радиусом r насажен на вал радиусом a, который может вращаться в подшипниках. Коэффициент трения между валом и подшипниками f.

Определить наибольшую силу P, которая удержит шкив в покое, если к шкиву приложена сила Q, образующая с силой P угол α (рис. a). Найти значение силы P, когда $\alpha = \pi/2$ и когда силы P и Q параллельны.

Решение. Отбросив мысленно подшипники, рассмотрим равновесие вала вместе со шкивом, заменив действие подшипников нормальной реакцией N и моментом сил трения m. Момент сил трения (относительно точки O) может быть представлен в виде

$$m = fN \cdot a. \tag{1}$$

Момент сил трения будет направлен в сторону, противоположную возможному движению. Таким образом, этот момент будет совпадать по направлению с моментом меньшей силы. Положив $Q < P$, составим уравнение равновесия вала со шкивом, приравняв нулю сумму моментов всех сил относительно центра O:

$$P \cdot r - Q \cdot r - fN \cdot a = 0. \tag{2}$$

С другой стороны, нормальная реакция N определится как равнодействующая двух сил $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$

$$N = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}. \tag{3}$$

Подставив это значение в уравнение (2) и освободившись от радикала, получим

$$\left(1 - \frac{f^2a^2}{r^2}\right)P^2 - \left(2Q + 2Q\cos\alpha\frac{f^2a^2}{r^2}\right)P + Q^2\left(1 - \frac{f^2a^2}{r^2}\right) = 0. \tag{4}$$

Значение P равно большему корню этого квадратного уравнения.

Меньший корень P будет соответствовать случаю $Q > P$. В случае, когда $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ параллельны, решение упрощается. Действительно, при этом

$$N = P + Q \tag{5}$$

и, следовательно, из (2) после несложных преобразований находим

$$P = Q\frac{r + fa}{r - fa}. \tag{6}$$

В случае $\alpha = \pi/2$ силы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ взаимно перпендикулярны, и из (4) получим

$$P = Q\left[\frac{r^2}{r^2 - f^2a^2} \pm \sqrt{\left(\frac{r^2}{r^2 - f^2a^2}\right)^2 - 1}\right]. \tag{7}$$

Знак минус не удовлетворяет условию задачи, так как при этом

$$\frac{r^2}{r^2 - f^2a^2} - \sqrt{\left(\frac{r^2}{r^2 - f^2a^2}\right)^2 - 1} < 1 \tag{8}$$

и, следовательно, $P < Q$, что противоречит условию. Неравенство (8) вытекает из того, что функция

$$\varphi(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$$

при $x = 1$ принимает значение $\varphi(1) = 1$ и при $x > 1$ монотонно убывает. Действительно,

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} < 0 \text{ при } x > 1,$$

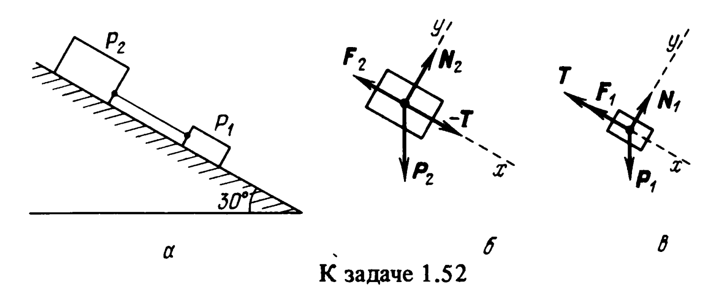
а в рассматриваемом случае

$$x = \frac{r^2}{r^2 - f^2 a^2} > 1.$$

Знак минус в равенстве (7) соответствует случаю $Q > P$, когда момент трения будет совпадать по направлению с моментом силы P.

Задача 1.52. На наклонной плоскости, образующей угол 30° с горизонтом, лежат два прямоугольных груза весом $P_1 = 4$ кН и $P_2 = 6$ кН, соединенные тросом (рис. *а*). Коэффициенты трения грузов о наклонную плоскость соответственно равны: $f_1 = 0{,}4$, $f_2 = 0{,}8$. Определить натяжение троса T и модули сил трения, действующих на грузы, F_1 и F_2. Будут ли грузы в покое или в движении?

Р е ш е н и е. Рассмотрим равновесие первого груза, отбросив мысленно связи – наклонную плоскость и трос (рис. *в*). На груз действуют вес P_1, нормальная реакция N_1, сила трения F_1 и натяжение троса T.



К задаче 1.52

Проектируя силы на оси координат и приравнивая суммы проекций нулю, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = P_1 \sin 30° - T - F_1 = 0,$$
$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = N_1 - P_1 \cos 30° = 0. \tag{1}$$

К этим уравнениям добавим записимость силы трения от нормального давления:

$$F_1 = f_1 N_1 = f_1 P_1 \cos 30°. \qquad (2)$$

Решая совместно систему уравнений (1) и (2), находим

$$T = P_1 \sin 30° - F_1 = P_1 \sin 30° - f_1 P_1 \cos 30° = 0{,}616 \text{ кН}. \qquad (3)$$

Следовательно, если бы трос отсутствовал, то первый груз начал бы двигаться вниз по наклонной плоскости. Для того чтобы ответить на вопрос, будут ли двигаться оба груза, необходимо рассмотреть равновесие второго груза (рис. *б*).

К грузу приложены: вес P_2, натяжение троса T, равное по модулю (3), нормальная реакция N_2 и сила трения F_2.

Проектируя эту систему сходящихся сил на оси координат, находим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} &= P_2 \sin 30° + T - F_2 = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} &= N_2 - P_2 \cos 30° = 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

Из первого уравнения системы (4) находим модуль сил трения:

$$F_2 = P_2 \sin 30° + T = 6 \cdot 0{,}5 + 0{,}616 = 3{,}616 \text{ кН}. \qquad (5)$$

Если найденное значение силы трения меньше ее максимального значения, то оба груза будут в покое. В противном случае они начнут двигаться.

Максимальное значение силы трения найдем из второго уравнения системы (4). Имеем

$$N_2 = P_2 \cos 30° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

и максимальное значение силы трения равно

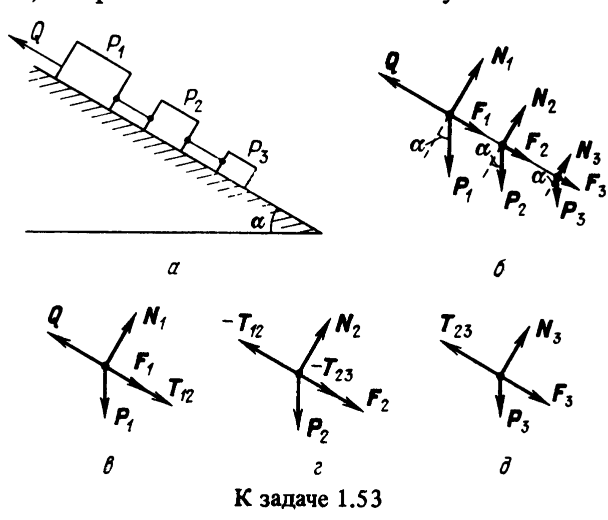
$$F_{2\max} = f_2 N_2 = 0{,}8 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4{,}152 \text{ кН}. \qquad (6)$$

Так как модуль силы трения, вычисленный исходя из уравнений равновесия (5), меньше ее максимального значения (6), то система будет находиться в покое. Очевидно, что сила трения, действующая на первый груз, равна ее максимальному возможному значению.

Задача 1.53. Три груза весом P_1, P_2, P_3, соединенные тросами, лежат на наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом (рис. *а*). Коэффициенты трения грузов о плоскость соответственно равны f_1, f_2, f_3. Опре-

делить силу, параллельную наклонной плоскости, при действии которой тела будут равномерно двигаться вверх по плоскости. Найти усилия в тросах T_{12}, T_{23}.

Решение. Рассмотрим равновесие трех грузов, так как при равномерном прямолинейном движении, как и при покое, силы, действующие на систему тел, должны быть в равновесии. Применяя принцип освобождаемости от связей, отбросим мысленно наклонную плоскость, заменив ее



К задаче 1.53

действие реакциями (рис. *б*). Тогда к системе трех грузов будут приложены активные силы P_1, P_2, P_3 и Q, нормальные реакции N_1, N_2, N_3 и силы трения F_1, F_2, F_3. Уравнения равновесия в проекциях на направление наклонной плоскости и на направление, перпендикулярное к ней, будут

$$Q - F_1 - P_1 \sin\alpha - F_2 - P_2 \sin\alpha - F_3 - P_3 \sin\alpha = 0, \quad (1)$$

$$N_1 + N_2 + N_3 - P_1 \cos\alpha - P_2 \cos\alpha - P_3 \cos\alpha = 0. \quad (2)$$

Рассмотрим далее равновесие каждого груза в отдельности, разрезав мысленно трос и заменив его действие реакцией. Составляя уравнения проекций на те же оси для каждого груза, имеем (рис. *в*, *г*, *д*)

$$Q - F_1 - T_{12} - P_1 \sin\alpha = 0, \quad (3)$$

$$N_1 - P_1 \cos\alpha = 0, \quad (4)$$

$$T_{12} - F_2 - T_{23} - P_2 \sin\alpha = 0, \quad (5)$$

$$N_2 - P_2 \cos\alpha = 0, \quad (6)$$

$$T_{23} - F_3 - P_3 \sin\alpha = 0, \quad (7)$$

$$N_3 - P_3 \cos\alpha = 0. \quad (8)$$

(Ось x направлена по наклонной плоскости вверх.)

Кроме того, запишем зависимости сил трения от нормального давления с учетом (4), (6) и (8):

$$F_1 = f_1 N_1 = f_1 P_1 \cos\alpha, \tag{9}$$

$$F_2 = f_2 N_2 = f_2 P_2 \cos\alpha, \tag{10}$$

$$F_3 = f_3 N_3 = f_3 P_3 \cos\alpha. \tag{11}$$

Тогда из (1) находим

$$Q = (P_1 + P_2 + P_3)\sin\alpha + (f_1 P_1 + f_2 P_2 + f_3 P_3)\cos\alpha. \tag{12}$$

При этом значении силы Q система трех грузов будет находиться в равновесии или равномерно двигаться вверх по плоскости.

Из (3) определяем натяжение:

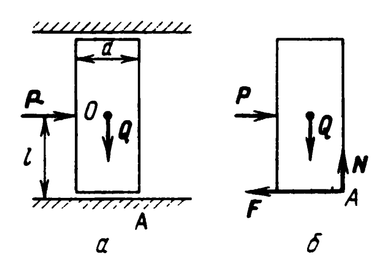
$$T_{12} = (P_2 + P_3)\sin\alpha + (f_2 P_2 + f_3 P_3)\cos\alpha. \tag{13}$$

Из (7) находим натяжение:

$$T_{23} = P_3 \sin\alpha + f_3 P_3 \cos\alpha. \tag{14}$$

Задача 1.54. Дверь купе в железнодорожном вагоне может скользить в горизонтальных желобах, расположенных сверху и снизу. Коэффициент трения между дверью и нижним желобом f. Центр тяжести двери лежит на оси симметрии. Найти максимальную высоту ручки двери l, при которой дверь не будет перекашиваться в желобах, если вес двери Q, ширина двери a (рис. a).

Решение. Отбросим мысленно желоба, заменим их действие нормальной реакцией N и силой трения F. Если бы горизонтальная сила P



К задаче 1.54

отсутствовала, то равнодействующая нормальных составляющих реакции N была бы приложена посредине двери и ее линия действия совпала бы с силой Q. При действии силы P возникает момент, стремящийся опрокинуть дверь. Этот момент образуется силами P и F. Для уравновешивания этого момента реакция N сдвигается вправо. Причем чем выше прикладывается сила P, тем больше становится опрокидывающий момент и тем дальше вправо сдвигается точка приложения реакции N. Крайней точкой

является точка A. Если и далее увеличивать высоту приложения силы P, то для уравновешивания сил дверь перекосится и возникнет реакция в левом верхнем углу двери, направленная вниз.

Рассмотрим предельное положение равновесия (рис. *б*), когда нормальная реакция приложена к точке A. Под предельным положением равновесия понимается крайнее положение, при котором дверь не перекашивается в желобах. К двери приложены активные силы Q и P, нормальная реакция N и сила трения F.

Составляем уравнения равновесия двери:

$$\Sigma F_{kx} = P - F = 0, \tag{1}$$

$$\Sigma F_{ky} = N - Q = 0, \tag{2}$$

$$\Sigma m_A(F_k) = -Pl + Q\frac{a}{2} = 0. \tag{3}$$

Запишем зависимость между силой трения и нормальным давлением:

$$F = fN. \tag{4}$$

Из уравнений (1), (2) и (4) находим

$$P = fQ. \tag{5}$$

Внеся это значение в уравнение (3), имеем

$$Q\frac{a}{2} = P \cdot l = fQl,$$

откуда

$$l = \frac{a}{2f}. \tag{6}$$

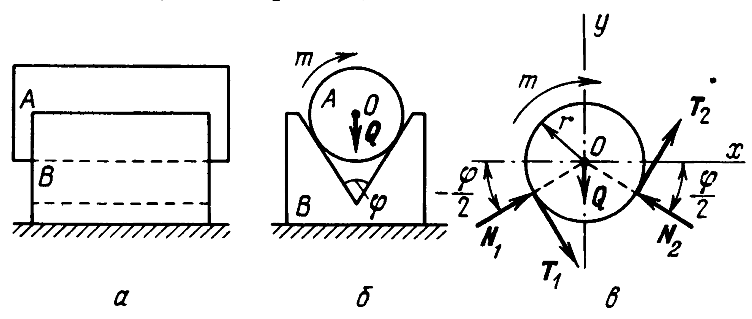
Если $l \leqslant a/(2f)$, то дверь не будет перекашиваться. Если же $l > a/(2f)$, то перекос неминуем. Значение l, соответствующее формуле (6), найдено при $P = fQ$. Если же $P < fQ$, то условие отсутствия перекоса находится из (3) непосредственно:

$$l_{max} = \frac{Qa}{2P}. \tag{7}$$

Задача 1.55. Цилиндр A весом Q и радиусом r лежит в горизонтальных направляющих B, образующих угол φ (рис. *а*, *б*).

Коэффициент трения скольжения между цилиндром и направляющими равен f. Определить максимальное значение момента m, при котором цилиндр еще не начнет вращаться в направляющих. Найти при этом реакции направляющих.

Решение. Рассмотрим равновесие цилиндра, отбросив мысленно направляющие и заменив их действие реакциями (рис. *в*). К цилиндру приложены активные: сила Q, момент m, а также нормальные реакции N_1 и N_2 и силы трения T_1 и T_2. Силы трения направлены по касательным к цилиндру в сторону, противоположную возможному движению. Углы, образованные нормальными реакциями с осью x, равны $\varphi/2$, углы между силами трения и осью y также равны $\varphi/2$.



К задаче 1.55

Составляем уравнения равновесия, приравняв нулю суммы проекций всех сил на оси x и y:

$$\Sigma F_{kx} = N_1\cos(\varphi/2) - N_2\cos(\varphi/2) + T_1\sin(\varphi/2) + T_2\sin(\varphi/2) = 0, \quad (1)$$

$$\Sigma F_{ky} = N_1\sin(\varphi/2) + N_2\sin(\varphi/2) - T_1\cos(\varphi/2) + T_2\cos(\varphi/2) - Q = 0. \quad (2)$$

Третье уравнение равновесия получим, приравняв нулю сумму моментов сил относительно центра цилиндра O:

$$\Sigma m_O(\boldsymbol{F}_k) = T_1 r + T_2 r - m = 0. \quad (3)$$

В этих трех уравнениях пять неизвестных: m, N_1, N_2, T_1, T_2. Запишем соотношения между нормальными реакциями и силами трения:

$$T_1 = fN_1, \quad T_2 = fN_2. \quad (4)$$

Для определения неизвестных подставим значения сил трения (4) в уравнения (1) и (2):

$$(N_1 - N_2)\cos(\varphi/2) + f(N_1 + N_2)\sin(\varphi/2) = 0, \quad (5)$$

$$-f(N_1 - N_2)\cos(\varphi/2) + (N_1 + N_2)\sin(\varphi/2) = Q.$$

Умножим первое уравнение системы (5) на f и сложим со вторым уравнением этой системы. Тогда найдем

$$N_1 + N_2 = \frac{Q}{(1 + f^2)\sin(\varphi/2)}. \quad (6)$$

Подставляя это значение в уравнение моментов (3), с учетом равенств (4) находим

$$m = rf(N_1 + N_2), \tag{7}$$

или, окончательно,

$$m = \frac{frQ}{(1+f^2)\sin(\varphi/2)}. \tag{8}$$

Это – максимальное значение момента, при котором цилиндр еще будет оставаться в покое или же будет равномерно вращаться.

Переходим к определению реакций. Внеся в уравнение (2) вместо суммы нормальных реакций (6), получим

$$\frac{Q}{1+f^2} - T_1\cos(\varphi/2) + T_2\cos(\varphi/2) - Q = 0. \tag{9}$$

Подставляя в уравнение (3) значение момента (8), находим

$$T_1 + T_2 = \frac{fQ}{(1+f^2)\sin(\varphi/2)}. \tag{10}$$

Умножая уравнение (10) на $\cos(\varphi/2)$ и складывая с уравнением (9), имеем

$$T_2 = \frac{fQ}{2(1+f^2)\sin(\varphi/2)} + \frac{1}{2\cos(\varphi/2)}\left(Q - \frac{Q}{1+f^2}\right). \tag{11}$$

Подставляя это значение в равенство (10), находим

$$T_1 = \frac{fQ}{2(1+f^2)\sin(\varphi/2)} - \frac{1}{2\cos(\varphi/2)}\left(Q - \frac{Q}{1+f^2}\right). \tag{12}$$

Соответственно нормальные реакции определяются из равенств (4):

$$N_2 = \frac{Q}{2(1+f^2)\sin(\varphi/2)} + \frac{1}{2f\cos(\varphi/2)}\left(Q - \frac{Q}{1+f^2}\right), \tag{13}$$

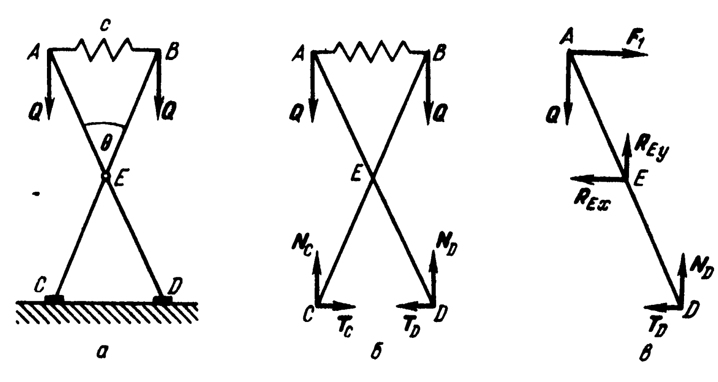
$$N_1 = \frac{Q}{2(1+f^2)\sin(\varphi/2)} - \frac{1}{2f\cos(\varphi/2)}\left(Q - \frac{Q}{1+f^2}\right). \tag{14}$$

Отметим, что, несмотря на кажущуюся симметрию, реакции N_1 и N_2 получились разными по модулю. Это объясняется действием момента m, который вносит асимметрию в условие задачи.

Задача 1.56. Два невесомых стержня AD и BC соединены шарнирно в средней точке E. Нижние концы стержней могут скользить по шероховатой горизонтальной поверхности (коэффициент трения f). Верхние концы

стержней соединены пружиной жесткости c и нагружены вертикальными силами Q. Длина каждого стержня $2b$, длина недеформированной пружины b. Найти, какой угол θ составляют между собой стержни в положении равновесия, а также реакцию шарнира E.

Решение. Рассмотрим сначала равновесие всей системы в целом, освободив ее от опоры на шероховатую плоскость и заменив ее действие силами: нормальными составляющими реакций N_C и N_D; касательными



К задаче 1.56

составляющими реакций T_C и T_D (рис. б). Касательные составляющие реакций будем считать равными их предельным значениям:

$$T_C = fN_C \text{ и } T_D = fN_D.$$

Составляем уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = 0, \qquad fN_C - fN_D = 0,$$

$$\Sigma F_{ky} = 0, \qquad N_C + N_D - 2Q = 0,$$

$$\Sigma m_C(F_k) = 0, \qquad -Qb\sin\frac{\theta}{2} + N_D b \sin\frac{\theta}{2} = 0.$$

Получаем из этих уравнений

$$N_C = N_D = Q.$$

Далее, расчленим систему и рассмотрим равновесие одного из стержней, например AD (рис. в). К стержню AD приложены следующие силы: в точке A — сила упругости пружины F_1 и заданная вертикальная нагрузка Q; в точке D — уже известные нам реакции $N_D = Q$ и $T_D = fN_D = fQ$, в точке E — реакция, заменяющая действие отброшенного стержня BC. Эта реакция может быть разложена на две неизвестные составляющие R_{Ex} и R_{Ey}.

Для нахождения угла θ составим уравнение моментов всех сил, действующих на стержень AD относительно точки E, и приравняем эту сумму моментов нулю:

$$\Sigma m_E(F_k) = 0, \quad Q \cdot b \sin\frac{\theta}{2} - F_1 \cdot b \cos\frac{\theta}{2} + N_D \cdot b \sin\frac{\theta}{2} - T_D \cdot b \cos\frac{\theta}{2} = 0.$$

Подставляя в это уравнение значения N_D и T_D, а также силу упругости, вычисленную согласно закону Гука

$$F_1 = c \cdot \Delta b = c\left(2b \sin\frac{\theta}{2} - b\right) = cb\left(2\sin\frac{\theta}{2} - 1\right),$$

получаем после сокращения

$$Q \cdot 2\sin\frac{\theta}{2} - cb\left(2\sin\frac{\theta}{2} - 1\right)\cos\frac{\theta}{2} - fQ\cos\frac{\theta}{2} = 0$$

или

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - \frac{f}{2} = \frac{cb}{2Q}\left(2\sin\frac{\theta}{2} - 1\right).$$

При заданных значениях Q, f, b и c это уравнение может быть решено графически.

Для нахождения реакции шарнира E необходимо составить два уравнения равновесия – сумму проекций всех сил на оси x и y приравнять нулю:

$$\Sigma F_{kx} = F_1 - R_{Ex} - T_D = 0,$$
$$\Sigma F_{ky} = N_D - Q + R_{Ey} = 0.$$

Из этих уравнений с учетом ранее найденных величин N_D, T_D и угла θ находятся неизвестные

$$R_{Ex} = T_D - F_1 = fQ - c\left(2b\sin\frac{\theta}{2} - b\right),$$
$$R_{Ey} = Q - N_D = 0.$$

Задача 1.57. Вертикальная мачта весом Q поддерживается кронштейном, опирающимся на ролик C. Коэффициент трения в направляющих A и B одинаков и равен f. Размеры указаны на рис. *а*. Определить реакции опор A, B и C.

Решение. Освобождаем мысленно мачту от опор и заменяем их действие реакциями, как показано на расчетной схеме (рис. *б*).

Направление реакций N_A и N_B выбрано из соображений возможного перекоса мачты под действием реакции R_C.

Моменты сил N_A и N_B должны противодействовать моменту силы R_C. Направление сил трения определяется направлением возможного проскальзывания тяжелой мачты вниз. Максимальные значения сил трения

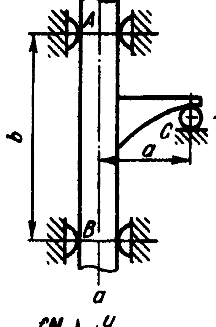
$$F_A = fN_A, \qquad F_B = fN_B.$$

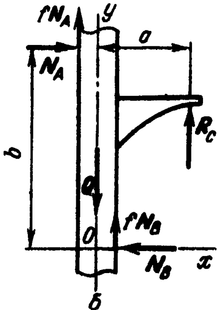
Записываем три уравнения равновесия произвольной плоской системы сил:

$$\Sigma F_{ix} = 0, \qquad N_A - N_B = 0, \qquad (1)$$

$$\Sigma F_{iy} = 0, \qquad fN_A + fN_B + R_C - Q = 0, \qquad (2)$$

$$\Sigma m_{i(O)} = 0, \quad -N_A \cdot b - fN_A \cdot r + fN_B \cdot r + R_C \cdot a = 0. \qquad (3)$$





К задаче 1.57

В уравнении моментов содержится неизвестный радиус мачты r. Далее будет видно, что он не понадобится. Из уравнения (1) получаем равенство нормальных реакций

$$N_A = N_B,$$

а значит, и сил трения

$$fN_A = fN_B.$$

Тогда уравнения (2) и (3) примут вид

$$2fN_A + R_C - Q = 0, \qquad -N_A \cdot b + R_C \cdot a = 0.$$

Решая эту систему, получаем

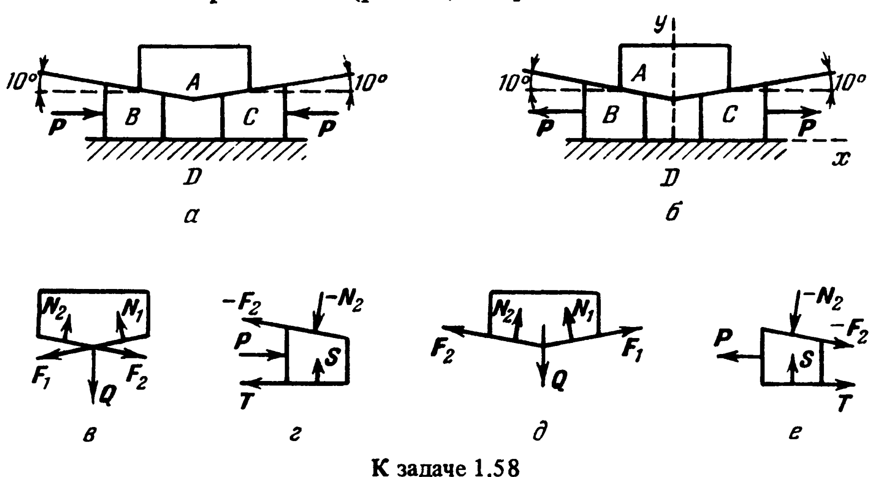
$$N_A = N_B = \frac{Qa}{2fa + b}, \qquad R_C = \frac{Qb}{2fa + b}.$$

Таким образом, две равные, параллельные и противоположно направленные силы N_A и N_B образуют пару сил, стремящуюся повернуть мачту по ходу часовой стрелки. Такую же пару сил, но действующую против хода часовой стрелки, образуют силы F_A, F_B, Q, R_C. Обе пары сил уравновешиваются.

Задача 1.58. Для подъема (рис. *а*) или опускания (рис. *б*) каменного блока A, весящего 20 кН, применили два клина B и C. Коэффициент трения для соприкасающихся поверхностей AB и AC равен $f = 0{,}2$, а для поверхностей BD и CD равен $f_1 = 0{,}25$.

Найти равные по модулю горизонтальные силы P, сжимающие клинья, необходимые для подъема блока A. Определить силы P, растягивающие клинья, необходимые для опускания блока A. Наклонные плоскости соприкосновения блока с клиньями образуют угол 10° с горизонтом.

Решение. Рассмотрим равновесие системы тел, состоящей из блока A и клиньев B и C. При подъеме блока (рис. a) силы P сжимают клинья. Рассмотрим отдельно равновесие блока и равновесие клина. Отбросив мысленно клинья, заменим их действие на блок нормальными реакциями N и силами трения F (рис. $в$). Кроме того, на блок действует



К задаче 1.58

известная сила – вес Q. Составим два уравнения равновесия, приравняв нулю суммы проекций всех сил на оси x и y:

$$\Sigma F_{kx} = N_2 \sin 10^\circ - N_1 \sin 10^\circ + F_2 \cos 10^\circ - F_1 \cos 10^\circ = 0,$$

$$\Sigma F_{ky} = N_1 \cos 10^\circ + N_2 \cos 10^\circ - Q - F_1 \sin 10^\circ - F_2 \sin 10^\circ = 0.$$

Кроме того, запишем зависимость сил трения от нормального давления

$$F_1 = fN_1, \quad F_2 = fN_2.$$

Тогда находим

$$N_1 = N_2 = 10{,}5 \text{ кН}, \quad F_1 = F_2 = 2{,}1 \text{ кН}.$$

Перейдем, далее, к рассмотрению равновесия клина B (рис. $г$). На клин действуют: реакция блока, которая раскладывается на нормальную составляющую $-N_2$ и силу трения $-F_2$, активная сила P и реакция пола, разложенная на нормальную силу S и силу трения T. Напишем уравнения равновесия для клина B:

$$\Sigma F_{kx} = -N_2 \sin 10^\circ - F_2 \cos 10^\circ - T + P = 0,$$

$$\Sigma F_{ky} = S + F_2 \sin 10^\circ - N_2 \cos 10^\circ = 0.$$

Кроме того, имеем зависимость силы трения от нормального давления

$$T = f_1 S.$$

Отсюда, пользуясь найденными ранее значениями реакций, найдем

$$S = 9{,}96 \text{ кН}, \quad T = 2{,}49 \text{ кН}, \quad P = 6{,}41 \text{ кН}.$$

Таким образом, для равновесия системы при подъеме блока получено необходимое граничное значение силы $P = 6{,}41$ кН. Если же $P > 6{,}41$ кН, то начнется подъем блока; система придет в движение.

Перейдем к определению величины силы $\boldsymbol{P}$ при спуске блока. Блок A находится в равновесии (рис. *д*) под действием активной силы — веса $\boldsymbol{Q}$, нормальных реакций клиньев $\boldsymbol{N}_1$ и $\boldsymbol{N}_2$ и сил трения $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$. Силы трения в этом случае направлены вдоль наклонной плоскости вверх. Это сразу видно из рассмотрения равновесия клина B (рис. *е*), так как в связи с изменением направления силы $\boldsymbol{P}$ на прямо противоположное силы $\boldsymbol{T}$ и $-\boldsymbol{F}_2$ меняют свое направление на противоположное по сравнению с предыдущим случаем (рис. *г*).

Уравнения равновесия для блока A будут

$$\Sigma F_{kx} = F_1 \cos 10^\circ - F_2 \cos 10^\circ - N_1 \sin 10^\circ + N_2 \sin 10^\circ = 0,$$
$$\Sigma F_{ky} = N_1 \cos 10^\circ + N_2 \cos 10^\circ + F_1 \sin 10^\circ + F_2 \sin 10^\circ - Q = 0.$$

Кроме того, зависимость силы трения от нормального давления дается равенствами

$$F_1 = fN_1, \quad F_2 = fN_2.$$

Отсюда находим

$$N_1 = N_2 = 9{,}8 \text{ кН}, \quad F_1 = F_2 = 1{,}96 \text{ кН}.$$

Уравнения равновесия для клина B (рис. *е*) будут:

$$\Sigma F_{kx} = T + F_2 \cos 10^\circ - N_2 \sin 10^\circ - P = 0,$$
$$\Sigma F_{ky} = S - N_2 \cos 10^\circ - F_2 \sin 10^\circ = 0.$$

Сила трения выражается через нормальное давление

$$T = f_1 S.$$

Отсюда, пользуясь ранее найденными значениями реакций N_2 и F_2, найдем

$$S = 9{,}99 \text{ кН}, \quad T = 2{,}50 \text{ кН}, \quad P = 2{,}73 \text{ кН}.$$

Найденное значение $\boldsymbol{P}$ является граничным при равновесии системы в случае опускания блока.

Таким образом, на основании проведенного исследования можно заключить, что система будет находиться в равновесии, если проекция си-

лы P лежит в пределах

$$-2{,}73 \text{ кН} < P_x < 6{,}41 \text{ кН}.$$

Если модуль каждой из сил P будет больше 6,41 кН, то при их направлении, указанном на рис. *а*, начнется подъем блока. Для того чтобы блок начал опускаться, нужно приложить силы P в противоположном направлении, причем их модуль должен превышать 2,73 кН.

Эта задача характерна для исследования равновесия сил трения. Показано, что существует диапазон значений сил, стремящихся нарушить равновесие тел, и в этом диапазоне равновесие сохраняется.

Задача 1.59. Два груза Q_1 и Q_2 связаны нерастяжимой гибкой нитью (рис. *а*). Груз Q_1 расположен на шероховатой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, а груз Q_2 – на цилиндрической поверхности, примыкающей к наклонной плоскости в высшей точке вертикального диаметра. Коэффициент трения о наклонную плоскость $f_1 = \operatorname{tg}\beta_1$, о цилиндрическую поверхность $f_2 = \operatorname{tg}\beta_2$ (β_1, β_2 – соответствующие углы трения).

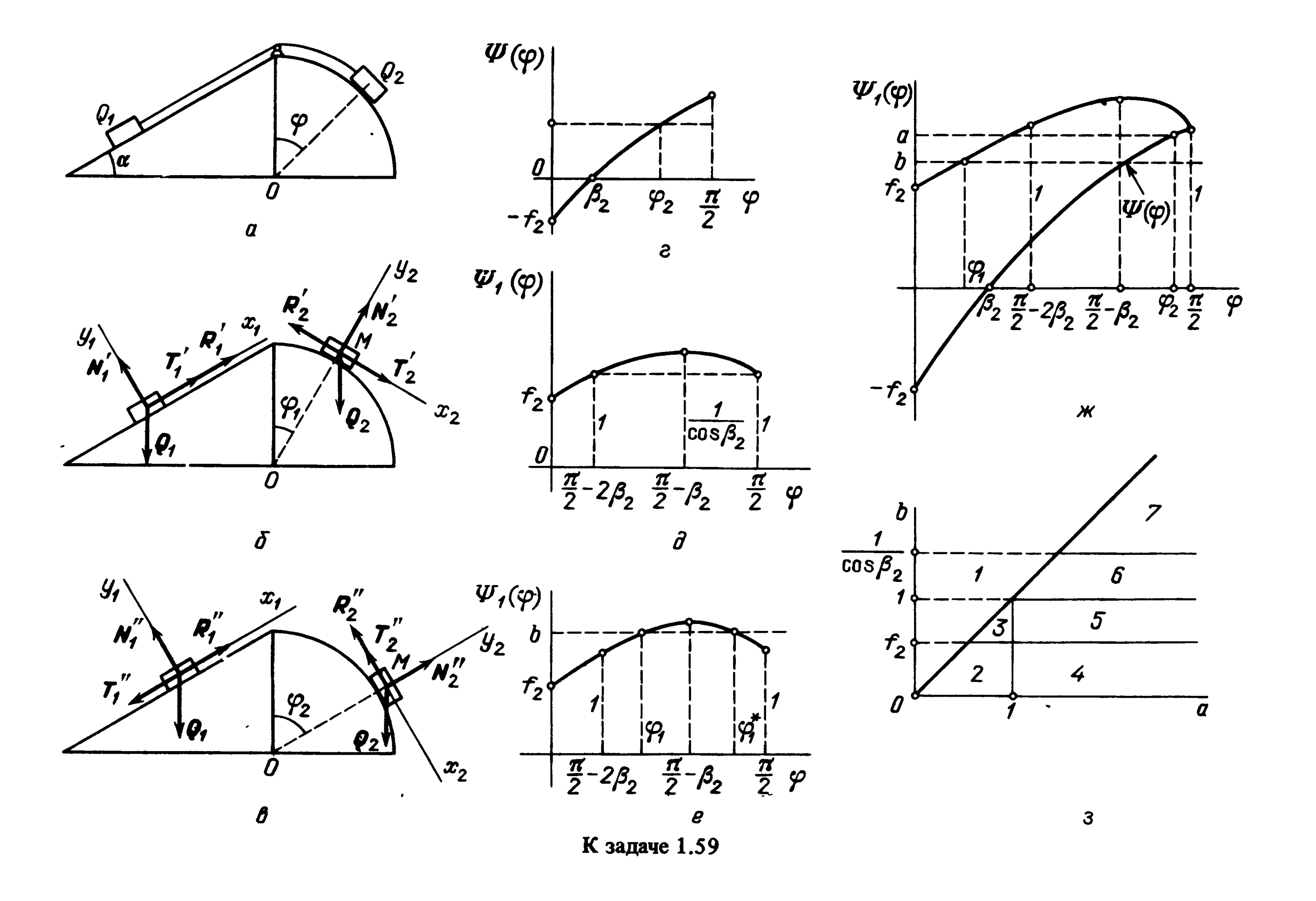
При каких значениях угла φ, определяющего положение груза Q_2, возможно равновесие?

Угол φ отсчитывается от вертикального диаметра. Трением нити о поверхности пренебречь.

Р е ш е н и е. При составлении уравнений равновесия нужно учитывать для каждого тела силу веса, направленную вертикально вниз, нормальную реакцию поверхности, направленную перпендикулярно плоскости (для Q_1) и по нормали к окружности (т.е. по радиусу для Q_2), силу натяжения нити R, направленную всегда внутрь нити, т.е. вдоль плоскости вверх (для Q_1), и по касательной к окружности вверх (для Q_2). Кроме того, нужно учитывать силу трения.

Здесь возможны два случая. Пусть система находится в равновесии, но при малейшем увеличении груза Q_1 он будет перетягивать систему и начнет двигаться вниз (рис. *б*). В этом случае сила трения T_1', направленная против возможного движения, должна быть направлена так же, как сила R_1'. Поскольку груз Q_2 должен при этом двигаться вверх, то сила T_2' должна быть направлена против направления движения, т.е. вниз. Если теперь уменьшить груз Q_1 (или, что эквивалентно, увеличить Q_2), то, по непрерывности, направление силы T_1' сохранится, хотя модуль ее будет уменьшаться. Если модуль силы Q_1 дойдет до нуля (т.е. груз будет удерживаться только за счет силы R_1'), то при дальнейшем увеличении Q_2 направление силы T_1'' изменится, она станет направлена противоположно R_1'' и соответственно сила T_2'' – в сторону R_2'' (рис. *в*). Если увеличивать Q_2 еще больше, то сила T_1'' дойдет до своего предельного значения.

Таким образом, систему уравнений равновесия нужно составить для двух случаев.



а
б
в
г
д
е
ж
з
Q_1
Q_2
φ
α
0
x_1
y_1
x_2
y_2
M
N'_1
T'_1
R'_1
N'_2
T'_2
R'_2
N''_1
T''_1
R''_1
N''_2
T''_2
R''_2
φ_1
φ_2
$\Psi(\varphi)$
$\Psi_1(\varphi)$
f_2
$-f_2$
β_2
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}-2\beta_2$
$\frac{\pi}{2}-\beta_2$
$\frac{1}{\cos\beta_2}$
φ_1^*
a
b

К задаче 1.59

Случай 1 (рис. *б*). Груз Q_1 в пределе движется вниз, т.е. сила T_1' направлена по наклонной плоскости вверх. Уравнения равновесия для груза Q_1 будут

$$N_1' = Q_1 \cos\alpha, \tag{1}$$

$$R_1' + T_1' = Q_1 \sin\alpha. \tag{2}$$

Кроме того, согласно законам трения T_1' не может превосходить предельного значения

$$T_1' \leqslant f_1 N_1'. \tag{3}$$

Для груза Q_2, проектируя силы на оси x_2, y_2, находим

$$N_2' = Q_2 \cos\varphi_1, \tag{4}$$

$$R_2' - T_2' = Q_2 \sin\varphi_1, \tag{5}$$

$$T_2' \leqslant f_2 N_2'. \tag{6}$$

Случай 2 (рис. *в*). Груз Q_1 в пределе движется вверх, т.е. сила T_1'' направлена по наклонной плоскости вниз. Тогда для груза Q_1, проектируя силы на оси x_1 и y_1, имеем

$$N_1'' = Q_1 \cos\alpha, \tag{7}$$

$$R_1'' - T_1'' = Q_1 \sin\alpha, \tag{8}$$

$$T_1'' \leqslant f_1 N_1''. \tag{9}$$

Для груза Q_2 (который теперь может двигаться только вниз), проектируя силы на оси x_2 и y_1, получаем

$$N_2'' = Q_2 \cos\varphi_2, \tag{10}$$

$$R_2'' + T_2'' = Q_2 \sin\varphi_2, \tag{11}$$

$$T_2'' \leqslant f_2 N_2''. \tag{12}$$

Исследование полученных уравнений зависит от того, будет ли $\operatorname{tg}\alpha < f_1$ или $\operatorname{tg}\alpha > f_1$.

А. Рассмотрим случай $\operatorname{tg}\alpha < f_1$. Из уравнения (2)

$$R_1' = Q_1 \sin\alpha - T_1'. \tag{13}$$

Из уравнения (3)

$$T_1' \leqslant T_{1\,max} = f_1 N_1' = f_1 Q_1 \cos\alpha. \tag{14}$$

Для того чтобы точка двинулась вниз, надо, чтобы

$$T_1' = T_{1\,max}' = f_1 Q_1 \cos\alpha. \tag{15}$$

Но тогда согласно уравнению (2)

$$R_1' = Q_1 \sin\alpha - f_1 Q_1 \cos\alpha = Q_1 \cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha - f_1) < 0, \tag{16}$$

что невозможно. Следовательно, движения нет и $R_1'' = 0$. Поэтому при $\operatorname{tg}\alpha < f_1$ движение груза Q_1 вниз невозможно. Это известный факт – поскольку из соотношения $\operatorname{tg}\alpha < f_1$ следует

$$\alpha < \beta_1, \tag{17}$$

т.е. угол наклона плоскости меньше угла трения.

Следовательно, при $\operatorname{tg}\alpha < f_1$ надо рассмотреть только случай 2. Очевидно, что при малых углах φ груз Q_2 перетягивать не будет. Рассмотрим, следовательно, случай $R_2 = 0$. Тогда для того чтобы груз Q_2 стронулся, нужно, чтобы T_2 было больше $T_{2\max}$

$$T_{2\max}'' = f_2 N_2. \tag{18}$$

Предельный случай находится из уравнения (11) (при $R_2 = 0$)

$$T_{2\max}'' = f_2 N_2'' = f_2 Q_2 \cos\varphi = Q_2 \sin\varphi. \tag{19}$$

Отсюда

$$f_2 = \operatorname{tg}\varphi, \tag{20}$$

$$\operatorname{tg}\beta_2 = \operatorname{tg}\varphi, \tag{21}$$

$$\varphi = \beta_2. \tag{22}$$

При

$$\varphi < \beta_2 \tag{23}$$

движения не будет.

Рассмотрим теперь случай $R \neq 0$.

Для того чтобы движение стало возможным, должен сдвинуться груз Q_1. В предельном случае это означает, что должно быть (9)

$$T_1'' = T_{1\max}''. \tag{24}$$

Из (7) находим

$$T_{1\max}'' = f_1 N_1'' = f_1 Q_1 \cos\alpha. \tag{25}$$

Тогда из (8) получим

$$R_{1\min}'' = T_{1\max}'' + Q_1 \sin\alpha = f_1 Q_1 \cos\alpha + Q_1 \sin\alpha = \\ = Q_1 (f_1 \cos\alpha + \sin\alpha). \tag{26}$$

Это минимальное значение натяжения, при котором сдвинется груз Q_1. Для того чтобы при этом сдвинулся груз Q_2, должно быть

$$T_2'' = T_{2\max}'' = f_2 N_2'' = f_2 Q_2 \cos\varphi.$$

Из (11) получим уравнение для угла φ

$$Q_2 \sin\varphi - f_2 Q_2 \cos\varphi = R_{1\min}'' = Q_1 (f_1 \cos\alpha + \sin\alpha). \tag{27}$$

Угол φ, удовлетворяющий этому уравнению, является тем минимальным углом, при котором может начаться движение. Он должен находиться в интервале $(0, \pi/2)$.

Перепишем уравнение (27) в виде

$$\Psi(\varphi) = \sin\varphi - f_2\cos\varphi = \frac{Q_1}{Q_2}(f_1\cos\alpha + \sin\alpha) \quad (28)$$

и исследуем функцию $\Psi(\varphi)$ в интервале $(0, \pi/2)$:

$$\Psi(0) = -f_2, \quad (29)$$

$$\Psi(\pi/2) = 1, \quad (30)$$

$$\Psi'(\varphi) = \cos\varphi + f_2\sin\varphi > 0 \text{ при } \varphi \in [0, \pi/2]. \quad (31)$$

Следовательно, функция $\Psi(\varphi)$ монотонно возрастает в интервале $(0, \pi/2)$.

Обозначим правую часть уравнения (28) через a:

$$\frac{Q_1}{Q_2}(f_1\cos\alpha + \sin\alpha) = a. \quad (32)$$

Очевидно, что

$$a > 0. \quad (33)$$

Уравнение

$$\Psi(\varphi) = a \quad (34)$$

имеет в интервале $(0, \pi/2)$ один корень при $a \in [0; 1]$ и ни одного корня при $a > 1$, поскольку эта функция монотонно возрастает (рис. *г*). Следовательно, при $a > 1$ имеем всегда $\Psi(\varphi) < a$, т.е. $R'' < R_{\min}$.

Натяжение нити не достигнет такого значения, чтобы груз Q_1 "стронулся". Это будет при

$$a > 1, \quad (35)$$

т.е. при достаточно больших Q_1 или малых Q_2. Если же $a \in [0; 1]$, то, обозначая корень уравнения $\Psi(\varphi) = a$ через φ_2, имеем

$$\Psi(\varphi) < a \text{ при } \varphi < \varphi_2, \quad (36)$$

$$\Psi(\varphi) > a \text{ при } \varphi > \varphi_2. \quad (37)$$

Следовательно, в первом случае $R < R_{\min}$, и будет равновесие, во втором начнется движение, так как $R > R_{\min}$.

Отметим, что функция $\Psi(\varphi) = \sin\varphi - f_2\cos\varphi$ обращается в нуль при $\varphi = \beta_2$. Это соответствует $R = 0$. Рассмотрение этой функции при $\varphi < \beta_2$ привело бы к $R < 0$ и не имеет физического смысла. Это соответствует ранее полученному выводу. Можно получить явное выражение для "пре-

дельного" угла φ_2. Из (32) имеем

$$\sin\varphi_2 - f_2\cos\varphi_2 = \sin\varphi_2 - \operatorname{tg}\beta_2\cos\varphi_2 = \frac{\sin\varphi_2\cos\beta_2 - \sin\beta_2\cos\varphi_2}{\cos\beta_2} =$$

$$= \frac{\sin(\varphi_2 - \beta_2)}{\cos\beta_2} = a. \tag{38}$$

Отсюда

$$\varphi_2 = \beta_2 + \arcsin(a\cos\beta_2) = \beta_2 + \arcsin\left[\frac{Q_1\cos\beta_2}{Q_2}(f\cos\alpha + \sin\alpha)\right]. \tag{39}$$

Нужно учесть, что это выражение имеет физический смысл только при $a \in [0; 1]$.

Окончательно при $\operatorname{tg}\alpha < f_1$ равновесие возможно при всех углах φ, если выполняется условие (35), и на отрезке $[0, \varphi_2]$, где φ_2 определяется из (32) (или (39)), если (35) не выполняется.

Б. Рассмотрим теперь случай $\operatorname{tg}\alpha > f_1$ (рис. *б*). В этом случае движение груза Q_1 вниз становится возможным. Для этого нужно, чтобы уравнение (2) не могло удовлетворяться. Предельный случай возникает, когда

$$T_1' = T'_{1\max} = f_1 N_1' = f_1 Q\cos\alpha. \tag{40}$$

Из (2) имеем соответственно

$$R'_{\min} = Q_1\sin\alpha - f_1 Q_1\cos\alpha = Q_1(\sin\alpha - f_1\cos\alpha) =$$
$$= Q_1\cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha - f_1). \tag{41}$$

В данном случае $R'_{\min}$ положительно, как и должно быть.

Для того чтобы движение могло начаться, необходимо, чтобы мог сдвинуться груз Q_2. Соответствующий предельный случай получаем из уравнений (4)–(6):

$$T_2' = T'_{2\max} = f_2 N_2' = f_2 Q_2\cos\varphi, \tag{42}$$

$$R'_{\min} = Q_2\sin\varphi + Q_2 f_2\sin\varphi = Q_2(\sin\varphi + f_2\cos\varphi) =$$
$$= Q_2\cos\varphi(f_2 + \operatorname{tg}\varphi). \tag{43}$$

Приравнивая (41) и (43), получаем

$$Q_2(\sin\varphi + f_2\cos\varphi) = Q_1(\sin\alpha - f_1\cos\alpha). \tag{44}$$

Это уравнение дает предельные значения угла φ, при котором возможно движение груза Q_1 вниз, а груза Q_2 вверх. Перепишем (44) в виде

$$\sin\varphi + f_2\cos\varphi = \frac{Q_1}{Q_2}(\sin\alpha - f_1\cos\alpha). \tag{45}$$

Введем обозначения

$$\Psi_1(\varphi) = \sin\varphi + f_2 \cos\varphi, \tag{46}$$

$$\frac{Q_1}{Q_2}(\sin\alpha - f_1 \cos\alpha) = b. \tag{47}$$

Тогда уравнение (45) запишется в виде

$$\Psi_1(\varphi) = b. \tag{48}$$

Надо найти решение этого уравнения на отрезке $[0, \pi/2]$. Исследуем функцию $\Psi_1(\varphi)$ на этом отрезке. Имеем (рис. ∂)

$$\Psi_1(0) = f_2, \tag{49}$$

$$\Psi_1(\pi/2) = 1, \tag{50}$$

$$\Psi_1'(\varphi) = \cos\varphi - f_2 \sin\varphi. \tag{51}$$

Производная $\Psi_1'(\varphi)$ на отрезке $[0, \pi/2]$ обращается в нуль только в одной точке. Действительно, если

$$\Psi_1'(\varphi) = \cos\varphi - f_2 \sin\varphi = 0, \tag{52}$$

то

$$\operatorname{ctg}\varphi = f_2 = \operatorname{tg}\beta_2. \tag{53}$$

Отсюда

$$\varphi^* = \pi/2 - \beta_2. \tag{54}$$

Остальные решения уравнения (53) лежат вне указанного отрезка. Поскольку производная обращается в нуль только в одной точке, то это — точка экстремума

$$\Psi_{1\,\mathrm{extr}} = \Psi_1(\varphi^*) = \sin\varphi^* + f_2 \cos\varphi^* = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta_2\right) +$$

$$+ \operatorname{tg}\beta_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta_2\right) = \cos\beta_2 + \frac{\sin\beta_2}{\cos\beta_2}\sin\beta_2 = \frac{1}{\cos\beta_2}. \tag{55}$$

Поскольку $f_2 < 1$ (коэффициент трения), то из трех значений (49), (50), (55) (граничных и экстремального) наименьшим является f_2, а наибольшим $1/\cos\beta_2$.

Отметим, что поскольку $f_2 = \operatorname{tg}\beta_2 < 1$, то $\beta_2 < \pi/4$ и, следовательно, $\pi/2 - \beta_2 > \pi/4$.

Найдем также вторую точку на отрезке $[0, \pi/2]$, где $\Psi_1(\varphi)$ обращается в единицу:

$$\Psi_1(\varphi) = \sin\varphi + f_2 \cos\varphi = \sin\varphi + \operatorname{tg}\beta_2 \cos\varphi = \frac{\sin(\varphi + \beta_2)}{\cos\beta_2} = 1. \tag{56}$$

Имеем

$$\sin(\varphi + \beta_2) = \cos\beta_2 = \sin(\pi/2 - \beta_2). \tag{57}$$

Отсюда либо

$$\varphi + \beta_2 + \pi/2 - \beta_2 = \pi, \tag{58}$$

т.е.

$$\varphi = \pi/2, \tag{59}$$

либо

$$\varphi + \beta_2 = \pi/2 - \beta_2, \tag{60}$$

т.е.

$$\varphi = \pi/2 - 2\beta_2. \tag{61}$$

Рассмотрим теперь решение уравнения (47). Оно, очевидно, зависит от параметра b.

Если

$$b > \frac{1}{\cos\beta_2}, \tag{62}$$

т.е. больше наибольшего значения $\Psi(\varphi)$, то решения нет.

При всех значениях угла φ имеем $\Psi(\varphi) < b$, сила R не может достигать значения R_{min}, достаточного для удержания груза Q_1, и, следовательно, независимо от значения φ груз Q_1 будет двигаться вниз.

Из (45) и (62) получаем, что это соответствует условию

$$\frac{Q_1}{Q_2}(\sin\alpha - f_1\cos\alpha) > \frac{1}{\cos\beta_2} \tag{63}$$

и означает, что груз Q_2 слишком мал (или груз Q_1 слишком велик). С другой стороны, если

$$\frac{Q_1}{Q_2}(\sin\alpha - f_1\cos\alpha) = b < f_2 = \operatorname{tg}\beta_2, \tag{64}$$

то при всех значениях угла $\varphi \in [0, \pi/2]$ имеем $\Psi(\varphi) > b$. Следовательно, груз Q_2 всегда перетягивает. Ни при каком значении φ движение груза Q_1 вниз невозможно. (Это, конечно, не означает равновесия, поскольку возможно движение вверх.)

Рассмотрим теперь промежуточные значения параметра b. Если

$$1 < b < \frac{1}{\sin\beta_2}, \tag{65}$$

то уравнение (48) имеет два корня φ_1, φ_1^* (рис. e).

Очевидно, что между этими корнями

$$\Psi_1(\varphi) > b, \quad \varphi \in (\varphi_1, \varphi_1^*), \tag{66}$$

а вне соответствующего интервала

$$\Psi_1(\varphi) < b \quad \varphi \in [0, \varphi_1] \text{ и } \varphi \in (\varphi_1^*, \pi/2). \tag{67}$$

Отсюда следует, что в интервале, соответствующем (66), движение груза Q_1 вниз невозможно, а в интервале, соответствующем (67), груз Q_2 удержать груз Q_1 от движения вниз не сможет (для первого из этих интервалов слишком мала касательная составляющая веса Q_2, а для второго – сила трения).

Если же

$$\operatorname{tg}\beta_2 = f_2 < b < 1, \tag{68}$$

то уравнение (48) имеет только один корень φ_1, причем

$$\Psi_1(\varphi) > b \quad \text{при} \quad \varphi > \varphi_1, \tag{69}$$

$$\Psi_1(\varphi) < b \quad \text{при} \quad \varphi < \varphi_1. \tag{70}$$

Следовательно, находясь в интервале $(\varphi_1, \pi/2)$, груз Q_2 сможет удержать груз Q_1 от движения вниз, а на отрезке $[0, \varphi_1]$ – не сможет.

Резюмируем: при $\operatorname{tg}\alpha > f_1$ возможность равновесия по отношению к движению вниз определяется параметром

$$b = \frac{Q_1}{Q_2}(\sin\alpha - f_1\cos\alpha) = \frac{Q_1}{Q_2}\cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha - f_1) = \frac{Q_1}{Q_2}\,\frac{\sin(\alpha - f_1)}{\cos\beta_1}. \tag{71}$$

При

$$\beta > \frac{1}{\cos\beta_2}$$

равновесие невозможно ни при каком значении угла φ.

При

$$b < f_2 \tag{72}$$

движение груза Q_1 вниз невозможно ни при каком угле φ.

При

$$1 < b < \frac{1}{\cos\beta_2}$$

движение груза вниз невозможно при $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_1^*)$, при других значениях угла φ равновесие невозможно (φ_1, φ_1^* определяются уравнением (48)).

При

$$f_2 < b < 1$$

движение груза Q_1 вниз невозможно при $\varphi > \varphi_1$ (где φ_1 определяется уравнением (48)), при $\varphi < \varphi_1$ равновесие невозможно.

Рассмотрим теперь движение груза Q_1 вверх. Поскольку теперь нужно использовать уравнения (7)–(12), где силы T_1' и составляющая силы Q_1 вдоль плоскости действуют в одном направлении, то случай $R = 0$ отдельно рассматривать не нужно. Поэтому выводы, сделанные для случая $\operatorname{tg}\alpha < f_1$, здесь остаются в силе. Движение груза Q_1 вверх (т.е. груза Q_2 вниз) невозможно (см. (35)), если

$$\frac{Q_1}{Q_2}(f_1 \cos\alpha + \sin\alpha) = a > 1.$$

Если же

$$\frac{Q_1}{Q_2}(f_1 \cos\alpha + \sin\alpha) = a < 1, \tag{73}$$

то движение груза Q_1 вверх возможно, если

$$\varphi > \varphi_2, \tag{74}$$

где φ_2 – корень уравнения

$$\Psi(\varphi) = a,$$

и невозможно, т.е. имеет место равновесие (по отношению к движению Q_1 вверх), если

$$\varphi < \varphi_2. \tag{75}$$

Соединяя предыдущие результаты, окончательно имеем: возможность равновесия при $\operatorname{tg}\alpha > f_1$ определяется параметрами a и b.

Если

$$b > \frac{1}{\cos\beta_2}, \tag{76}$$

равновесие невозможно.

Если

$$b < f_2 \quad \text{и} \quad a > 1, \tag{77}$$

то равновесие имеет место при всех углах φ.

Если

$$f_2 < b < 1 \quad \text{и} \quad a > 1, \tag{78}$$

то равновесие имеет место при $\varphi \in (\varphi_1, \pi/2)$, где φ_1 определяется из условия

$$\Psi_1(\varphi_1) = b. \tag{79}$$

Угол φ_1 можно найти в явном виде, используя для $\Psi_1(\varphi)$ выражение

$$\Psi_1(\varphi) = \sin\varphi + f_2\cos\varphi = \sin\varphi + \operatorname{tg}\beta_2\cos\varphi = \frac{\sin(\varphi+\beta_2)}{\cos\beta_2}. \tag{80}$$

Из уравнения

$$\Psi_1(\varphi_1) = \frac{\sin(\varphi_1+\beta_2)}{\cos\beta_2} = b \tag{81}$$

находим

$$\varphi_1 = -\beta_2 + \arcsin(b\cos\beta_2). \tag{82}$$

Отметим, что величина φ_1 является положительной, поскольку из $b > f_2$ следует $b > \operatorname{tg}\beta_2$, так как $b\cos\beta_2 > \sin\beta_2$ и $\arcsin(b\cos\beta_2) > \arcsin(\sin\beta_2) = \beta_2$. Если

$$1 < b < 1/\cos\beta \quad \text{и} \quad a > 1, \tag{83}$$

то равновесие имеет место при $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_1^*)$, где φ_1 и φ_1^* – корни уравнения (79). Здесь φ_1 определяется по (82), а

$$\varphi_1^* = -\beta_2 + \pi - \arcsin(b\cos\beta_2), \tag{84}$$

и в этом случае φ_1 и φ_1^* лежат в интервале $(0, \pi/2)$. Действительно, из $b > 1$ следует

$$\arcsin(b\cos\beta_2) > \arcsin(\cos\beta_2) = \pi/2 - \beta_2 \tag{85}$$

и, следовательно,

$$\varphi_1 = -\beta_2 + \arcsin(b\cos\beta_2) > -\beta_2 + \frac{\pi}{2} - \beta_2 = \frac{\pi}{2} - 2\beta_2 > 0, \tag{86}$$

так как выше отмечено $\beta_2 < \pi/4$.

С другой стороны, из $b < 1/\cos\beta_2$ следует

$$\arcsin(b\cos\beta_2) < \arcsin 1 = \pi/2 \tag{87}$$

и, следовательно,

$$\varphi_1 = -\beta_2 + \arcsin(b\cos\beta_2) < \pi/2 - \beta_2 < \pi/2. \tag{88}$$

Аналогично показывается, что φ_1^* лежит на отрезке $[0, \pi/2]$. Легко показать, что поскольку $\varphi_1 < \pi/2 - \beta_2$, то $\varphi_1^* > \varphi_1$.

Если

$$b < f_2 \quad \text{и} \quad a < 1, \tag{89}$$

то равновесие имеет место на отрезке $[0, \varphi_2]$, где φ_2 определяется из уравнения

$$\Psi(\varphi_2) = a. \tag{90}$$

В явном виде φ_2 может быть получено, если преобразовать Ψ к виду

$$\Psi(\varphi) = \sin\varphi - f_2 \cos\varphi = \sin\varphi - \operatorname{tg}\beta_2 \cos\varphi = \frac{\sin(\varphi - \beta_2)}{\cos\beta_2}. \tag{91}$$

Приравнивая

$$\Psi(\varphi) = \frac{\sin(\varphi - \beta_2)}{\cos\beta_2} = a, \tag{92}$$

получим

$$\varphi_2 = \beta_2 + \arcsin(a\cos\beta_2). \tag{93}$$

Отметим, что поскольку $a < 1$, то

$$\arcsin(a\cos\beta_2) < \arcsin(\cos\beta_2) = \pi/2 - \beta_2, \tag{94}$$

т.е.

$$\varphi_2 = \beta_2 + \arcsin(a\cos\beta_2) < \beta_2 + \pi/2 - \beta_2 = \pi/2. \tag{95}$$

Если

$$f_2 < b < 1 \quad \text{и} \quad a < 1, \tag{96}$$

то равновесие имеет место, если $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$, где φ_1 определяется из уравнения

$$\Psi_1(\varphi_1) = b, \tag{97}$$

имеющего в этом случае на отрезке $[0, \pi/2]$ единственный корень, а φ_2 находится из уравнения

$$\Psi(\varphi_2) = a. \tag{98}$$

Заметим, что всегда (в этом случае)

$$\varphi_2 > \varphi_1. \tag{99}$$

Это следует из того, что согласно (47)

$$b = \frac{Q_1}{Q_2}(\sin\alpha - f_1\cos\alpha), \tag{100}$$

а согласно (32)

$$a = \frac{Q_1}{Q_2}(\sin\alpha + f_1\cos\alpha). \tag{101}$$

Следовательно, всегда при $f_1 > 0$

$$a > b, \tag{102}$$

а тогда (99) очевидно из рис. *ж*.

Аналитически это можно доказать, если учесть, что на всем интервале $(0, \pi/2)$

$$\Psi_1(\varphi) > \Psi(\varphi), \tag{103}$$

что следует из выражений (46) и (28). Поэтому, если ввести вспомогательное уравнение

$$\Psi(\varphi^*) = b, \tag{104}$$

то из (97) и (103) следует

$$\varphi^* > \varphi_1, \tag{105}$$

поскольку при равных значениях φ функция $\Psi(\varphi)$ была бы меньше. С другой стороны, из (104) и (98) ввиду монотонного возрастания $\Psi(\varphi)$ следует, с учетом (102),

$$\varphi_2 > \varphi^*. \tag{106}$$

Из (105) и (106) получаем (99).

Явные выражения для φ_1 и φ_2 даются формулами (82) и (93).

Наконец, случай

$$1 < b < \frac{1}{\cos\beta_2} \quad \text{и} \quad a < 1$$

невозможен, поскольку, как уже было указано в (102), всегда $a > b$.

В результате можно изобразить следующую диаграмму в плоскости параметров, показывающую условия равновесия (рис. *з*).

Для $\operatorname{tg}\alpha < f_1$ диаграмма делится только на две части (параметр b не играет роли, поскольку груз Q_1 вниз никогда двигаться не может), все части левее прямой $a = 1$ (области *2* и *3*) объединяются в одну ($\varphi \in$ $\in (0, \varphi_2)$) и правее также объединяются в одну – равновесие при всех φ (области *4*, *5*, *6*, *7*).

Область *1*, где $a < b$, не существует, так как такие значения параметров невозможны.

В случае $\operatorname{tg}\alpha > f_1$ в области *2* равновесие сохраняется при $\varphi \in (0, \varphi_2)$; в области *3* равновесие существует при $\varphi \in (\varphi_1, \varphi)$; в области *4* равновесие существует при всех значениях φ; в области *5* равновесие существует при $\varphi \in (\varphi_1, \pi/2)$; в области *6* равновесие существует при $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_1^*)$. В области *7* равновесия нет ни при каких значениях угла φ.

Отметим, что условия накладываются на два параметра a и b (а при $\operatorname{tg}\alpha < f_1$ – только на a). В условие задачи входит пять параметров (Q_1, Q_2, f_1, f_2, α) – фактически четыре, поскольку очевидно, что роль играет только отношение Q_1/Q_2. Поэтому при заданных параметрах необходимо сначала перейти от них к a и b, после чего можно установить условия равновесия.

Указание. Для приобретения навыков в решении задач на равновесие при наличии трения скольжения рекомендуется решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 5.1, 5.5–5.9, 5.11–5.13, 5.15, 5.16, 5.25–5.28, 5.30, 5.31, 5.33, 5.35–5.37, 5.41, 5.42.

2. Равновесие твердого тела при наличии трения качения. Между катком и плоскостью, на которой он покоится, возникают силы трения, если приложить к оси катка силу S (рис. 1.42), стремящуюся его двигать по

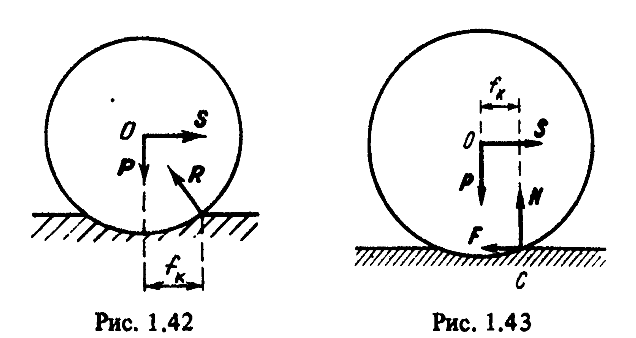


Рис. 1.42 Рис. 1.43

плоскости. Рассмотрим случай, когда сила S параллельна горизонтальной плоскости.

Из опыта известно, что при изменении модуля силы S от нуля до некоторого предельного значения $S_{пр}$ каток остается в покое, т.е. силы, действующие на каток, уравновешиваются. Кроме активных сил: веса P и силы S, к катку, равновесие которого рассматривается, приложена реакция плоскости. Из условия равновесия трех непараллельных сил следует, что реакция плоскости R должна проходить через центр катка O, так как две другие силы приложены к этой точке.

Следовательно, точка приложения реакции C должна быть смещена на некоторое расстояние $f_к$ от вертикали, проходящей через центр колеса, иначе реакция R не будет иметь горизонтальной составляющей, необходимой для удовлетворения условий равновесия. Разложим реакцию плоскости R на две составляющие: нормальную составляющую N и касательную реакцию F, являющуюся силой трения (рис. 1.43).

В предельном положении равновесия катка к нему будут приложены две взаимно уравновешивающиеся пары: одна пара сил $(S_{пр}, F)$ с моментом $S_{пр} \cdot r$ (где r – радиус катка) и вторая пара сил (N, P), удерживающая каток в равновесии. Момент пары, называемой *моментом трения качения*, определяется формулой

$$m_{max} = S_{пр} \cdot r = f_к N. \qquad (12^*)$$

Из (12*) следует, что для того чтобы имело место чистое качение (без скольжения), необходимо, чтобы сила трения качения

$$S_{пр} = F = \frac{f_к}{r} N ,$$

была меньше максимальной силы трения скольжения

$$F < fN, \qquad (13^*)$$

где f – *коэффициент трения скольжения.*

Таким образом, чистое качение (без скольжения) будет, если

$$\frac{f_к}{r} < f.$$

Трение качения возникает из-за деформации катка и плоскости, вследствие чего соприкосновение между катком и плоскостью происходит по некоторой поверхности, смещенной от нижней точки катка в сторону возможного движения.

Если сила S не направлена по горизонтали, то ее следует разложить на две составляющие, направленные по горизонтали и вертикали. Вертикальную составляющую следует сложить с силой P, и мы снова приходим к схеме действия сил, изображенных на рис. 1.43.

Указание. При решении задач на равновесие твердого тела при наличии трения качения надо выполнить четыре первых пункта, указанных в начале книги, на с. 16. При этом следует реакцию шероховатой поверхности направить из точки, отстоящей на расстоянии коэффициента трения качения $f_к$ от нормали, проведенной из центра катка так, чтобы она проходила через точку O пересечения двух других сил, действующих на каток (рис. 1.42), или заменить реакцию R двумя составляющими – нормальной реакцией N и силой трения F;

5) сопоставить число неизвестных и число уравнений равновесия, добавив к ним зависимость момента трения от нормального давления; число неизвестных должно быть равно числу уравнений, если задача является статически определенной;

6) составить систему уравнений равновесия для твердого тела;

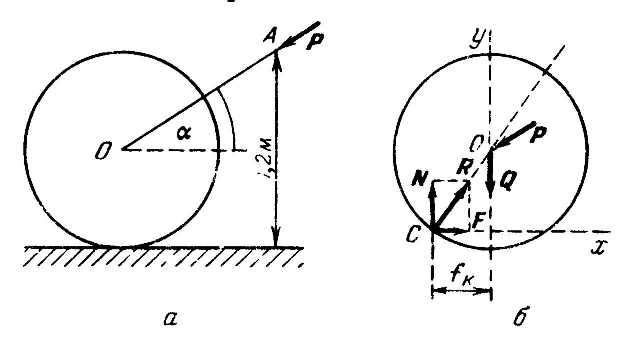
7) решив полученную систему уравнений, определить искомые величины;

8) сопоставив силу $F = f_к N/r$ с максимальной силой трения скольжения $F_{тр} = fN$, убедиться, что $F < F_{тр}$.

Задача 1.60. Цилиндрический каток диаметром 60 см и весом Q = = 3,92 кН приводится в равномерное движение человеком, который давит на рукоятку AO = 1,5 м с постоянной силой P в направлении AO. Высота точки A над горизонтальной дорогой 1,2 м. Коэффициент трения качения катка равен $f_к$ = 0,5 см.

Определить силу P, силу трения при качении и нормальную составляющую реакции горизонтальной плоскости (рис. *а*). Коэффициент трения скольжения между катком и дорогой $f = 0{,}2$.

Р е ш е н и е. При равномерном качении катка все силы, действующие на каток, уравновешиваются. К катку приложены две активные силы: вес катка Q и сила давления человека P. На каток наложена одна связь - горизонтальная плоскость. Применив закон освобождаемости от связей,



К задаче 1.60

отбросим мысленно горизонтальную плоскость и заменим ее действие реакцией R. Эта реакция приложена в точке C, находящейся на расстоянии $f_к$ от вертикали, проведенной через центр колеса. Реакция R направлена по прямой CO, так как согласно теореме о трех непараллельных силах в случае равновесия линии их действия пересекаются в одной точке O (рис. *б*). Реакцию плоскости R раскладываем на две составляющие: нормальную составляющую N, перпендикулярную к плоскости, и касательную составляющую – силу трения при качении F, направленную вдоль плоскости.

Рассмотрим равновесие катка как твердого тела, находящегося под действием четырех сил: Q, P, N, F.

Выберем систему декартовых координат. Ось x направим по горизонтальной плоскости вправо, ось y – вертикально вверх через центр катка. Составим уравнения равновесия. Обозначив буквой α угол между горизонталью (осью x) и рукояткой OA, получим

$$\Sigma F_{kx} = F - P\cos\alpha = 0, \quad (1)$$

$$\Sigma F_{ky} = N - Q - P\sin\alpha = 0, \quad (2)$$

$$\Sigma m_C(F_k) = P\cos\alpha \cdot r - (Q + P\sin\alpha) f_к = 0. \quad (3)$$

В уравнении (3) буквой r обозначен радиус катка.

При составлении суммы моментов сил относительно точки C сила P, приложенная в центре катка O, разложена на две составляющие – горизонтальную ($P\cos\alpha$) и вертикальную ($P\sin\alpha$), и использована теорема Ва-

риньона. При этом, как принято всегда делать, при вычислении момента горизонтальной составляющей силы P мы пренебрегли изменением ее плеча, считая, что оно равно радиусу катка r.

Из уравнения (3) найдем искомую силу P:

$$P = \frac{Qf_к}{r\cos\alpha - f_к\sin\alpha} = \frac{3{,}92 \cdot 0{,}5}{30\dfrac{1{,}2}{1{,}5} - 0{,}5\dfrac{0{,}9}{1{,}5}} = 0{,}083\ кН.$$

Равенство (2) даст

$$N = Q + P\sin\alpha = 3{,}92 + 0{,}083\frac{0{,}9}{1{,}5} = 3{,}97\ кН.$$

Из уравнения (1) определяем силу трения:

$$F = P\cos\alpha = 0{,}083\ \frac{1{,}2}{1{,}5} = 0{,}0663\ кН.$$

Проверим, сопоставляя силу трения при качении F и силу трения скольжения, будет ли в данном случае чистое качение или же будет иметь место скольжение. Сила трения скольжения равна

$$F_1 = fN = 0{,}2 \cdot 3{,}97 = 0{,}794\ кН.$$

Таким образом, сила трения скольжения больше силы трения при качении

$$F_1 > F,$$

и каток будет катиться без скольжения.

Определение в каждом конкретном случае, какой вид трения будет иметь место в том или ином механизме, является важной технической задачей. Так, например, подшипники качения, широко распространенные в современном машиностроении, имеют большой ресурс только в том случае, если при эксплуатации сохраняется режим трения качения. При возникновении режима трения скольжения они разрушаются очень быстро.

Задача 1.61. Цилиндрический каток радиусом r и весом Q (рис. *а*) удерживается в равновесии на наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, нитью, перекинутой через блок A. К концу нити подвешен груз весом P. Коэффициент трения качения катка равен $f_к$.

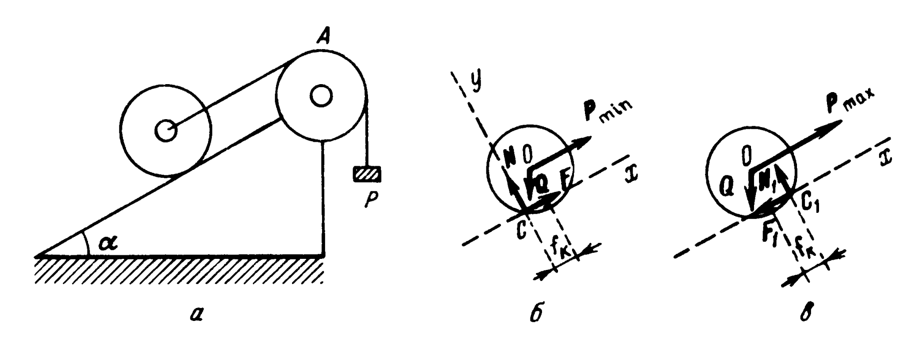
Определить наименьшую и наибольшую величины веса P, при которых каток будет в равновесии. Найти наименьшее значение коэффициента трения скольжения f, при котором в случае движения каток будет катиться без скольжения.

Решение. Рассмотрим равновесие катка в двух случаях.

В первом случае, когда величина P имеет наименьшее значение, возможное направление движения катка по наклонной плоскости — вниз

(рис. *б*). Точка C, где приложена реакция плоскости, в этом случае смещена на расстояние $f_к$ влево от перпендикуляра, опущенного из центра катка O на наклонную плоскость. К катку приложены две активные силы: вес Q и натяжение нити P_{min}.

Отбрасывая мысленно связь, наложенную на каток, – наклонную плоскость, заменяем ее действие реакцией, которую раскладываем на нормальную составляющую N и касательную составляющую (силу трения F).



К задаче 1.61

Составляющая N перпендикулярна к наклонной плоскости, сила трения направлена вдоль наклонной плоскости в сторону, противоположную возможному движению центра катка.

Рассмотрим равновесие катка как равновесие свободного твердого тела, находящегося под действием четырех сил: Q, P_{min}, N, F. Так как по условию требуется найти только минимальное и максимальное значения силы P при равновесии, то из трех уравнений равновесия составим одно уравнение, выражающее равенство нулю суммы моментов всех сил относительно точки C:

$$\Sigma m_C(F_k) = -f_к Q\cos\alpha + (Q\sin\alpha - P_{min})r = 0. \qquad (1)$$

В это уравнение не вошли неизвестные силы N и F, так как они приложены в точке C.

При составлении уравнения мы разложили силу Q на две составляющие: $Q\cos\alpha$, направленную перпендикулярно наклонной плоскости (плечо этой составляющей относительно точки C равно коэффициенту трения качения $f_к$), и составляющую $Q\sin\alpha$, направленную параллельно наклонной плоскости и отстоящую на расстоянии r от нее. Решая уравнение (1) относительно P_{min}, имеем

$$P_{min} = Q\left[\sin\alpha - \frac{f_к}{r}\cos\alpha\right]. \qquad (2)$$

Рассмотрим теперь второй случай, когда сила P достигает максимального значения, при котором возможно равновесие. В этом случае возможное направление движения катка – вверх по наклонной плоскости (рис. *в*). Силы Q и P_{max} направлены аналогично первому случаю и приложены по-прежнему в центре катка O. Реакция наклонной плоскости на этот раз приложена в точке C_1, смещенной на расстояние $f_к$ вправо по наклонной плоскости.

Составляем уравнение моментов относительно точки C_1:

$$\Sigma m_{C_1}(F_k) = f_к Q\cos\alpha - (P_{max} - Q\sin\alpha)r = 0,$$

откуда имеем

$$P_{max} = Q\left[\sin\alpha + \frac{f_к}{r}\cos\alpha\right]. \qquad (3)$$

Таким образом, каток будет находиться в равновесии на наклонной плоскости, если значение силы P лежит в пределах

$$Q\left[\sin\alpha - \frac{f_к}{r}\cos\alpha\right] \leqslant P \leqslant Q\left[\sin\alpha + \frac{f_к}{r}\cos\alpha\right].$$

Перейдем к определению наименьшего значения коэффициента трения скольжения f, при котором в случае движения цилиндр будет катиться, а не скользить. Рассмотрим вначале случай, когда вес груза P имеет наименьшее значение.

Приравняем нулю суммы проекций всех сил на ось x, параллельную наклонной плоскости, и на ось y, перпендикулярную к ней (рис. *б*). Подставляя в первое уравнение

$$\Sigma F_{kx} = P_{min} + F - Q\sin\alpha = 0$$

значение P_{min}, соответствующее (2), находим силу трения при качении

$$F = \frac{f_к}{r} Q\cos\alpha.$$

Второе уравнение равновесия

$$\Sigma F_{ky} = N - Q\cos\alpha = 0$$

позволяет определить силу нормального давления, равную силе нормальной реакции

$$N = Q\cos\alpha.$$

Условием, при котором будет чистое качение, является

$$F < fN, \qquad (4)$$

где f — коэффициент трения скольжения. Внося в (4) значения F и N, находим

$$\frac{f_к}{r} < f. \qquad (5)$$

Рассмотрим, далее, случай, когда вес груза P имеет наибольшее значение (рис. *в*). В этом случае уравнения проекций будут

$$\Sigma F_{kx} = P_{max} - F_1 - Q\sin\alpha = 0,$$
$$\Sigma F_{ky} = N_1 - Q\cos\alpha = 0. \qquad (6)$$

Внося в уравнение (6) значение P_{max} (3), находим

$$F_1 = \frac{f_к}{r} Q\cos\alpha, \quad N_1 = Q\cos\alpha.$$

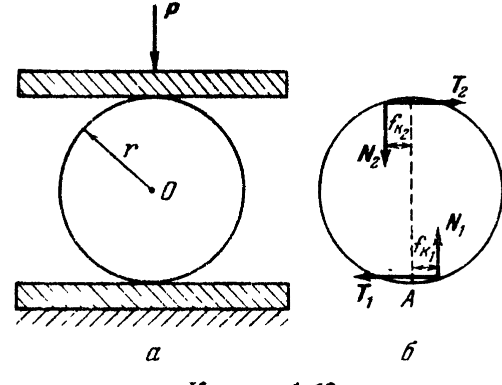
Подставляя эти значения в (4), получаем условие чистого качения

$$\frac{f_к}{r} < f,$$

которое совпадает с условием (5).

Таким образом, условие (5) является необходимым и достаточным для того, чтобы имело место качение без скольжения и при движении цилиндрического катка при спуске, и при подъеме по наклонной плоскости.

Задача 1.62. Стальной цилиндр радиусом r зажат между двумя параллельными направляющими, из которых нижняя закреплена неподвижно, а верхняя может перемещаться прямолинейно, оставаясь параллельной своему первоначальному положению. Верхняя направляющая прижимается вертикальной силой P к диску (рис. *а*). Коэффициенты трения качения между цилиндром, нижней и верхней направляющей соответственно равны $f_{к1}$ и $f_{к2}$.



К задаче 1.62

Пренебрегая весом цилиндра и направляющих, найти максимальную силу T_2, приложенную к верхней направляющей, при которой цилиндр еще будет оставаться в покое.

Решение. Рассмотрим равновесие цилиндра (рис. *б*), отбросив мысленно нижнюю и верхнюю направляющие, заменив их действие реакциями.

Тогда на цилиндр будут действовать со стороны нижней направляющей нормальная реакция N_1 и сила трения T_1, со стороны верхней направляющей нормальная реакция N_2 и сила трения T_2. При этом точка приложения реакции нижней направляющей будет смещена вправо от вертикального диаметра на расстояние $f_{к1}$, а точка приложения реакции верхней направляющей будет смещена на расстояние $f_{к2}$, от вертикального диаметра влево, т.е. в сторону возможного перемещения цилиндра по отношению к каждой из направляющих.

С другой стороны, если рассмотреть равновесие цилиндра вместе с верхней направляющей, то, проектируя силы на вертикаль, получим

$$N_1 - P = 0 \quad \text{или} \quad N_1 = P.$$

Тогда, возвращаясь к рассмотрению цилиндра (рис. *б*), имеем, проектируя силы на вертикаль,

$$N_1 - N_2 = 0 \quad \text{или} \quad N_1 = N_2 = P.$$

При равновесии сумма проекций сил на ось, совпадающую с любой из направляющих, равна нулю, откуда $T_1 = T_2$. Следовательно, цилиндр находится в равновесии под действием двух пар сил. Сумма их моментов должна быть равна нулю:

$$N_1(f_{к1} + f_{к2}) - T_1 \cdot 2r = 0,$$

откуда

$$T_1 = \frac{N_1(f_{к1} + f_{к2})}{2r} = \frac{P(f_{к1} + f_{к2})}{2r}.$$

Если коэффициенты трения качения равны

$$f_{к1} = f_{к2} = f_к,$$

то

$$T_1 = Nf_к/r = Pf_к/r.$$

У к а з а н и е. Для приобретения навыков в решении задач на равновесие тел при наличии трения качения рекомендуется решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 5.38–5.40.

3. Равновесие твердых тел при наличии трения гибких тел. Предположим, что на неподвижный цилиндр навита нить, к одному концу которой подвешен груз весом P. Угол охвата цилиндра нитью равен α (рис. 1.44). Коэффициент трения нити о шероховатую поверхность цилиндра равен f. Тогда сила T, необходимая для удержания груза P в равновесии, определяется по формуле

$$T = Pe^{-f\alpha}, \qquad (14^*)$$

где e – основание натуральных логарифмов. Таким образом, сила T, уравновешивающая груз P, не зависит от диаметра цилиндра и является функцией угла охвата и коэффициента трения.

Формула (14*) впервые была выведена Леонардом Эйлером (1707–1783). Уроженец Швейцарии, Эйлер был избран академиком Российской Академии наук (1727) и долгие годы жил и работал в Петербурге. Его вклад в развитие математики и механики весьма значителен.

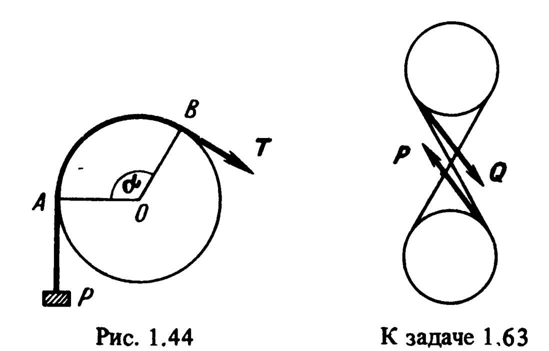


Рис. 1.44 К задаче 1.63

Указание. При решении задач на равновесие твердых тел при наличии трения гибких нитей надо выполнить четыре первых пункта, указанных в начале книги, на с. 16. Далее следует:

5) сопоставить число неизвестных величин и число уравнений равновесия, добавив к уравнениям равновесия зависимость (14*) между силами натяжения нити с обеих сторон охватываемого тела, и убедиться в том, что число независимых уравнений равно числу неизвестных и, следовательно, задача является статически определенной;

6) выбрать систему уравнений координат;

7) составить уравнения равновесия твердого тела;

8) решив эту систему уравнений, определить неизвестные величины.

Задача 1.63. При швартовке судна матрос накладывает канат восьмеркой на чугунные столбы. Натяжение каната равно Q, сила, с которой матрос удерживает канат, равна P. Угол охвата канатом каждого столба равен 210°.

Определить коэффициент трения каната о столбы, если известно, что матрос может удержать канат, наложив три восьмерки. Полагая коэффициент трения каната о чугунный столб равным $f = 0{,}15$, определить величину натяжения, которое матрос способен удержать, если сила $P = 0{,}6$ кН.

Решение. Угол охвата канатом одного столба равен

$$210° = \frac{7}{6}\pi.$$

При наложении трех восьмерок угол охвата канатом столбов будет в шесть раз больше, т.е. 7π. Тогда зависимость натяжений двух концов каната определится формулой

$$P = Qe^{-7\pi f}. \tag{1}$$

Логарифмируя, находим искомый коэффициент трения между канатом и чугунным столбом:

$$f = \frac{1}{7\pi}\ln\frac{Q}{P}. \tag{2}$$

Из (1) имеем

$$\ln\frac{Q}{P} = 7\pi f = 3{,}3. \tag{3}$$

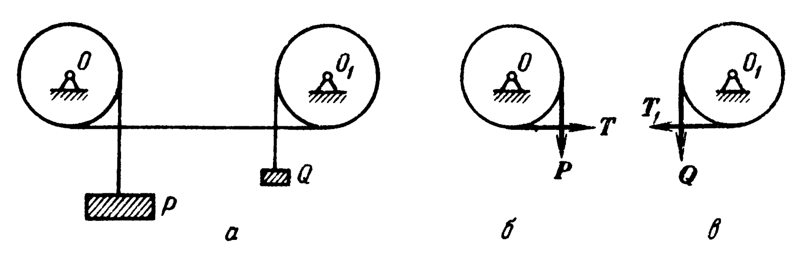
Отсюда при заданных значениях f и P

$$Q/P = 27 \quad \text{и} \quad Q = 27 \cdot 0{,}6 = 16{,}2 \text{ кН}.$$

Таким образом, наложив три восьмерки на чугунные столбы, матрос может удержать в равновесии канат, ко второму концу которого приложена сила, равная 16,2 кН. Благодаря такому многократному увеличению скромной силы матроса возможна швартовка крупнотоннажных судов.

Задача 1.64. Через два неподвижных вала с центрами O и O_1 (рис. *а*) перекинут трос, к концам которого подвешены грузы P и Q, причем $P > Q$.

Определить минимальное значение коэффициента трения между валами и тросом, при котором грузы будут находиться в равновесии. Полагая



К задаче 1.64

коэффициент трения троса о вал равным $f = 0{,}25$, найти груз P, который можно удержать в равновесии грузом $Q = 0{,}1$ кН.

Решение. Рассмотрим равновесие части троса, охватывающего левый вал (рис. *б*). На трос действует активная сила P. Мысленно отбрасывая правый вал и разрезая трос между валами, заменяем действие правой части системы силой натяжения троса T. Для равновесия этой части троса

должно удовлетворяться равенство

$$T = Pe^{-f\alpha},$$

где угол охвата α равен $3\pi/2$. Итак,

$$T = Pe^{-\frac{3}{2}\pi f}. \tag{1}$$

Рассмотрим, далее, равновесие правого вала (рис. *в*), отбросив мысленно левый вал, разрезав трос и заменив его действие силой T_1. Согласно закону равенства действия и противодействия натяжения T и T_1 равны. Для равновесия части троса, охватывающей правый вал, должно удовлетворяться равенство

$$Q = Te^{-\frac{3}{2}\pi f}, \tag{2}$$

так как и у правого вала угол охвата $\alpha = 3\pi/2$.

Решая совместно уравнения (1) и (2), исключая натяжение троса между валами T, находим

$$P/Q = e^{3\pi f},$$

откуда

$$f = \frac{1}{3\pi} \ln \frac{P}{Q}.$$

Эта же задача может быть решена и другим способом. Рассматривая равновесие всего троса (рис. *а*) и замечая, что полный угол охвата тросом двух валов равен

$$\frac{3}{2}\pi + \frac{3}{2}\pi = 3\pi,$$

находим зависимость между силами P и Q:

$$Q = Pe^{-3\pi f},$$

откуда имеем

$$f = \frac{1}{3\pi} \ln \frac{P}{Q}. \tag{3}$$

Для определения груза P, который может быть удержан в равновесии грузом $Q = 0{,}1$ кН, из (3) находим

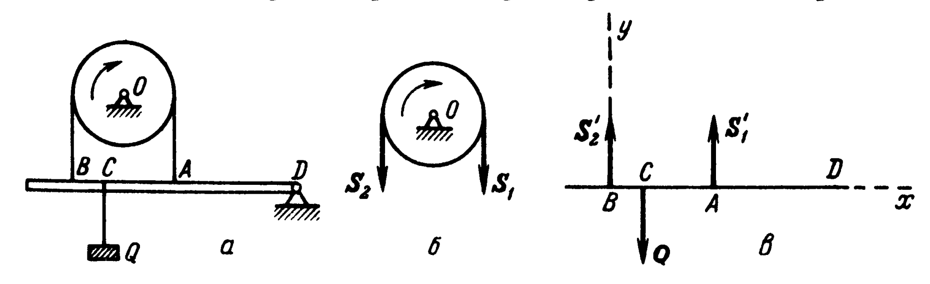
$$\ln \frac{P}{Q} = 3\pi f = 2{,}358.$$

Тогда

$$P/Q = 10{,}5 \quad \text{и} \quad P = 0{,}1 \cdot 10{,}5 = 1{,}05 \text{ кН}.$$

Таким образом, грузом Q, равным 0,1 кН, можно удержать в равновесии груз P, равный 1,05 кН.

Задача 1.65. Трос AB охватывает барабан, вращающийся вокруг центра O. Коэффициент трения троса о барабан равен f. Концы троса A и B



К задаче 1.65

прикреплены к рычагу BAD, который может поворачиваться вокруг точки D. Расстояния $AD = a$, $BD = b$.

Определить натяжение троса в точках A и B. Пренебрегая весом рычага BAD, найти расстояние $CD = c$, на котором надо подвесить к рычагу груз Q, чтобы давление в точке D равнялось нулю.

Решение. Рассмотрим равновесие троса, охватывающего барабан, отбросив мысленно рычаг (рис. *б*) и заменив его действие реакциями троса S_1 и S_2.

Согласно уравнению (14*) зависимость между этими натяжениями определится формулой

$$S_2 = S_1 e^{f\pi}, \tag{1}$$

так как угол охвата тросом барабана равен π. Показатель степени в (1) положителен, ибо при заданном направлении вращения барабана натяжение $S_1 < S_2$.

Рассмотрим, далее, равновесие рычага BAD, полагая в согласии с условием задачи, что давление в точке D, и, следовательно, реакция шарнира D равны нулю. На рычаг действует активная сила Q. Отбросим мысленно трос и заменим его действие реакциями S_1' и S_2' (рис. *в*). Очевидно, что $S_1' = S_1$, $S_2' = S_2$.

Выберем оси координат и составим уравнения равновесия

$$\Sigma F_{ky} = S_1' + S_2' - Q = 0, \tag{2}$$

$$\Sigma m_D(F_k) = Qc - S_1' a - S_2' b = 0. \tag{3}$$

Мы получим систему из трех уравнений (1), (2), (3) с тремя неизвестны-

ми: S_1', S_2', c. Из уравнений (1) и (2) получим

$$S_1' = \frac{Q}{1 + e^{f\pi}}, \quad S_2' = \frac{Qe^{f\pi}}{1 + c^{f\pi}}.$$

Подставив эти значения натяжений в уравнение (3), найдем искомое расстояние c:

$$c = \frac{S_1 a + S_2 b}{Q} = \frac{a + bc^{f\pi}}{1 + e^{f\pi}}.$$

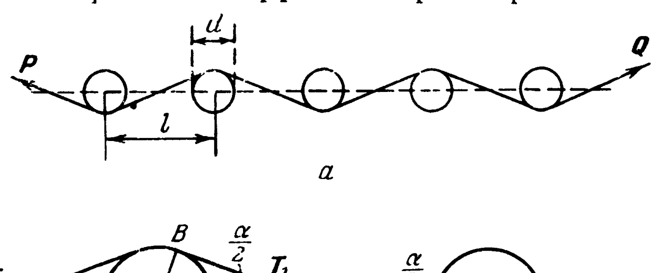
Вместо уравнений равновесия (2) и (3) можно составить два уравнения моментов относительно точек A и B. К этим точкам приложены неизвестные реакции S_1' и S_2'. Следовательно, каждое уравнение моментов будет содержать только одну неизвестную силу и искомое расстояние c:

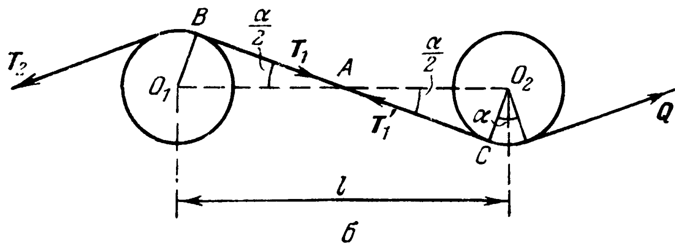
$$\Sigma m_A(F_k) = Q(c - a) - S_2'(b - a) = 0,$$

$$\Sigma m_B(F_k) = S_1'(b - a) - Q(b - c) = 0.$$

Решая эти уравнения совместно с равенством (1), приходим к ранее полученным ответам.

Задача 1.66. Ремень пропущен через пять неподвижных валиков, как это показано на рис. *а*. Коэффициент трения ремня о валик f = 0,4.





К задаче 1.66

Расстояние между центрами валиков, расположенными на одной прямой, равно l = 50 мм. Диаметр валиков d = 25 мм. Слева к ремню приложена сила P = 1,5 кН.

Каково минимальное значение силы Q, при котором ремень будет находиться в покое?

Р е ш е н и е. Обозначим угол охвата валика ремнем через α. Тогда для отрезка ремня, охватывающего каждый валик, можно записать соот-

ношение между натяжениями ремня по обе стороны от валика:

$$Q = T_1 e^{f\alpha}, \quad T_1 = T_2 e^{f\alpha}, \quad T_2 = T_3 e^{f\alpha}, \ldots, \quad T_4 = Pe^{f\alpha}.$$

Исключая из этой системы уравнений промежуточные усилия $T_1, \ldots$ $\ldots, T_4$ (перемножая все равенства), находим

$$Q = Pe^{5f\alpha}. \qquad (1)$$

Угол α определится из равных прямоугольных треугольников AO_1B и AO_2C (рис. *б*). Замечая, что $O_1A = O_2A = l/2$, а $O_1B = O_2C = d/2$, находим:

$$l \sin \frac{\alpha}{2} = d,$$

откуда

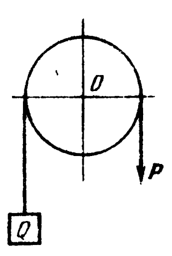
$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{l} = 0{,}5, \quad \alpha = 60^\circ = 1{,}0472 \text{ рад.}$$

Тогда из (1) находим

$$Q = 1{,}5 \cdot e^{5 \cdot 0{,}4 \cdot 1{,}0472} = 1{,}5 \cdot e^{2{,}0944} = 1{,}5 \cdot 8{,}1207 = 12{,}1811 \text{ кН}.$$

Задача 1.67. На неподвижный цилиндр навита веревка, к одному из концов которой подвешен груз Q.

Сколько раз надо намотать веревку на цилиндр, чтобы груз Q можно было удержать вертикальной силой P, приложенной к другому концу веревки? Коэффициент трения веревки о цилиндр равен f.



К задаче 1.67

Решение. Воспользуемся *формулой Эйлера*, согласно которой при предельном равновесии минимальное значение модуля силы P равно

$$P = Qe^{-f\alpha},$$

где α – угол охвата веревкой цилиндра Этот угол равен

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n + \frac{\pi}{2} = \pi(2n + 1),$$

где n – число полных витков веревки, к которым добавляется по углу $\pi/2$ со стороны действия каждой из сил. Таким образом,

$$P = Qe^{-f\pi(2n+1)}.$$

Логарифмируя, находим

$$\ln Q - \ln P = f\pi(2n+1),$$

откуда число полных витков равно

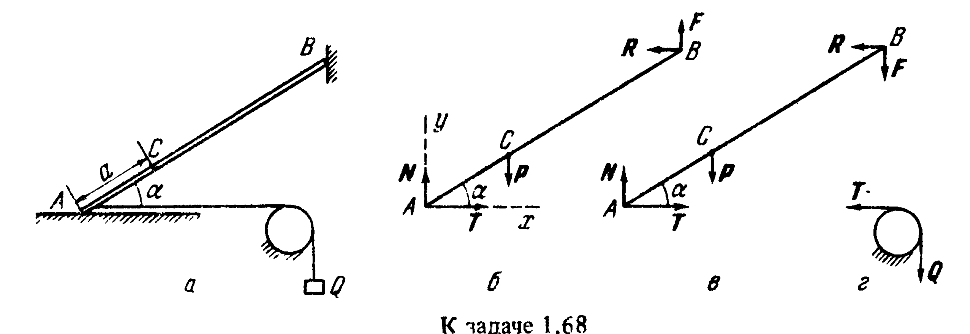
$$n = \frac{1}{2}\left(\frac{\ln Q - \ln P}{f\pi} - 1\right).$$

К этим виткам следует добавить еще один виток, образованный половинками витка со стороны действия каждой из сил.

Задача 1.68. Прямолинейный стержень AB, длиной l и весом P, центр тяжести C которого находится от конца A на расстоянии $AC = a$, опирается в точке B на шероховатую вертикальную стену, а в точке A – на гладкий горизонтальный пол. Коэффициент трения между стержнем и вертикальной стеной f_1. В точке A к стержню прикреплена нить, перекинутая через неподвижный круглый цилиндр (рис. *а*). К концу нити подвешен груз Q. Коэффициент трения между нитью и цилиндром равен f.

Пренебрегая весом нити, определить, в каких границах может изменяться угол α при равновесии.

Решение. Рассмотрим равновесие стержня AB, отбросив мысленно вертикальную стену, горизонтальный пол и горизонтальную нить и



К задаче 1.68

заменив их действие реакциями. Отдельно рассмотрим равновесие нити, охватывающей цилиндр (рис. *г*). Решение задачи распадается на два случая.

Случай минимального угла α. При этом точка A может начать двигаться влево, точка B – вниз. Следовательно, сила трения F будет направлена вверх (рис. *б*), а силы трения, приложенные к нити на цилиндре (рис. *г*), будут направлены по часовой стрелке. Таким образом, стер-

жень AB (рис. *б*) будет находиться в равновесии под действием следующих сил: нормальной реакции N, натяжения нити T, веса P, нормальной реакции R и силы трения F.

Составим уравнения равновесия для стержня AB:

$$\Sigma F_{kx} = T - R = 0, \qquad (1)$$

$$\Sigma F_{ky} = N - P + F = 0, \qquad (2)$$

$$\Sigma m_B(F_k) = -Nl\cos\alpha + P(l-a)\cos\alpha + Tl\sin\alpha = 0. \qquad (3)$$

Кроме того, запишем зависимость силы трения от нормального давления в точке B:

$$F = f_1 R. \qquad (4)$$

Зависимость натяжения нити T от силы Q, с учетом того, что силы трения на цилиндре направлены по часовой стрелке, будет (формула Эйлера):

$$Te^{-f\pi/2} = Q. \qquad (5)$$

Из данной системы уравнений найдем

$$N = P - f_1 Qe^{f\pi/2}. \qquad (6)$$

Подставив значения N и T в уравнение (3), получим окончательно

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{P}{Q} \cdot \frac{a}{l} e^{-f\pi/2} - f_1. \qquad (7)$$

Этой формулой определяется минимальное значение угла α при равновесии стержня. Так как при минимальном угле α значение $\operatorname{tg}\alpha$ должно быть положительным, то из (7) следует

$$f_1 < \frac{P}{Q}\frac{a}{l} e^{-f\pi/2}. \qquad (8)$$

Случай максимального угла α. При этом точка A может начать двигаться вправо, точка B — вверх. Следовательно, сила трения F будет направлена вниз (рис. *в*), а силы трения, приложенные к нити на цилиндре, будут направлены против хода часовой стрелки.

Уравнения равновесия стрежня AB будут

$$T - R = 0, \qquad (9)$$

$$N - P - F = 0, \qquad (10)$$

$$-Nl\cos\alpha + P(l-a)\cos\alpha + Tl\sin\alpha = 0. \qquad (11)$$

Кроме того, зависимость силы трения от нормального давления в точ-

ке B определяется равенством

$$F = f_1 R. \tag{12}$$

Натяжение нити с учетом того, что силы трения на цилиндре направлены против хода часовой стрелки, будет

$$T = Q e^{-f\pi/2}. \tag{13}$$

Из этой системы, исключив R и F, найдем

$$N = P + f_1 Q e^{-f\pi/2}. \tag{14}$$

Далее, подставив в уравнение моментов значения N и T, получим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{P}{Q} \cdot \frac{a}{l} e^{f\pi/2} + f_1. \tag{15}$$

Этой формулой определяется максимальное значение угла α при равновесии.

При максимальном угле α_{max} должно соблюдаться неравенство

$$\alpha_{max} < \pi/2. \tag{16}$$

Следовательно, из (15) вытекает, что

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{P}{Q}\frac{a}{l} e^{f\pi/2} + f_1\right) < \frac{\pi}{2}. \tag{17}$$

§ 5. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ФЕРМ

1. Расчет усилий в стержнях фермы. Способ вырезания узлов. *Фермой* (рис. 1.45) называется геометрически неизменяемая конструкция, образованная прямолинейными стержнями, соединенными друг с другом концами при помощи шарниров. Шарнирные соединения концов стержней называются узлами. Ферма является статически определимой, если число узлов n и число стержней m удовлетворяют уравнению

$$m = 2n - 3.$$

Если число стержней не удовлетворяет этому равенству, то возможны два случая:

$$m > 2n - 3,$$

ферма является в этом случае статически неопределимой;

$$m < 2n - 3,$$

конструкция перестает быть геометрически неизменяемой, получает подвижность (становится механизмом).

Расчет усилий в стержнях фермы методами статики (в том числе и графостатики) может быть произведен только для статически определимых ферм *).

В дальнейшем мы будем полагать, что заданные активные силы приложены в узлах фермы и лежат в одной плоскости с фермой, ферма образована прямолинейными стержнями, соединенными своими концами при помощи шарниров, трение в шарнирах отсутствует. При выполнении этих

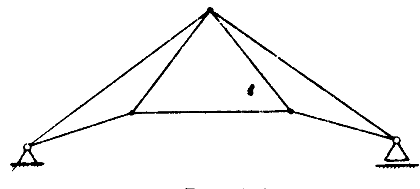


Рис. 1.45

условий стержни будут или сжаты, или растянуты, следовательно, реакции стержней будут совпадать по направлению со стержнями.

Расчет статически определимых ферм проводится одним из трех способов:

а) способом вырезания узлов;

б) построением диаграммы Максвелла–Кремоны;

в) методом сечений.

Расчет сводится к определению усилий в стержнях фермы. Активные силы и реакции опор являются внешними силами для всей фермы, рассматриваемой как твердое тело; усилия в стержнях в этом случае – внутренние силы. Поэтому для определения усилий необходимо, согласно общему правилу, рассмотреть равновесие части фермы, для которой искомые усилия являются внешними силами.

При расчете ферм способом вырезания узлов можно пользоваться аналитическим и графическим методами.

Указания. При *аналитическом методе* решения задач на расчет ферм способом вырезания узлов надо выполнить четыре первых пункта, указанных в начале книги, на с. 16. Затем:

5) определить реакции опор, пользуясь уравнениями равновесия для всей фермы, рассматриваемой как твердое тело;

6) вырезать узел, в котором сходятся два стержня, и рассмотреть его равновесие под действием активных сил и реакций разрезанных стержней; определить эти реакции из двух уравнений проекций сил, приложенных к узлу, на декартовы оси координат;

---

*) Расчет статически неопределимых ферм выходит за рамки курса теоретической механики, так как требует учета деформаций конструкций.

7) переходя от узла к узлу, рассматривать аналогично равновесие каждого узла; при этом в каждом узле должно быть только два неизвестных усилия в стержнях; составляя для каждого узла два уравнения равновесия в проекциях на оси x и y, определить все искомые усилия в стержнях.

При *графическом методе* решения задач на расчет ферм способом вырезания узлов надо выполнить четыре первых пункта, указанных в начале книги, на с. 16. Затем:

5) определить реакции опор, пользуясь уравнениями равновесия для всей фермы, рассматриваемой как твердое тело;

6) вырезать узел, в котором сходятся два стержня, и рассмотреть его равновесие под действием заданных активных сил и реакций разрезанных стержней; определить эти реакции построением замкнутого треугольника или многоугольника сил, приложенных к узлу;

7) переходя от узла к узлу, рассматривать аналогично равновесие каждого узла; при этом в каждом узле должно быть только два неизвестных усилия в стержнях; строя для каждого узла замкнутый силовой многоугольник, определить все искомые усилия в стержнях.

Задача 1.69. Определить усилия в стержнях фермы (рис. *а*) аналитическим методом вырезания узлов.

Решение. Для определения усилий в стержнях сначала надо найти реакции опор A и H. Для этого мысленно отбрасываем опоры и заменяем их действие на ферму реакциями R_A и R_H. Ввиду симметрии фермы и нагрузки реакции опор равны друг другу и каждая равна 20 кН. Когда реакции опор найдены, переходим к определению усилий в стержнях. Для этого надо рассматривать равновесие каждого узла, мысленно отбросив сходящиеся в них стержни и заменяя их действие на узел реакциями. Первым надо рассмотреть узел, к которому приложены только две неизвестные силы. Начнем с узла A. Узел A находится в равновесии под действием известной реакции R_A и неизвестных реакций стержней *1* и *2*. Будем обозначать реакции стержней соответственно через S_1 и S_2 (рис. *б*) и направлять их от узла, предполагая таким образом, что стержни растянуты. Затем через точку A проводим оси x и y и составляем систему уравнений равновесия узла A, приравнивая нулю сумму проекций всех сил на эти оси.

Уравнения проекций на оси x и y будут:

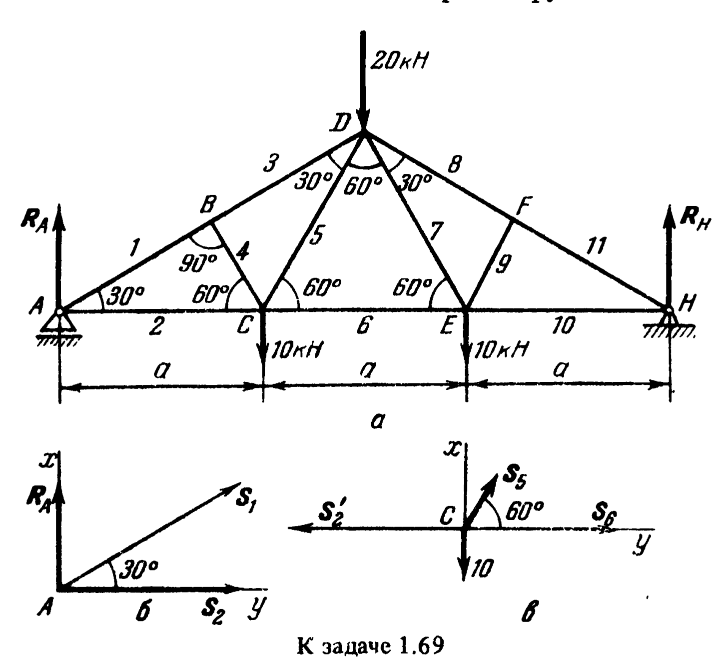
$$S_2 + S_1 \cos 30° = 0, \qquad R_A + S_1 \cos 60° = 0.$$

Отсюда находим

$$S_1 = -40 \text{ кН}, \quad S_2 = 34{,}64 \text{ кН}.$$

Отрицательное значение реакции S_1 показывает, что в действительности она направлена в противоположную сторону и стержень *1* не растянут, как мы предполагали, а сжат.

Теперь переходим к исследованию равновесия узла B. В узле B сходятся три стержня, из которых стержни *1* и *3* направлены по одной прямой, а стержень *4* под углом к ним. Никаких активных сил к узлу B не приложено. Следовательно, точка B находится в равновесии под действием трех реакций стержней. Это возможно только в случае, если усилие в стержне *4* равно нулю, так как только оно проектируется на направление,



К задаче 1.69

перпендикулярное к стержням *1* и *3*. Итак, усилия в стержнях *1* и *3* одинаковы, а усилие в стержне *4* равно нулю.

Переходим к узлу C. Узел C находится в равновесии под действием двух неизвестных реакций S_5 и S_6, активной силы 10 кН и известной реакции S_2', которая по величине равна реакции S_2, приложенной к узлу A, но направлена в противоположную сторону (рис. *в*). Проводим оси координат через точку C и составляем уравнения равновесия для узла C.

Уравнения проекций на оси x и y будут

$$-S_2' + S_5 \cos 60° + S_6 = 0, \qquad S_5 \cos 30° - 10 = 0.$$

Отсюда находим

$$S_5 = 11{,}55 \text{ кН}, \quad S_6 = 28{,}865 \text{ кН}.$$

Следовательно, стержни *5* и *6*, как мы и предполагали, растянуты.

Ввиду полной симметрии фермы и приложенной в узлах нагрузки достаточно определить усилия в стержнях левой половины фермы. Так, например, усилия в стержнях *1* и *11*, *2* и *10* будут ввиду симметрии равными.

Указание. Для приобретения навыков в решении задач на определение усилий в стержнях фермы способом вырезания узлов рекомендуется решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И В. Мещерского: 4.65–4.71, 4.73.

2. Определение усилий в стержнях фермы построением диаграммы Максвелла–Кремоны. Способ вырезания узлов, рассмотренный в предыдущем пункте, позволяет сравнительно просто найти усилия в стержнях фермы. К недостаткам этого способа следует отнести повторное построение усилий в стержнях, которые один раз проводятся в одном направлении, а другой раз – в противоположном. Кроме того, построение силовых многоугольников для каждого узла в отдельности не создает общей картины распределения усилий в стержнях фермы. Определение усилий построением диаграммы Максвелла–Кремоны позволяет устранить эти недостатки.

Этот графический способ расчета усилий в стержнях фермы был разработан почти одновременно и независимо друг от друга английским физиком Дж.К. Максвеллом (1831–1879) в 1864 г. и итальянским математиком Л. Кремоной (1830–1903) в 1872 г.

Сочинение Л. Кремоны "Взаимные фигуры в графической статике" издано в переводе на русский язык в 1936 г.

Построение диаграммы Максвелла – Кремоны заключается в соединении силовых многоугольников, построенных для всех узлов фермы, в один чертеж так, чтобы ни одно из усилий не повторялось дважды.

Указание. При расчете фермы способом Максвелла – Кремоны следует придерживаться следующих правил и последовательности действий:

1) определяем из условий равновесия всей фермы как твердого тела, находящегося под действием плоской системы сил, опорные реакции; это делается аналитически, при помощи уравнений равновесия;

2) отбрасываем опоры и изображаем все приложенные к ферме внешние силы, включая реакции опор, так, чтобы эти векторы располагались вне контура фермы;

3) части плоскости, ограниченные контуром фермы и линиями действия внешних сил, обозначаем буквами; обозначаем буквами также части плоскости, ограниченные стержнями фермы; узлы фермы обозначаем римскими цифрами; стержни нумеруем арабскими цифрами;

4) строим замкнутый многоугольник внешних сил, откладывая силы в том порядке, в котором они встречаются при обходе фермы; направление обхода выбирается произвольно (по часовой или против часовой стрелки); силы обозначаем двумя малыми буквами того же наименования, что и боль-

шие буквы, обозначающие смежные участки плоскости, между которыми проходит линия действия данной силы;

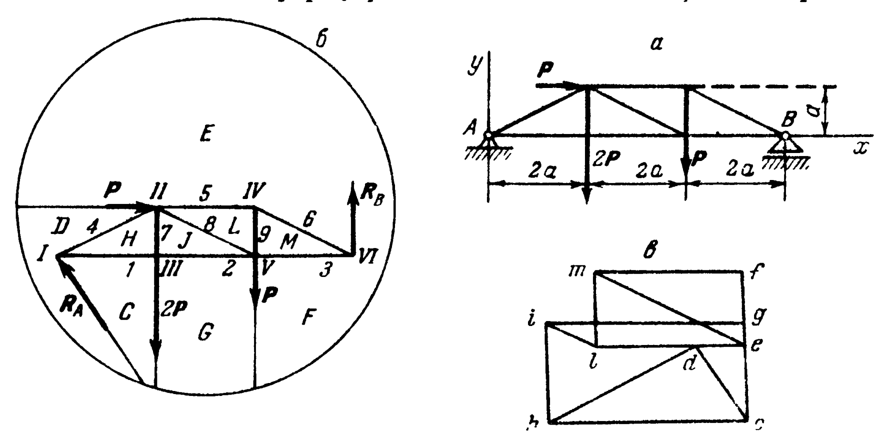
5) последовательно строим на этом же рисунке замкнутые силовые многоугольники для каждого узла; при этом узлы выбираем в таком порядке, чтобы каждый раз число неизвестных усилий в стержнях равнялось двум (в последнем узле получится при этом одно неизвестное усилие); обход каждого узла делаем в том же направлении, которое было избрано для внешних сил (по часовой или против часовой стрелки); в этом же порядке откладываем встречающиеся внешние силы и усилия в стержнях;

6) для определения того, сжат или растянут стержень, в каждом замкнутом силовом многоугольнике мысленно направляем стрелки в одном направлении, указанном известными силами, и переносим найденное усилие на стержень; стержень сжат, если усилие направлено к узлу, и растянут, если усилие идет от узла;

7) измеряем на диаграмме отрезки, изображающие искомые усилия в стержнях фермы, и находим, учитывая принятый масштаб сил, усилия.

Задача 1.70. Определить усилия в стержнях фермы (рис. *а*) построением диаграммы Максвелла – Кремоны.

Р е ш е н и е. Для определения усилий в стержнях фермы необходимо прежде всего найти реакции опор. Для этого мысленно отбросим опоры и заменим их действие на ферму реакциями. Реакция опоры B направлена по



К задаче 1.70

вертикали вверх, так как опора установлена на катках, которые не могут препятствовать перемещению вдоль плоскости, на которую опираются катки. Модуль и направление реакции опоры A неизвестны, поэтому найдем ее составляющие по осям x и y. Для этого составим уравнения равновесия фермы как свободного твердого тела, находящегося в равновесии под действием активных сил и реакций опор.

Уравнение моментов относительно точки A будет

$$-R_B \cdot 6a + P \cdot a + P \cdot 4a + 2P \cdot 2a = 0,$$

откуда

$$R_B = 1{,}5P.$$

Уравнения проекций на оси x и y будут

$$R_{Ax} - P = 0, \quad R_B - P - 2P + R_{Ay} = 0,$$

откуда

$$R_{Ax} = P, \qquad R_{Ay} = 1{,}5P.$$

Тогда модуль реакции шарнира A равен

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 1{,}8P.$$

Определим направление реакции опоры A. Для этого найдем угол β, образованный реакцией с осью x:

$$\cos\beta = \frac{R_{Ax}}{R_A} = \frac{P}{1{,}8P} = 0{,}55,$$

откуда

$$\beta = 56^\circ 20'.$$

После того как реакции опор найдены, можно перейти непосредственно к построению диаграммы Максвелла – Кремоны.

Изображаем все приложенные к ферме внешние силы, включая реакции опор, так, чтобы их векторы расположились вне контура фермы (рис. *б*). Части плоскости, ограниченные контуром фермы и линиями действия внешних сил, обозначим буквами C, D, E, F, G; плоскости, ограниченные стержнями фермы, обозначим буквами H, J, L, M; узлы фермы обозначим римскими цифрами *I, II, III, IV, V, VI*; стержни нумеруем арабскими цифрами *1–9*.

Строим вначале многоугольник внешних сил (рис. *в*), который должен быть замкнут, так как ферма находится в равновесии. Откладываем силы в том порядке, в каком они встречаются при обходе фермы по часовой стрелке, и обозначаем их двумя малыми буквами, соответствующими тем большим буквам, которыми обозначены две смежные области, разграниченные линией действия данной силы при обходе фермы по часовой стрелке. Откладываем в масштабе вектор *cd*, соответствующий реакции $\boldsymbol{R}_A$, к нему прибавляем вектор *de*, соответствующий силе $\boldsymbol{P}$, таким же образом откладываем векторы *ef*, *fg*, *gc*, соответствующие силам $\boldsymbol{R}_B$, $\boldsymbol{P}$ и $2\boldsymbol{P}$.

Получив замкнутый многоугольник внешних сил, приступаем к построению многоугольников сил, приложенных к узлам фермы, начиная с того узла, в котором есть только две неизвестные силы, например с узла *I*.

Многоугольники строим, также обходя узлы по часовой стрелке и обозначая усилия в стержнях двумя малыми буквами, соответствующими тем большим буквам, которыми обозначены две смежные области, разграниченные данным стержнем. Согласно принятым обозначениям многоугольник сил, приложенных к узлу *I*, должен состоять из векторов *cd*, *dh*, *hc*, соответствующих по модулю и направлению силе R_A и усилиям стержней *1*, *4*.

Поскольку все стержни прямолинейны, соединены между собой шарнирами и внешние силы приложены только к узлам, то усилия в каждом стержне направлены вдоль стержня, так как он находится в равновесии под действием только двух сил, реакций шарниров. Стержень при указанных условиях может быть только сжат или растянут.

Вектор *cd* на рисунке уже есть; чтобы найти векторы *dh* и *hc*, достаточно через точку *c* провести прямую, параллельную стержню *1*, а через точку *d* – прямую, параллельную стержню *4*, и в точке их пересечения поставить букву *h*.

Переходим к узлу *III*. Многоугольник сил, приложенных к нему, должен состоять из векторов *gc*, *ch*, *hi*, *ig*. Векторы *gc*, *ch* на рисунке уже есть; чтобы найти векторы *hi*, *ig*, достаточно провести через точку *h* прямую, параллельную стержню *7*, а через точку *g* – прямую, параллельную стержню *2*, и в точке их пересечения поставить букву *i*.

Переходим к узлу *II*. Многоугольник сил, приложенных к нему, должен состоять из векторов *ih*, *hd*, *de*, *el*, *li*. Векторы *ih*, *hd*, *de* на рисунке уже есть; чтобы найти векторы *el*, *li*, проводим через точку *e* прямую, параллельную стержню *5*, а через точку *i* – прямую, параллельную стержню *8*, и в точке их пересечения ставим букву *l*.

Переходим к узлу *V*. Многоугольник сил, приложенных к нему, должен состоять из векторов *fg*, *gi*, *il*, *lm*, *mf*. Векторы *fg*, *gi*, *il* на рисунке уже есть; чтобы найти векторы *lm*, *mf*, проводим через точку *l* прямую, параллельную стержню *9*, а через точку *f* – прямую, параллельную стержню *3*, и в точке их пересечения ставим букву *m*.

Многоугольник сил, приложенных к узлу *IV*, должен состоять из векторов *ml*, *le*, *em*. Векторы *ml*, *le* на рисунке уже есть; чтобы найти вектор *em*, соединяем прямой точку *m* с точкой *e*. Эта прямая должна быть параллельна стержню *6*, так как вектор *em* соответствует усилию в стержне *6*. Таким образом, параллельность этого вектора стержню *6* является проверкой правильности построения диаграммы.

Переходя к узлу *VI*, видим, что многоугольник сил, приложенных к нему, должен состоять из векторов *fm*, *me*, *ef*, которые уже есть на рисунке. Таким образом, усилия всех девяти стержней найдены и осталось только определить, какие стержни растянуты и какие сжаты. Для этого векторы силовых многоугольников каждого узла мысленно переносим на соответствующие стержни и определяем, куда они направлены: если к рассматриваемому узлу, значит, стержень сжат, если от узла – растянут. Силовой

многоугольник *cdh* характеризует равновесие узла *I*. Силы в этом треугольнике направлены от *c* к *d*, от *d* к *h* и от *h* к *c*. Следовательно, вектор ***dh*** направлен к узлу *I*, значит, стержень *4* сжат; вектор *hc* направлен от узла *I*, значит, стержень *1* растянут. Силовой четырехугольник *gchi* характеризует равновесие узла *III*. Силы в этом четырехугольнике направлены от *g* к *c*, от *c* к *h*, от *h* к *i*, следовательно, вектор *hi* направлен от узла *III*, значит, стержень *7* растянут, вектор *ig* направлен от узла *III*, следовательно, стержень *2* растянут. Рассуждая таким образом дальше, находим, что стержни *3*, *9* также растянуты, а стержни *5*, *6*, *8* сжаты. Чтобы найти усилия стержней, измеряем их на диаграмме и умножаем на масштаб сил.

Указание. Для приобретения навыков в решении задач на определение усилий в стержнях фермы построением диаграммы Максвелла–Кремоны рекомендуется решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 4.69–4.74.

3. Определение усилий в стержнях фермы методом сечений. Рассмотренный способ расчета фермы путем построения диаграммы Максвелла – Кремоны является графическим приемом. В отличие от него *метод сечений фермы* позволяет определить усилия в стержнях аналитически.

Указание. При расчете ферм методом сечений рекомендуется такая последовательность действий:

1) определяем опорные реакции, рассматривая равновесие фермы как твердого тела, находящегося под действием плоской системы сил; для этого составляем три уравнения равновесия;

2) разрезаем мысленно ферму, к которой приложены все внешние силы, на две части так, чтобы число разрезанных стержней не превышало трех, и заменяем действие отброшенной части искомыми усилиями стержней, полагая все стержни растянутыми;

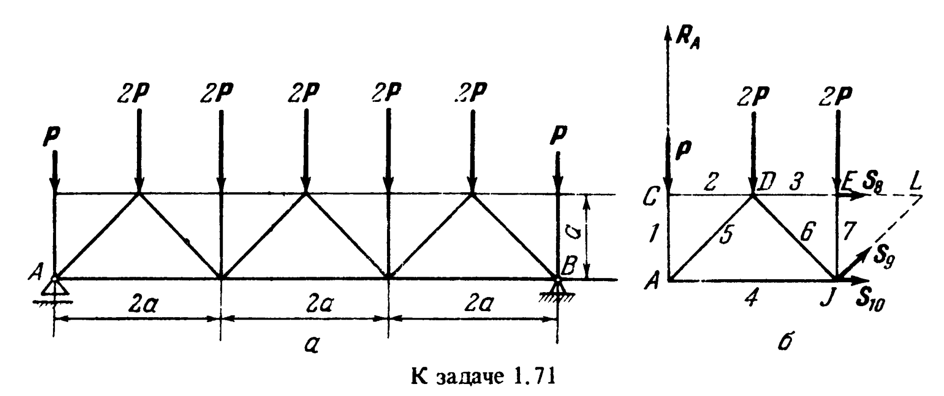
3) составляем уравнения равновесия для части фермы так, чтобы в каждое уравнение входило одно неизвестное усилие; для этого составляем уравнения моментов относительно точек, где пересекаются линии действия двух неизвестных усилий; если два стержня параллельны, то составляем уравнение проекций на ось, перпендикулярную к этим стержням, в которое также войдет одно неизвестное усилие;

4) решая каждое из составленных уравнений, находим искомое усилие в стержнях; если в ответе получается знак минус, то это означает, что стержень сжат, а не растянут.

Этот способ расчета ферм был разработан немецким ученым А. Риттером и опубликован в его учебнике "Техническая механика" (Лейпциг, 1900 г.). Метод Риттера позволяет найти усилие в любом стержне, не находя усилий в других. В этом его преимущество перед диаграммой Максвелла – Кремоны.

Задача 1.71. Определить усилия в стержнях фермы методом сечений (рис. *а*).

Р е ш е н и е. Для определения усилий в стержнях фермы сначала надо определить реакции опор. Для этого мысленно отбросим опоры и заменим их действие на ферму реакциями $\boldsymbol{R}_A$ и $\boldsymbol{R}_B$. Рассматриваем ферму как твердое тело, находящееся в равновесии под действием семи активных сил и двух неизвестных реакций опор. Ввиду симметрии фермы и нагрузки реакции опор равны друг другу и каждая равна $6P$.



К задаче 1.71

После того как реакции опор определены, переходим к определению усилий в стержнях фермы. Разрезаем мысленно ферму по стержням, усилия в которых надо определить (рис. *б*), например по стержням *8, 9, 10,* и удаляем правую часть фермы, заменив действие ее реакциями стержней $\boldsymbol{S}_8$, $\boldsymbol{S}_9$, $\boldsymbol{S}_{10}$. Направим эти реакции вдоль перерезанных стержней от узлов E и J, предположив таким образом, что стержни *8, 9, 10* растянуты. Теперь левая часть фермы (рис. *б*) находится в равновесии под действием реакции опоры $\boldsymbol{R}_A$, трех активных сил и реакций стержней $\boldsymbol{S}_8$, $\boldsymbol{S}_9$, $\boldsymbol{S}_{10}$. Чтобы найти эти реакции, составим уравнения равновесия для левой части фермы, приравнивая нулю сумму моментов всех сил относительно J и L, в которых пересекаются линии действия двух искомых неизвестных сил. Благодаря этому уравнение моментов будет содержать только одно неизвестное. Так, уравнение моментов относительно точки J будет

$$R_A \cdot 2a \quad P \cdot 2a - 2P \cdot a + S_8 \cdot a = 0,$$

откуда

$$S_8 = -8P.$$

Отрицательное значение реакции S_8 говорит о том, что в действительности эта реакция направлена в сторону, противоположную принятой, т.е. к узлу E, и, следовательно, стержень *8* сжат.

Уравнение моментов относительно точки L будет

$$-2P \cdot a - 2P \cdot 2a - P \cdot 3a + R_A \cdot 3a \quad S_{10} \cdot a = 0,$$

откуда

$$S_{10} = 9P.$$

Стержень *10*, как мы и предполагали, растянут.

Так как усилия S_8 и S_{10} параллельны, то не существует точки их пересечения, поэтому для определения усилия S_9 вместо уравнения моментов составляем уравнение проекций всех сил на вертикальную ось, перпендикулярную стержням *8* и *10*:

$$R_A - P - 2P - 2P + S_9 \cos 45° = 0,$$

откуда

$$S_9 = -2P/\sqrt{2}.$$

Отрицательное значение реакции S_9 говорит о том, что в действительности эта реакция направлена в сторону, противоположную принятой, т.е. к узлу *J*, и стержень *9* сжат. Аналогично могут быть определены методом сечений усилия в любых стержнях этой фермы.

Указание. Для приобретения навыков в решении задач на определение усилий в стержнях фермы методом сечений рекомендуется решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 4.70, 4.71, 4.73, 4.74.

§ 6. РАВНОВЕСИЕ ГИБКИХ НЕРАСТЯЖИМЫХ ПОДВЕСНЫХ НИТЕЙ

1. Основные определения и зависимости

В инженерных конструкциях нередко приходится встречаться с цепями или тросами, подвешенными по концам между двумя опорами и находящимися под действием вертикальной нагрузки, непрерывно распределенной

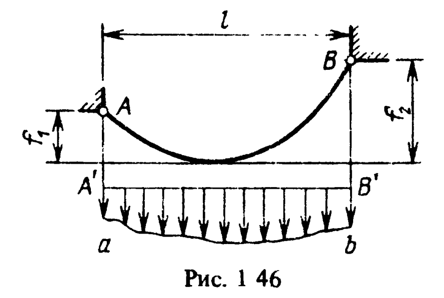


Рис. 1 46

по всей длине нити (рис. 1.46). Мы будем изучать задачи, в которых заданы величины пролета l, провесов f_1 и f_2, а также эпюра распределенной нагрузки $aA'B'b$.

При исследовании равновесия цепей или тросов нужно ответить, как правило, на два вопроса: 1) какова будет форма кривой, которую займет цепь или трос в положении равновесия? 2) чему равно натяжение цепи (троса) в любой точке по длине кривой?

Для ответа на поставленные вопросы рассмотрим равновесие участка CD нити (рис. 1.47, *а*). Точка C – нижняя точка кривой, точка D – произвольная точки нити с координатами x и y. (Направления осей координат показаны там же.)

Отсеченный участок CD, который можно рассматривать на основании принципа отвердевания как твердое тело, находится в равновесии под действием трех сил: вертикальной силы Q, представляющей собой

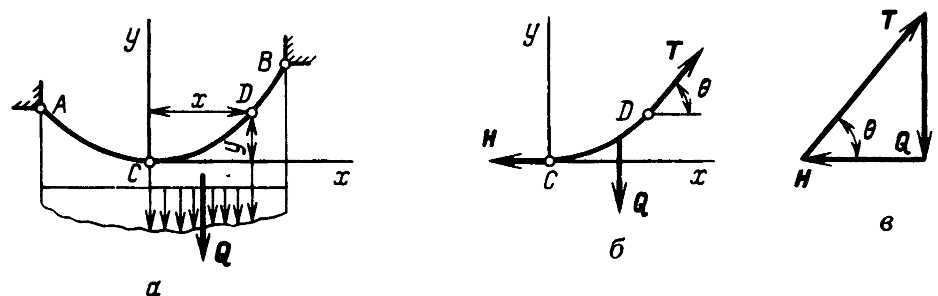


Рис. 1.47

равнодействующую распределенной нагрузки на участке CD, и двух растягивающих усилий H и T, представляющих реакции со стороны каждого из отброшенных участков нити (рис. 1.47, *б*). Силы H и T направлены по касательной к кривой соответственно в точках C и D. Вертикальная сила Q проходит через центр тяжести той части эпюры, которая расположена между рассматриваемыми сечениями. Эти три силы должны образовать замкнутый силовой треугольник, показанный на рис. 1.47, *в*. Из этого треугольника находим

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{Q}{H}.$$

Так как $\operatorname{tg}\theta = dy/dx$, это выражение принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{H}. \qquad (1^*)$$

С другой стороны, из силового треугольника следует, что

$$T = \sqrt{H^2 + Q^2}. \qquad (2^*)$$

Уравнения (1^*) и (2^*) являются основными при расчете гибких подвесных нитей. В этих уравнениях сила H постоянна, а сила Q является, очевидно, функцией x.

Уравнение (1^*) является дифференциальным уравнением кривой в положении равновесия и после интегрирования дает ответ на первый из поставленных выше вопросов. Второе уравнение отвечает на второй вопрос.

Относительно характера внешней нагрузки на нить необходимо отметить следующее. На практике наиболее часто встречаются два случая распределения этой нагрузки.

1. Тонкий трос или легкая цепь подвержены воздействию равномерно распределенной нагрузки, приложенной с помощью вертикальных подвесок (рис. 1.48). Обычно эта нагрузка велика по сравнению с весом самого троса или цепи, и можно считать, что она распределена равномерно по длине горизонтального пролета.

2. Гибкая нить свободно висит в поле сил тяжести, находясь под действием только собственного распределенного веса (рис. 1.49). Эпюра такой нагрузки определяется, очевидно, видом кривой, форму которой принимает нить.

В первом случае нагруженная гибкая нить принимает форму параболы, во втором – цепной линии. Приведем основные формулы для определения характеристик нити в обоих основных случаях.

П а р а б о л и ч е с к а я   н и т ь. Если на нить действует равномерно распределенная по длине пролета l вертикальная нагрузка интенсивностью q (рис. 1.48), то уравнение равновесной кривой нити при выбранном направлении осей координат имеет вид

$$y = \frac{qx^2}{2H}, \tag{3*}$$

т.е. нить образует участок параболы с вертикальной осью.

Натяжение нити вдоль кривой изменяется в соответствии с уравнением (2*)

$$T = \sqrt{H^2 + (qx)^2}, \tag{4*}$$

откуда следует, что натяжение нити будет минимальным в самой нижней точке C (где оно равно H) и что оно увеличивается к концам нити, достигая максимума в верхней опоре.

Силы натяжения на концах нити в точках A и B соответственно равны

$$T_a = \sqrt{H^2 + q^2a^2}, \quad T_b = \sqrt{H^2 + q^2b^2}, \tag{5*}$$

где расстояния a и b нижней точки C относительно опор A и B определяются из уравнений

$$f_1 = \frac{qa^2}{2H}, \quad f_2 = \frac{qb^2}{2H} \tag{6*а}$$

или из уравнений

$$a = \frac{l}{2} - \frac{(f_2 - f_1)H}{ql}, \quad b = \frac{l}{2} + \frac{(f_2 - f_1)H}{ql}. \tag{6*б}$$

Во всех этих уравнениях остается пока неизвестным минимальное натяжение H. Оно определяется по формуле

$$H = \frac{ql^2}{2(\sqrt{f_1} \pm \sqrt{f_2})^2}. \qquad (7^*)$$

В этом уравнении знак плюс соответствует случаю, когда вершина параболы, определяющей положение равновесия нити, расположена между

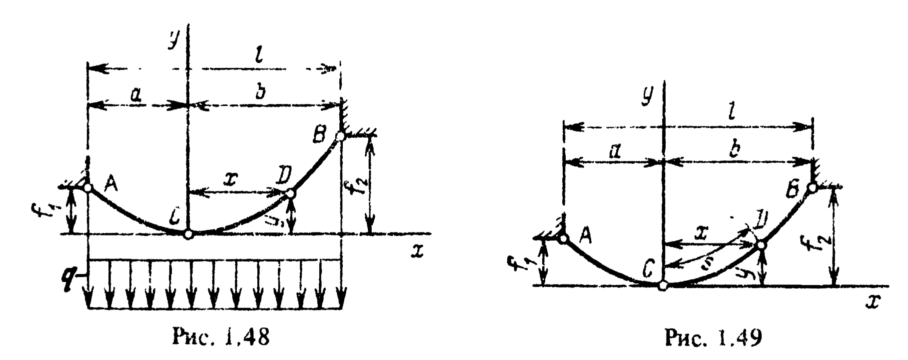


Рис. 1.48 Рис. 1.49

опорами, как это показано на рисунке. Знак минус относится к тому случаю, когда вершина параболы лежит по одну сторону от обеих опор.

В важном частном случае, когда обе опоры находятся на одном уровне, имеем

$$f_1 = f_2 = f, \quad a = b = \frac{l}{2} \quad \text{и} \quad H = \frac{ql^2}{8f}.$$

Цепная линия. Будем считать, что нить свободно подвешена в поле сил тяжести и подвержена действию только собственного веса, равномерно распределенного по длине нити (рис. 1.49). Введем следующие обозначения: q — вес единицы длины нити, s — длина дуги CD. Тогда связь между координатами s и x точки D дается уравнением*)

$$s = \frac{H}{q} \operatorname{sh} \frac{qx}{H}. \qquad (8^*)$$

Длина нити L между опорами равна

$$L = \frac{H}{q}\left(\operatorname{sh}\frac{qa}{H} + \operatorname{sh}\frac{qb}{H}\right). \qquad (9^*)$$

---

*) Напомним, что гиперболические синус и косинус определяются формулами

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \quad \operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}).$$

Уравнение равновесной кривой нити при выбранном направлении координатных осей имеет вид

$$y = \frac{H}{q}\left(\text{ch}\,\frac{qx}{H} - 1\right). \qquad (10^*)$$

Это – уравнение цепной линии с вертикальной осью.

Натяжение нити в произвольной точке D равно

$$T = H + qy. \qquad (11^*)$$

Из этого уравнения следует, что натяжение T будет минимальным в нижней точке C нити, где оно равно H, затем оно увеличивается к концам нити и достигает наибольшего значения в верхней опоре. Натяжения на концах A и B соответственно равны

$$T_a = H + qf_1, \quad T_b = H + qf_2. \qquad (12^*)$$

Если требуется определить расстояния a и b, то следует воспользоваться формулами

$$a = \frac{H}{q}\text{arch}\left(\frac{qf_1}{H} + 1\right), \quad b = \frac{H}{q}\,\text{arch}\left(\frac{qf_2}{H} + 1\right). \qquad (13^*)$$

Наконец, натяжение H находится из уравнения

$$\frac{ql}{H} = \text{arch}\left(\frac{qf_1}{H} + 1\right) + \text{arch}\left(\frac{qf_2}{H} + 1\right) \qquad (14^*)$$

с помощью таблиц гиперболических функций.

При решении задач на равновесие гибких нитей необходимо:

1) определить вид нагрузки, действующей на нить (собственный вес, нагрузка, равномерно распределенная по горизонтальному пролету, и т.п.);

2) выбрать систему координат и составить дифференциальное уравнение равновесия нити и уравнение для растягивающего усилия T;

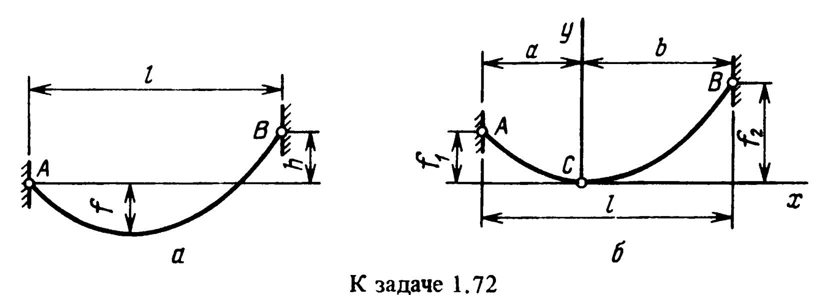
3) проинтегрировав уравнение равновесия, найти уравнение равновесной кривой нити;

4) в зависимости от конкретных условий задачи найти искомые параметры.

2. Параболическая нить

Задача 1.72. На рис. *а* изображен трос подвесного моста, несущий равномерно распределенную по его горизонтальной длине l нагрузку $Q = 54$ кН. Определить вид кривой, которую займет трос, и максимальное натяжение троса, если $l = 30$ м, $f = 3{,}6$ м, $h = 3$ м.

Р е ш е н и е. Выбираем систему координат, помещая начало в нижней точке троса C и направляя ось x горизонтально вправо, а ось y – вертикально вверх (рис. *б*). Провисания троса, очевидно, равны $f_1 = f = 3{,}6$ м, $f_2 = f + h = 6{,}6$ м. Интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q = Q/l = 54/30 = 1{,}8$ кН/м.



К задаче 1.72

Чтобы написать уравнение равновесной кривой троса, воспользуемся уравнением (1*). В данном случае сила Q равна

$$Q = qx,$$

и уравнение принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{qx}{H}.$$

Интегрируя, получаем

$$y = \frac{qx^2}{2H} + C_2.$$

Поскольку при выбранной системе координат при $x = 0$ координата $y = 0$, произвольная постоянная $C_2 = 0$ и уравнение равновесной кривой троса будет

$$y = \frac{qx^2}{2H}. \qquad (1)$$

Это – уравнение параболы с вертикальной осью и с вершиной в точке C. Для нахождения натяжения троса T воспользуемся уравнением (2*), которое примет вид

$$T = \sqrt{H^2 + (qx)^2}.$$

Поскольку, как это следует из формулы, натяжение T возрастает по мере удаления от точки C, максимальное натяжение троса будет иметь

место в точке B и составит

$$T_b = \sqrt{H^2 + q^2 b^2},$$

где b – расстояние точки C от опоры B, взятое по горизонтали.

Для нахождения неизвестных пока величин b и H можно воспользоваться формулами (6*) и (7*); проделаем это подробнее.

Применив уравнение равновесной кривой троса (1) к точкам A и B, найдем

$$f_1 = \frac{qa^2}{2H}, \quad f_2 = \frac{qb^2}{2H}. \tag{2}$$

Вычтя первое уравнение из второго, получим

$$2(f_2 - f_1)H = q(b^2 - a^2).$$

Одновременно имеем, что

$$a + b = l.$$

Из последних двух уравнений следует

$$a = \frac{l}{2} - \frac{(f_2 - f_1)H}{ql}, \quad b = \frac{l}{2} + \frac{(f_2 - f_1)H}{ql}. \tag{3}$$

Выражение для нахождения H может быть найдено подстановкой полученного значения для b во второе уравнение системы (2). Получаем

$$(f_2 - f_1)^2 H^2 - ql^2 (f_2 + f_1)H + \frac{q^2 l^4}{4} = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, находим

$$H = \frac{ql^2}{2(\sqrt{f_1} \pm \sqrt{f_2})^2}.$$

В этом уравнении следует принять знак плюс, так как вершина параболы лежит между опорами. Следовательно, минимальное натяжение H равно

$$H = \frac{ql^2}{2(\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2})^2} = \frac{1{,}8 \cdot 30^2}{2(\sqrt{3{,}6} + \sqrt{6{,}6})^2} \approx 40{,}6 \text{ кН}.$$

Величину b можно теперь найти либо из второго уравнения (2), либо из второго уравнения (3). Воспользовавшись последним, получаем

$$b = \frac{l}{2} + \frac{(f_2 - f_1)H}{ql} = \frac{30}{2} + \frac{(6{,}6 - 3{,}6) \cdot 40{,}6}{1{,}8 \cdot 30} \approx 17{,}25 \text{ м}.$$

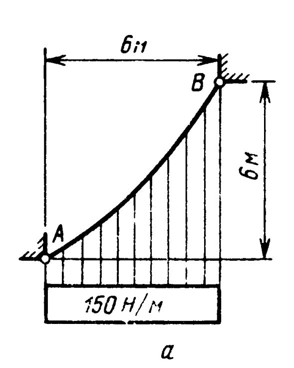
Теперь уранение (1) равновесной кривой троса принимает вид

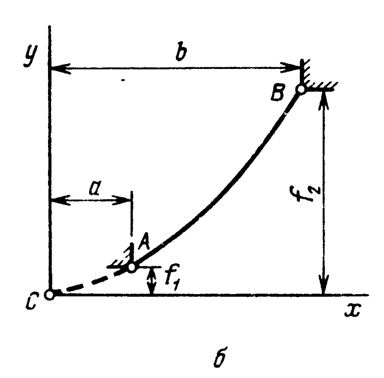
$$y = \frac{1,8}{2 \cdot 40,6} x^2 = 0,0222 x^2.$$

Максимальное натяжение троса

$$T_b = \sqrt{H^2 + q^2 b^2} = \sqrt{40,6^2 + 1,8^2 \cdot 17,25^2} \approx 51,1 \text{ кН}.$$

Задача 1.73. Канат несет нагрузку в 150Н на каждый метр длины горизонтального пролета (рис. *а*). Определить максимальное растягивающее





К задаче 1.73

усилие в канате, если натяжение в точке B в 2 раза больше, чем в точке A. Размеры конструкции даны на рис. *а*.

Р е ш е н и е. Предположим, что вершина C параболы, определяющей положение равновесия каната, лежит слева от обеих опор (рис. *б*). Обозначим, как обычно, через a и b расстояния опор A и B от вершины C по горизонтали, а через f_1 и f_2 эти же расстояния по вертикали.

Имеем очевидные равенства

$$b = a + 6, \tag{1}$$

$$f_2 = f_1 + 6. \tag{2}$$

В задаче указано, что натяжение каната в точке B в 2 раза больше, чем в точке A. Запишем это условие в виде уравнения, использовав непосредственно формулы (5*) и учитывая равенство (1). Имеем

$$2\sqrt{H^2 + q^2 a^2} = \sqrt{H^2 + q^2 (a + 6)^2}, \tag{3}$$

где H – натяжение каната в точке C в Н, q – интенсивность распределенной нагрузки в Н/м. В этом уравнении два неизвестных a и H. Для их определения необходимо составить еще одно уравнение. Оно получается из (2), если величины f_1 и f_2 выразить по формулам (6*а) и учесть снова

равенство (1)

$$\frac{q(a+6)^2}{2H} = \frac{qa^2}{2H} + 6. \qquad (4)$$

Возводя обе части уравнения (3) в квадрат и раскрывая скобки в левой части уравнения (4), получим после некоторых упрощений:

$$\begin{aligned} &H^2 + q^2a^2 - 4q^2a - 12q^2 = 0, \\ &\frac{qa}{H} + \frac{3q}{H} = 1. \end{aligned} \qquad (5)$$

Из второго уравнения этой системы находим

$$H = q(a+3). \qquad (6)$$

Подставляя это значение H в первое уравнение системы (5), получаем квадратное уравнение

$$2a^2 + 2a - 3 = 0,$$

откуда

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+6}}{2}.$$

Таким образом, имеется два значения a.

Выбрав положительное значение, находим

$$a = \frac{-1+\sqrt{7}}{2} \approx 0{,}823 \text{ м}.$$

Из уравнения (6) определяем H:

$$H = q(a+3) = 150(0{,}823+3) \approx 573{,}4 \text{ Н}.$$

Возвратившись опять ко второй формуле (5*), находим искомое максимальное усилие в канате

$$T_b = \sqrt{H^2 + q^2(a+6)^2} = \sqrt{573{,}4^2 + 150^2(0{,}823+6)^2} \approx 1173 \text{ Н}.$$

В этом случае вершина параболы C лежит слева от обеих опор (рис. *б*).

Если же выбрать второй отрицательный корень, то

$$a = \frac{-1-\sqrt{7}}{2} \approx -1{,}823 \text{ м}$$

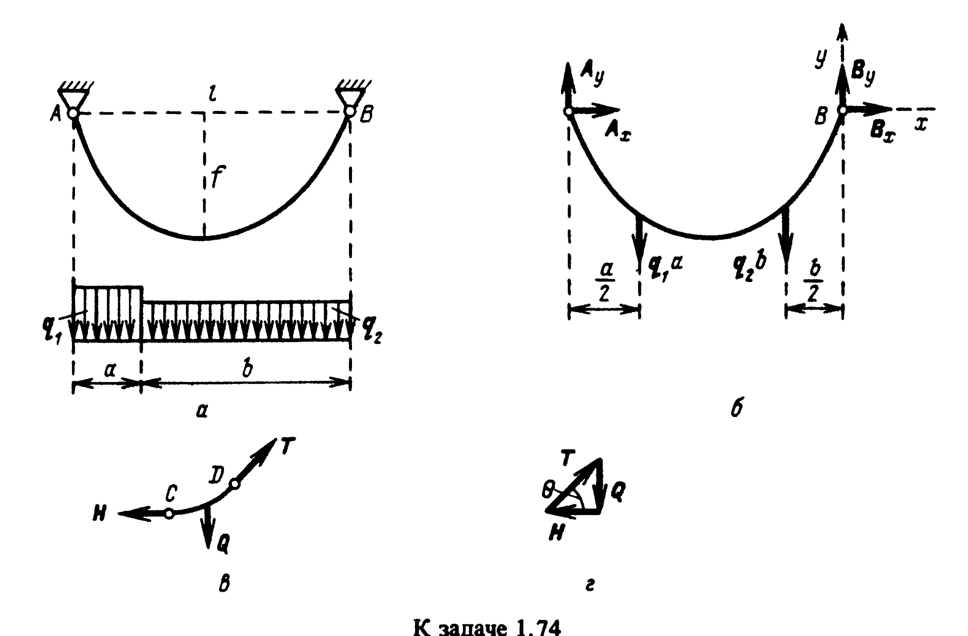
и вершина параболы лежит между опорами. Для этого случая находим:

$$b = 4{,}177 \text{ м}, \quad H = 176{,}6 \text{ Н}, \quad T_a = 325{,}5 \text{ Н},$$

$$T_b = 651 \text{ Н}, \quad f_1 = 1{,}46 \text{ м}, \quad f_2 = 7{,}46 \text{ м}.$$

7 Заказ № 899

Задача 1.74. Гибкая нерастяжимая нить прикреплена в точках A и B, лежащих на одной горизонтали (рис. *а*). На нить действует вертикальная нагрузка, распределенная по всей длине пролета, причем на участке длиной a интенсивность нагрузки q_1, а на участке длиной b ее интенсивность q_2. Длина пролета $AB = l$, наибольший провес f. Определить горизонтальное натяжение нити, если $a \ll b$ и наинизшая точка лежит на участке b.



К задаче 1.74

Р е ш е н и е. Рассмотрим равновесие всей нити, отбросив мысленно опоры и заменив их действие реакциями (рис. *б*). Для определения составляющей реакции B_y составим сумму моментов всех сил относительно точки A

$$B_y l - q_1 a \frac{a}{2} - q_2 b\left(l - \frac{b}{2}\right) = 0, \tag{1}$$

откуда

$$B_y = \frac{q_1 a^2 + 2q_2 bl - q_2 b^2}{2l}. \tag{2}$$

Рассмотрим равновесие отрезка гибкой нити CD, где C – наинизшая точка, а D – произвольная точка правой части нити. Она находится под действием трех сил: натяжения H в точке C, натяжения T в точке D и вертикальной нагрузки Q (рис. *в*). Строим на этих трех силах замкнутый силовой тре-

угольник, откуда

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{Q}{H}. \tag{3}$$

Но вертикальная нагрузка

$$Q = B_y - q_2 x, \tag{4}$$

где x отсчитывается по горизонтали от опоры B.

Внеся (4) в (3), имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B_y - q_2 x}{H}. \tag{5}$$

Отделяя переменные и интегрируя, находим

$$Hy = B_y x - \frac{1}{2} q_2 x^2 + C_1. \tag{6}$$

Произвольная постоянная $C_1 = 0$, так как при $x = 0$ $y = 0$. С другой стороны, в точке C

$$\frac{dy}{dx} = 0 \tag{7}$$

и из (5) определяем

$$x_1 = \frac{B_y}{q_2}. \tag{8}$$

Подставив в уравнение (6) $y = f$, а вместо x его значение (8), получим

$$Hf = \frac{B_y^2}{2q_2}. \tag{9}$$

Внеся в это равенство значение B_y из (2), окончательно находим

$$H = \frac{(q_1 a^2 + 2q_2 bl - q_2 b^2)^2}{8 q_2 f l^2}. \tag{10}$$

Задача 1.75. Канат подвешен к точкам A и B, лежащим на одной горизонтали. Он несет нагрузку, равномерно распределенную по горизонтали интенсивностью q Н/м. Расстояние $AB = l$. Провес в середине пролета f. Определить длину каната, а также изменение провеса, если длина каната вследствие температурного скачка изменилась на величину ΔS. Ввиду малости отношения $f/l \leqslant 1/10$ членами, содержащими его в степени выше второй, пренебречь.

Решение. Выбираем начало координат в точке A. Тогда уравнение (1*) примет вид

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{qx}{H} + C_1. \tag{1}$$

Интегрируя его, находим уравнение кривой

$$y = -\frac{qx^2}{2H} + C_1 x + C_2. \tag{2}$$

Граничные условия:

$$y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad y = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Внося эти условия в уравнение (2), получаем уравнение кривой

$$y = \frac{q}{2H} x(l - x). \tag{3}$$

Это – парабола с вертикальной осью.

Вычисляя от (3) производную по x и приравнивая ее нулю, находим, что наибольший провес расположен посредине и равен

$$f = \frac{ql^2}{8H}. \tag{4}$$

Длину каната вычисляем по формуле

$$S = \int_0^l \sqrt{1 + y'^2}\, dx, \tag{5}$$

внося в эту формулу значение

$$y' = \frac{q}{2H}(l - 2x) = \frac{4f}{l}\left(1 - 2\frac{x}{l}\right). \tag{6}$$

Разлагая подынтегральную функцию в ряд и интегрируя, находим

$$S = l\left[1 + \frac{8}{3}\left(\frac{f}{l}\right)^2 - \frac{32}{5}\left(\frac{f}{l}\right)^4 + \frac{256}{7}\left(\frac{f}{l}\right)^6 - \dots\right]. \tag{7}$$

Для параболы с малой стрелкой прогиба, ограничиваемся приближенно значением

$$S = l\left(1 + \frac{8}{3}\frac{f^2}{l^2}\right). \tag{8}$$

Отсюда находим зависимость вариации провеса от вариации длины

$$\Delta S = \frac{16}{3}\frac{f}{l}\Delta f \tag{9}$$

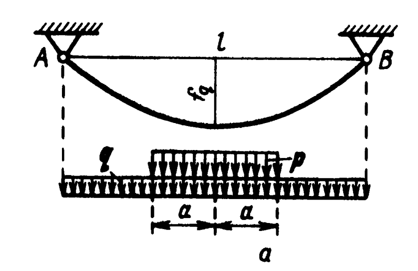
или окончательно

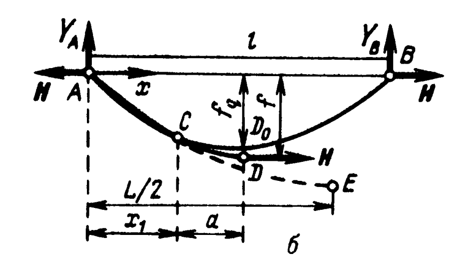
$$\Delta f = \frac{3}{16}\,\frac{l}{f}\,\Delta S. \tag{10}$$

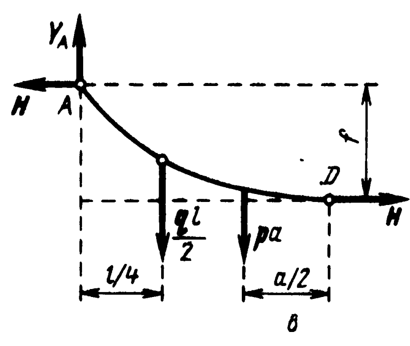
Заметим, что формула (8) с учетом (4) может быть записана в виде

$$S = l\left(1 + \frac{q^2 l^2}{24H^2}\right). \tag{11}$$

Задача 1.76. Гибкая нерастяжимая нить, закрепленная в точках A и B, лежащих на одной горизонтали, и нагруженная равномерно распределенной по горизонтали нагрузкой q Н/м, имеет провес f_q. Расстояние $AB = l$. Затем нить догрузили симметрично расположенной равномерно распределенной по горизонтали нагрузкой p Н/м на участке длиной $2a$ (рис. *а*). Найти уравнения кривой равновесия нити, полагая стрелку провеса малой. Определить изменения провеса f и горизонтального натяжения H. Найти отношение $2a/l$, при котором провес f становится максимальным.







К задаче 1.76

Р е ш е н и е. Обозначим буквой C точку нити, расположенную на вертикали, проходящей на расстоянии a от центральной оси. Точка C делит нить AD на две параболические ветви AC и CD, которые в точке C имеют общую касательную (рис. *б*).

В самом деле, разрежем мысленно нить в точке C и рассмотрим равновесие этой точки. На точку C действуют две реакции – натяжение части нити AC и части нити CD. Под действием двух сил точка C может находиться в равновесии только при условии, что они направлены по одной прямой. Но натяжения направлены по касательным к соответствующей части нити. Следовательно, касательные к частям нити AC и CD в точке C должны совпадать.

Выбирая оси координат с началом в точке A, запишем уравнение ветви AC, согласно (1*), в виде

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{qx}{H} + C_1. \tag{1}$$

Интегрируя его и учитывая начальное условие $y = 0$ при $x = 0$, получим

$$y = -\frac{qx^2}{2H} + C_1 x. \tag{2}$$

Аналогично находим уравнение ветви CD:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{q+p}{H} x + D_1, \tag{3}$$

интегрируя которое находим

$$y = -\frac{q+p}{2H} x^2 + D_1 x + D_2. \tag{4}$$

В точке C с абсциссой $x_1 = l/2 - a$ равны ординаты обеих ветвей и их производные, определяющие угол наклона касательных:

$$-\frac{qx_1}{H} + C_1 = -\frac{q+p}{H} x_1 + D_1, \tag{5}$$

$$-\frac{qx_1^2}{2H} + C_1 x_1 = -\frac{q+p}{2H} x_1^2 + D_1 x_1 + D_2. \tag{6}$$

Из (5) и (6) находим

$$D_1 = C_1 + \frac{p}{H} x_1, \tag{7}$$

$$D_2 = -\frac{p}{2H} x_1^2. \tag{8}$$

Тогда уравнение параболической ветви CD будет

$$y = -\frac{qx^2}{2H} + C_1 x - \frac{p}{2H}(x - x_1)^2. \tag{9}$$

Для определения произвольной постоянной интегрирования C_1 воспользуемся условием горизонтальности касательной к кривой посредине пролета, т.е.

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x = \frac{l}{2}. \tag{10}$$

Подставляя эти условия в (9), находим

$$C_1 = \frac{ql}{2H} + \frac{pa}{H}. \tag{11}$$

Итак, уравнение ветви CD окончательно будет

$$y = -\frac{qx^2}{2H} + \left(\frac{ql}{2H} + \frac{pa}{H}\right)x - \frac{p}{2H}(x - x_1)^2. \tag{12}$$

Из этого уравнения находится провес f, если подставить значение $x = l/2$:

$$f = \frac{1}{2H}\left[\frac{ql^2}{4} + pa(l - a)\right]. \tag{13}$$

Заметим, что формулу (13) можно получить и другим путем. Действительно, рассмотрим равновесие половины нити AD (рис. *в*), находящейся под действием нагрузок: $ql/2$, pa, горизонтальных реакций H и вертикальной составляющей реакции Y_A. Из равенства нулю суммы проекций всех сил на ось y находим

$$Y_A = \frac{ql}{2} + pa.$$

Составляя далее сумму моментов всех сил относительно точки D, получим

$$fH - Y_A\frac{l}{2} + \frac{ql}{2}\,\frac{l}{4} + pa\,\frac{a}{2} = 0$$

или

$$fH = \frac{ql^2}{8} + \frac{pa}{2}(l - a),$$

что совпадает с (13).

Уравнение ветви AC получаем, внося в равенство (2) значение произвольной постоянной интегрирования (11):

$$y = \left(\frac{ql}{2H} + \frac{pa}{H}\right)x - \frac{qx^2}{2H}. \tag{14}$$

Найдем абсциссу точки E вершины параболы AC. Для этого приравняем нулю производную (14)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ql}{2H} + \frac{pa}{H} - \frac{qx_2}{H} = 0, \tag{15}$$

откуда

$$x_2 = \frac{L}{2} = \frac{l}{2} + \frac{p}{q}a. \tag{16}$$

Переходим к определению горизонтального натяжения H. Для этого находим длину половины нити AD_0 при равномерно распределенной по горизонтали нагрузке q, согласно равенству (8) предыдущей задачи

$$AD_0 = \frac{l}{2}\left(1 + \frac{8}{3}\frac{f_q}{l^2}\right), \tag{17}$$

где f_q — провес нити под действием нагрузки q. После приложения добавочной равномерно распределенной по горизонтали нагрузки p длина половины нити AD найдется из равенства (рис. *б*)

$$AD = AE - CE + CD. \tag{18}$$

Находим слагаемые правой части, пользуясь формулой (11) предыдущей задачи. Имеем

$$AE = \frac{L}{2}\left(1 + \frac{q^2L^2}{24H^2}\right). \tag{19}$$

Далее, замечая, что с учетом (16)

$$\frac{L}{2} - x_1 = \left(1 + \frac{p}{q}\right)a,$$

находим

$$CE = \left(1 + \frac{p}{q}\right)a\left[1 + \frac{(p+q)^2}{6H^2}a^2\right], \tag{20}$$

$$CD = a\left[1 + \frac{(p+q)^2a^2}{6H^2}\right]. \tag{21}$$

Ввиду того, что нить нерастяжима, длина участка нити $AD_0 = AD$. Внося значения (19), (20) и (21) в формулу (18) и приравнивая ее (17), найдем

$$\frac{l}{2}\left(1 + \frac{8}{3}\frac{f_q^2}{l^2}\right) = \frac{l}{2}(1 + zn)\left[1 + \frac{q^2l^2(1+zn)^2}{24H^2}\right] -$$

$$- a(n+1)\left[1 + \frac{a^2(p+q)^2}{6H^2}\right] + a\left[1 + \frac{a^2(p+q)^2}{6H^2}\right], \tag{22}$$

где обозначено $p/q = n$, $2a/l = z$. При этом учтено, что $L = l(1 + zn)$. Согласно формуле (4) предыдущей задачи

$$H_q = \frac{ql^2}{8f_q}. \tag{23}$$

Тогда формула (22) может быть переписана в виде

$$H = H_q\sqrt{1 + 3nz + 3n^2z^2 - (2n^2 + n)z^3}. \tag{24}$$

Заменяя H и H_q через f и f_q по формулам (13) и (23), находим

$$\frac{f}{f_q} = \frac{1 + nz(2 - z)}{\sqrt{1 + 3nz + 3n^2z^2 - (2n^2 + n)z^3}}. \tag{25}$$

Для определения участка $2a_1$, на котором надо расположить добавочную нагрузку p, чтобы провес достиг максимума, надо вычислить производную $\partial f/\partial z$ и приравнять ее нулю. Это приводит к уравнению

$$(2n^2 + n)z^4 - (2n^2 - 2n)z^3 - 3(n - 1)z^2 - 4z + 1 = 0.$$

Корни этого уравнения $z_1 = 2a_1/l$ могут быть найдены графически или приближенными методами. Ниже в таблице приводятся искомые значения при $0 \leqslant n \leqslant 1$.

n	0	0,10	0,25	0,50	1,00
z_1	0,333	0,322	0,306	0,289	0,253
$f/f_q - 1$	0	0,0069	0,0151	0,0281	0,0456
H/H_q	1	1,047	0,112	0,213	1,379

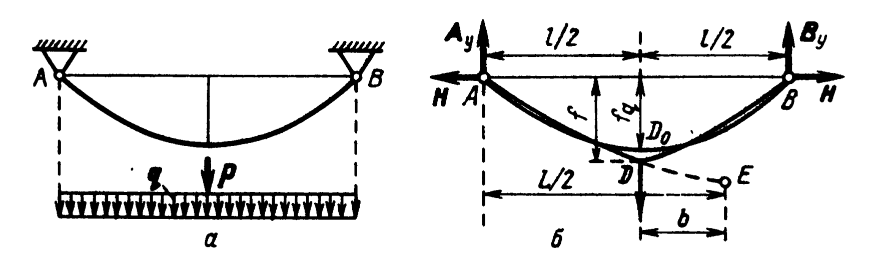
Эта задача впервые была корректно решена С.П. Тимошенко*).

Задача 1.77. Гибкий нерастяжимый канат подвешен к шарнирам A и B, лежащим на одной горизонтали. Канат находится под действием нагрузки q Н/м, равномерно распределенной по горизонтали. Затем в наинизшей точке к канату приложили сосредоточенную силу P (рис. a).

*) Timoshenko S. Journal Franklin Institute. – 1943. – №235. – С. 213.

Требуется определить изменение провеса и горизонтального натяжения, если отношение $f/l \leqslant 10$ и членами, содержащими это отношение в степени выше второй, можно пренебречь.

Решение. Кривая, образованная канатом при одновременном действии двух нагрузок, состоит из двух симметричных ветвей парабол AD и BD (рис. *б*). В точке D обе кривые образуют угловую точку D.



К задаче 1.77

Горизонтальное натяжение H_q при действии только распределенной нагрузки q равно

$$H_q = \frac{ql^2}{8f_q}. \tag{1}$$

Проектируя все силы, действующие на канат (включая силу P), на вертикальную ось и замечая, что $A_y = B_y$ ввиду симметрии, находим

$$A_y = \frac{1}{2}(ql + P) = \frac{ql}{2}(1 + \nu), \tag{2}$$

где обозначено $P/ql = \nu$.

Разрежем мысленно канат в точке D и составим сумму моментов всех сил относительно этой точки:

$$A_y \frac{l}{2} - q\frac{l}{2}\frac{l}{4} - Hf = 0. \tag{3}$$

Тогда, подставляя в это уравнение величину A_y из (2), получаем

$$f = \frac{1}{H}\left(\frac{ql^2}{8} + \frac{Pl}{4}\right) = \frac{ql^2}{8H}(1 + 2\nu). \tag{4}$$

Согласно условию канат нерастяжим. Следовательно, длины дуг AD_0 до приложения силы P и AD после приложения силы P равны. Длина дуги

AD_0 равна (см. формулу (8) задачи 1.75)

$$AD_0 = \frac{l}{2}\left(1 + \frac{8}{3}\frac{f_q^2}{l^2}\right). \tag{5}$$

С другой стороны, длина дуги $AD = AE - DE$.

Пользуясь формулой (11) задачи 1.75, находим

$$AE = \frac{L}{2}\left(1 + \frac{q^2L^2}{24H^2}\right), \quad DE = b\left(1 + \frac{q^2b^2}{6H^2}\right), \tag{6}$$

где $L/2$ – расстояние до вершины параболы E от вертикали, проходящей через шарнир A, b – расстояние от той же точки E до вертикали, проходящей через точку D. Так как канат нагружен только вертикальными силами и горизонтальные натяжения в любой точке каната равны, то расстояние b можно найти, приравнивая вертикальную составляющую в точке D. Фиктивная вертикальная нагрузка на участке DE, равная qb, должна равняться вертикальной нагрузке в точке D, равной для левой половины каната $P/2$, т.е.

$$\frac{P}{2} = qb$$

или

$$b = \frac{P}{2q} = \frac{l\nu}{2}.$$

Приравнивая длины дуг $AD_0 = AD$ с учетом (5) и (6), находим

$$\frac{l}{2}\left(1 + \frac{8}{3}\frac{f_q^2}{l^2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \nu)\left[1 + \frac{q^2l^2(1+\nu)^2}{24H^2}\right] - \frac{l}{2}\nu\left(1 + \frac{q^2l^2\nu^2}{24H^2}\right).$$

Если учесть (1), то после несложных преобразований находим

$$H = H_q\sqrt{1 + 3\nu + 3\nu^2},$$

$$f = f_q\frac{1 + 2\nu}{\sqrt{1 + 3\nu + 3\nu^2}}.$$

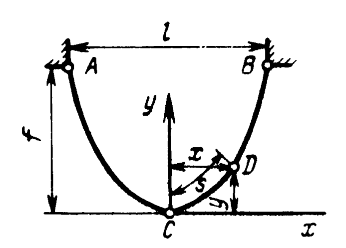
Эти формулы определяют изменения горизонтального натяжения и провеса, вызванные приложением сосредоточенной силы P.

3. Цепная линия

Задача 1.78. Гибкая нить длиной 30 м и весом единицы длины 7,5 Н/м свободно подвешена к двум опорам, находящимся на взаимном расстоянии 15 м и на одном уровне. Определить стрелу провисания в середине пролета и максимальное натяжение нити.

Решение. Изобразим схематически равновесное положение нити. В задаче заданы: расстояние между опорами l = 15 м, длина всей нити L = 30 м и вес единицы длины нити q = 7,5 Н/м. Здесь имеет место второй основной случай нагружения, когда нить принимает форму цепной линии.

Для определения величины провисания нити f необходимо составить уравнение равновесной кривой нити. Выбрав систему координат Cxy,



К задаче 1.78

как показано на рисунке, воспользуемся основным дифференциальным уравнением (1*), которое принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{qs}{H}, \tag{1}$$

где s – длина дуги CD.

Для интегрирования этого уравнения надо предварительно выразить длину s как функцию координат x и y. Для этого используем известное соотношение

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx,$$

которое после подстановки в него значения dy/dx из уравнения (1) примет вид

$$\frac{ds}{\sqrt{1 + \left(\frac{ds}{H}\right)^2}} = dx.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим

$$\frac{H}{q}\operatorname{arsh}\frac{qs}{H} = x + C_1. \tag{2}$$

Постоянная интегрирования C_1 определяется из условия, что для выбранной системы координат $s = 0$ при $x = 0$. Отсюда $C_1 = 0$. Тогда урав-

нение (2) принимает вид

$$s = \frac{H}{q}\operatorname{sh}\frac{qx}{H}. \tag{3}$$

Подставив это выражение для s в уравнение (1), получаем дифференциальное уравнение равновесной кривой нити

$$dy = \operatorname{sh}\frac{qx}{H}\,dx.$$

После интегрирования найдем

$$y = \frac{H}{q}\operatorname{ch}\frac{qx}{H} + C_2.$$

Поскольку при $x = 0$ координата $y = 0$, получаем $C_2 = -H/q$ и окончательно

$$y = \frac{H}{q}\left(\operatorname{ch}\frac{qx}{H} - 1\right). \tag{4}$$

Теперь мы имеем все уравнения, необходимые для решения задачи. Действительно, положив в уравнении (3) $x = l/2$, получим

$$\frac{L}{2} = \frac{H}{q}\operatorname{sh}\frac{ql}{2H},$$

или, после подстановки числовых значений,

$$\frac{112{,}5}{H} = \operatorname{sh}\frac{56{,}25}{H}.$$

Это уравнение вида $2z = \operatorname{sh} z$. С помощью таблиц гиперболического синуса находим его решение*)

$$z = \frac{56{,}25}{H} \approx 2{,}177,$$

откуда определяем натяжение нити в точке B: $H \approx 25{,}84$ Н.

Искомое провисание нити найдется теперь из уравнения (4), если положить в нем $x = l/2$:

$$f = \frac{H}{q}\left(\operatorname{ch}\frac{ql}{2H} - 1\right) = \frac{25{,}84}{7{,}5}\left(\operatorname{ch}\frac{7{,}5 \cdot 15}{2 \cdot 25{,}84} - 1\right) \approx 11{,}94 \text{ м}.$$

---

*) О других способах решения подобных уравнений см. в задаче 1.79.

Для определения натяжения нити используем основное соотношение (2*). Вспомнив, что $Q = qs$, и применив уравнение (3), найдем

$$Q = H \operatorname{sh} \frac{qx}{H}.$$

Подставив это в уравнение (2*), получим

$$T = \sqrt{H^2 + Q^2} = H \operatorname{ch} \frac{qx}{H},$$

или, используя соотношение (4),

$$T = H + qy.$$

Из последнего уравнения следует, что натяжение нити достигает максимума в точках закрепления A и B, где оно равно

$$T_{\max} = H + qf = 25{,}84 + 7{,}5 \cdot 11{,}94 \approx 115{,}4 \text{ Н}.$$

Задача 1.79. Часть гибкой нити с равномерно распределенным по длине весом лежит на горизонтальной плоскости. Остальная часть нити проходит над небольшим блоком A (рис. *а*). К концу нити прикладывается постепенно увеличивающаяся сила T. При этом длина линии контакта BC нити с плоскостью уменьшается и стремится к какому-то определенному пределу c, при котором начинается скольжение нити по плоскости. Определить это предельное значение c, если $d = 60$ м, $f_1 =$ $= 6$ м, коэффициент трения между нитью и плоскостью $f_0 = 0{,}5$.

Решение. Участок AB нити, который примет форму цепной линии, изображен схематически на рис. *б*. При решении этой задачи будем пользоваться формулами, данными в начале § 6, учитывая, что в данном случае точка B является нижней точкой кривой. Следовательно, во всех этих формулах надо положить $a = l$, $b = 0$, $f_2 = 0$, $T_b = H$, $T_a = T$.

С увеличением силы T возрастает и натяжение нити H в точке B. Нить начнет скользить, когда это натяжение станет равным силе трения между участком BC нити и плоскостью. Запишем это условие в виде уравнения

$$H = qcf_0, \tag{1}$$

где q — вес единицы длины нити.

Величина H должна удовлетворять уравнению (14*), которое в данной задаче принимает вид

$$\frac{ql}{H} = \operatorname{arch}\left(\frac{qf_1}{H} + 1\right). \tag{2}$$

Исключая из уравнений (1) и (2) величину H, получаем уравнение

$$\frac{l}{cf_0} = \operatorname{arch}\left(\frac{f_1}{cf_0} + 1\right),$$

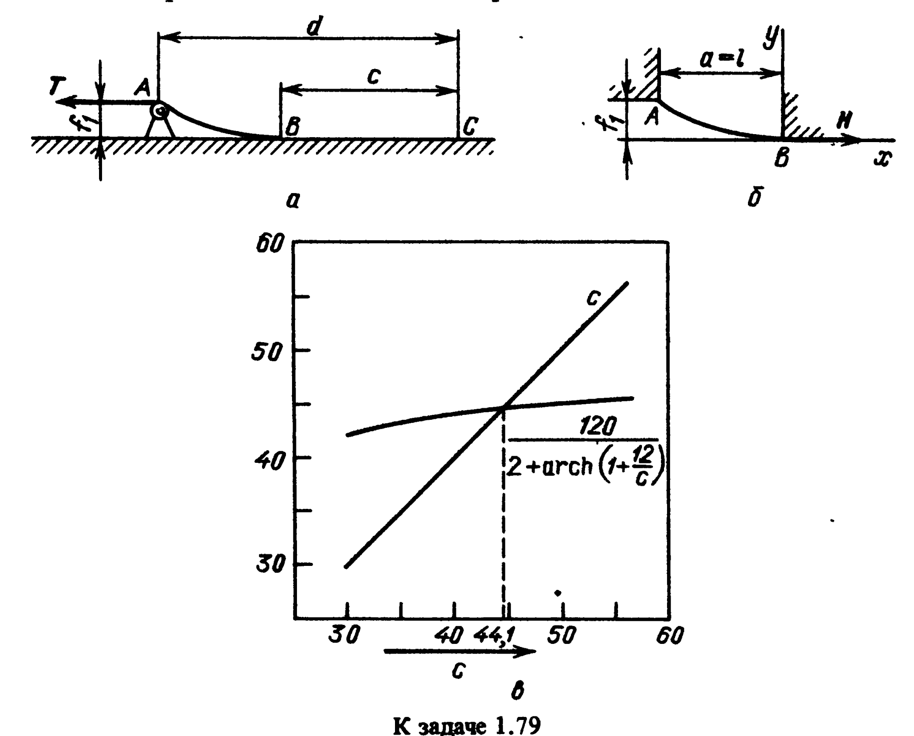
из которого и определяется искомый размер c. Поскольку $l = d - c$, это уравнение можно записать в виде

$$\frac{d}{cf_0} - \frac{1}{f_0} = \operatorname{arch}\left(\frac{f_1}{cf_0} + 1\right)$$

или, подставляя сюда известные величины,

$$\frac{120}{c} - 2 = \operatorname{arch}\left(\frac{12}{c} + 1\right). \qquad (3)$$

Разрешить это трансцендентное уравнение относительно c с помощью точных алгебраических методов не представляется возможным. Поэтому



К задаче 1.79

для нахождения его корней приходится пользоваться приближенными способами. Рассмотрим два таких способа: графический и метод итераций.

Графический способ заключается в том, что на одном чертеже строятся графики левой и правой частей уравнения. Абсциссы точек пересечения этих графиков и дают приближенные значения корней. Для неко-

торого упрощения представим сначала уравнение (3) в виде

$$c = \frac{120}{2 + \operatorname{arch}\left(\frac{12}{c} + 1\right)}. \tag{4}$$

Графиком левой части уравнения (4) является биссектриса первого координатного угла. Для построения графика правой части вычислим ее при нескольких значениях c, взятых около предполагаемого значения корня. Результаты вычислений сведены в таблице.

Таблица

c	$\frac{12}{c}$	$1 + \frac{12}{c}$	$\operatorname{arch}\left(1 + \frac{12}{c}\right)$	$2 + \operatorname{arch}\left(1 + \frac{12}{c}\right)$	$\frac{120}{2 + \operatorname{arch}\left(1 + \frac{12}{c}\right)}$
30	0,4000	1,4000	0,8670	2,8670	41,86
35	0,3429	1,3429	0,8062	2,8062	42,76
40	0,3000	1,3000	0,7557	2,7557	43,55
45	0,2667	1,2667	0,7150	2,7150	44,20
50	0,2400	1,2400	0,6800	2,6800	44,78
55	0,2182	1,2182	0,6491	2,6491	45,30

По данным таблицы построен рис. *в*, из которого следует, что искомое значение c равно 44,1.

Метод итераций состоит в следующем. Данное уравнение $F(x) = 0$ записывают в виде $x = \varphi(x)$ и находят более точное значение корня x_1 по первому приближению x_0 с помощью формулы $x_1 = \varphi(x_0)$. Повторив этот процесс несколько раз, можно получить значение корня с любой степенью точности, если на интервале между корнем уравнения и первым приближением $|\varphi'(x)| < 1$. Если же это условие не выполнено, то уравнение следует преобразовать (хотя бы переходом к обратной функции).

Нетрудно убедиться, что модуль производной правой части уравнения (4) при $30 < c < 55$ меньше 1. Следовательно, это уравнение можно итерировать, приняв за первое приближение c_0 значение c из указанного интервала.

Принимая $c_0 = 46$ м, находим

$$c_1 = \frac{120}{2 + \operatorname{arch}\left(\frac{12}{46} + 1\right)} = 44{,}3 \text{ м}$$

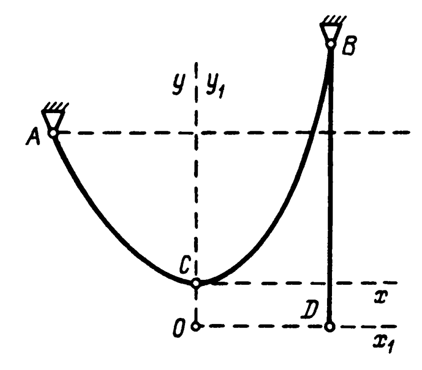
и далее

$$c_2 = \frac{120}{2 + \operatorname{arch}\left(\frac{12}{44{,}3} + 1\right)} = 44{,}12 \text{ м},$$

$$c_3 = \frac{120}{2 + \operatorname{arch}\left(\frac{12}{44{,}12} + 1\right)} = 44{,}08 \text{ м}.$$

На этом процесс итераций можно закончить, приняв окончательно $c = 44{,}1$ м.

Задача 1.80. Гибкая нерастяжимая нить подвешена к опоре A и пропущена в точке B через ничтожно малый блок. Вес единицы длины нити q. Определить длину свободно свешивающейся части нити, при которой равновесие не нарушается. Трением в блоке пренебречь.



К задаче 1.80

Решение. Выбрав начало координат в наинизшей точке кривой, воспользуемся для нахождения уравнения кривой уравнением (1*)

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{Q}{H},$$

где H – натяжение в точке c.

Тогда, замечая, что приращение вертикальной нагрузки $dQ = q ds$, имеем

$$dy' = \frac{dQ}{H} = \frac{q}{H} ds$$

или, подставляя

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx \tag{1}$$

и разделяя переменные, находим

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{q}{H}dx.$$

Интегрируя, получим

$$y' + \sqrt{1+y'^2} = e^{x/a} + c_1, \tag{2}$$

где для краткости обозначено $H/q = a$.

Так как

$$(y')_{x=0} = 0,$$

то $c_1 = 0$ и окончательно уравнение (2) имеет вид

$$y' + \sqrt{1+y'^2} = e^{x/a}. \tag{3}$$

Из уравнения (3) следует, что

$$y' - \sqrt{1+y'^2} = -e^{-x/a}, \tag{4}$$

в чем легко убедиться, перемножив (3) на (4).

Сложив уравнения (3) и (4), имеем

$$y' = \frac{1}{2}(e^{x/a} - e^{-x/a}).$$

Интегрируя последнее уравнение, находим

$$y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}) + c_2. \tag{5}$$

Положив $x = 0$ и $y = 0$, находим $c_2 = a$.

Перенесем начало координат в точку $O(0, -a)$. Тогда уравнение (5) запишется в виде

$$y_1 = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}).$$

Ось Ox_1 называется основанием цепной линии. Так как нить находится только под действием вертикальной нагрузки, то проекция натяжения на горизонталь неизменна:

$$T\frac{dx}{ds} = H, \text{ или } T = H\frac{ds}{dx}.$$

Согласно (1) это равенство можно переписать в виде

$$T = H\sqrt{1+y'^2}.$$

Вычитая из (3) равенство (4), находим

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}) = \frac{y_1}{a}$$

и окончательно получаем выражение для натяжения нити в произвольной точке кривой

$$T = \frac{H}{a} y_1 = q y_1 .$$

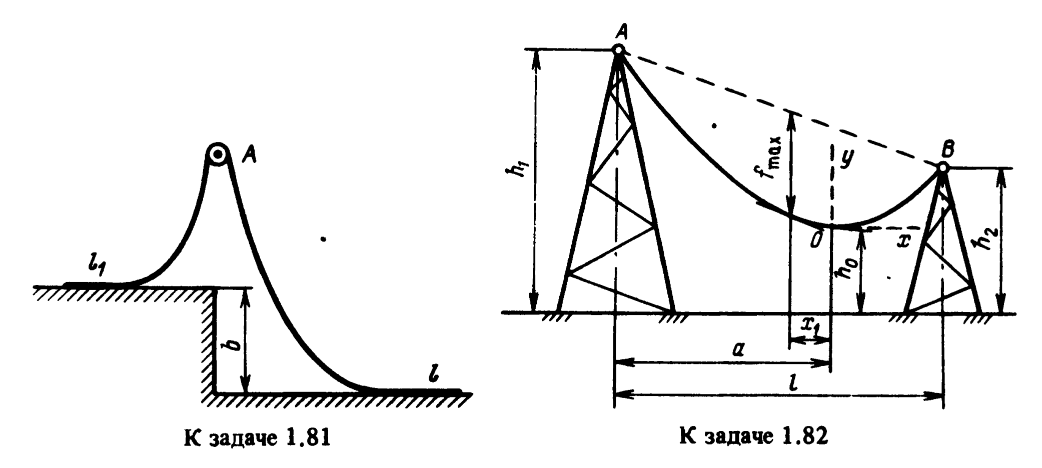
Следовательно, нить будет в равновесии, если длина свисающей части будет равна $y_1 = BD$.

Задача 1.81. Гибкая нерастяжимая нить перекинута через ничтожно малый гладкий блок A. Концы нити покоятся на двух шероховатых горизонтальных плоскостях. Левая плоскость расположена выше правой на величину b. Определить в предельном случае равновесия разность длин горизонтальных частей нити $l - l_1$.

Решение. В предыдущей задаче была получена формула для натяжения нити

$$T = qy,$$

где y – координата, отсчитываемая от основания цепной линии. Так как



К задаче 1.81 К задаче 1.82

на блоке A натяжения левой и правой цепных линий одинаковы, то и основания у них должны быть одинаковыми.

Обозначая параметры цепных линий через a и a_1, запишем, согласно условию,

$$a - a_1 = b. \tag{1}$$

Натяжение в низшей точке цепной линии $H = aq$ должно равняться силе трения, т.е.

$$aq = fql. \tag{2}$$

Аналогично для второй цепной линии имеем

$$H_1 = a_1 q = fql_1. \tag{3}$$

Вычитая из (2) равенство (3), получаем с учетом (1)

$$l - l_1 = \frac{a - a_1}{f} = \frac{b}{f}.$$

Задача 1.82. Электрический провод на переправе через реку подвешен к двум опорам высотой h_1 и h_2. Длина провода L, а расстояние между основаниями опор l. Вес единицы длины провода q. Найти уравнение кривой, наибольшее провисание и максимальное натяжение, если $h_1 = 30$ м, $h_2 = 12$ м, $l = 20$ м, $L = 45$ м, $q = 1{,}25$ Н/м.

Решение. Если выбрать начало координат в вершине цепной линии O, то уравнение кривой, согласно (10*), будет

$$y = \frac{H}{q}\left(\operatorname{ch}\frac{qx}{H} - 1\right). \tag{1}$$

При этом неизвестными являются: положение точки O, заданное отрезками a и h_0, а также горизонтальное натяжение H. Для их определения воспользуемся условиями прохождения цепной линии через точки крепления A и B, а также формулой, определяющей длину провода между опорами. Имеем

$$h_1 - h_0 = \frac{H}{q}\left(\operatorname{ch}\frac{qa}{H} - 1\right), \tag{2}$$

$$h_2 - h_0 = \frac{H}{q}\left(\operatorname{ch}\frac{l - a}{H}q - 1\right). \tag{3}$$

Находим далее длину провода

$$L = \int_{-a}^{l-a}\sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_{-a}^{l-a}\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\frac{qx}{H}}\,dx = \int_{-a}^{l-a}\operatorname{ch}\frac{qx}{H}\,dx =$$

$$= \frac{H}{q}\operatorname{sh}\frac{qx}{H}\Bigg|_{-a}^{l-a} = \frac{H}{q}\left(\operatorname{sh}\frac{l - a}{H}q + \operatorname{sh}\frac{qa}{H}\right) = 2\frac{H}{q}\operatorname{sh}\frac{lq}{2H}\operatorname{ch}\frac{2a - l}{2H}q. \tag{4}$$

Вычитая (3) из (2), находим

$$h_1 - h_2 = \frac{H}{q}\left(\operatorname{ch}\frac{qa}{H} - \operatorname{ch}\frac{l-a}{H}q\right) = 2\frac{H}{q}\operatorname{sh}\frac{lq}{2H}\operatorname{sh}\frac{2a-l}{2H}q. \qquad (5)$$

Для определения горизонтального натяжения H возведем (4) и (5) в квадрат и вычтем из первого второе:

$$L^2 - (h_1 - h_2)^2 = 4\left(\frac{H}{q}\right)^2 \operatorname{sh}^2\frac{lq}{2H}\left(\operatorname{ch}^2\frac{2a-l}{2H}q - \operatorname{sh}^2\frac{2a-l}{2H}q\right) =$$

$$= 4\left(\frac{H}{q}\right)^2 \operatorname{sh}^2\frac{lq}{2H}.$$

Из этого уравнения находим

$$\operatorname{sh}\frac{lq}{2H} = \frac{lq}{2H}\sqrt{\frac{L^2}{l^2} - \frac{(h_1-h_2)^2}{l^2}} = 2{,}06\frac{lq}{2H}.$$

Это трансцендентное уравнение вида $\operatorname{sh} z = 2{,}06z$ решается графически построением двух кривых (или подбором по таблице) $f_1(z) = \operatorname{sh} z$, $f_2(z) = 2{,}06z$. Их пересечение дает $z = lq/(2H) = 2{,}23$, откуда

$$\frac{H}{q} = \frac{20}{4{,}46} = 4{,}48 \text{ м}, \qquad (6)$$

$$H = 4{,}48 \cdot 1{,}25 = 5{,}6 \text{ Н}.$$

Для нахождения a разделим (5) на (4). Имеем

$$\frac{h_1 - h_2}{L} = \operatorname{th}\frac{2a-l}{2H}q,$$

откуда

$$a = \frac{H}{q}\operatorname{arth}\frac{h_1-h_2}{L} + \frac{l}{2} = 11{,}9 \text{ м}.$$

Остается найти h_0 из (2) с учетом (6)

$$h_0 = h_1 - \frac{H}{q}\left(\operatorname{ch}\frac{qa}{H} - 1\right) = 2{,}28 \text{ м}.$$

Уравнение кривой найдем, подставив найденные значения в уравнение (1)

$$y = 4{,}48\left(\operatorname{ch}\frac{x}{4{,}48} - 1\right).$$

Переходим далее к определению наибольшего провисания провода. Наи-

большее провисание будет в той точке кривой, где касательная к ней будет параллельна прямой AB:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \operatorname{sh}\frac{qx_1}{H} = -\frac{h_1 - h_2}{l}.$$

Из этого равенства находим абсциссу искомой точки кривой

$$x_1 = \frac{H}{q}\operatorname{arsh}\frac{h_2 - h_1}{l} = -3{,}61 \text{ м}.$$

Наибольшее провисание равно

$$f_{max} = h_1 - \frac{h_1 - h_2}{l}(a - x_1) - h_0 - y(x_1) =$$

$$= h_1 - \frac{h_1 - h_2}{l}(a - x_1) - h_0 - \frac{H}{q}\left(\operatorname{ch}\frac{qx_1}{H} - 1\right) = 18{,}74 \text{ м}.$$

Натяжение провода, согласно (11*), будет

$$T_A = H + qf_1 = H + q(h_1 - h_0) = 40{,}5 \text{ Н},$$

$$T_B = H + qf_2 = H + q(h_2 - h_0) = 17{,}8 \text{ Н}.$$

Задача 1.83. *Цепью равного сопротивления* называется цепь переменной толщины, у которой толщина в каждой точке пропорциональна натяжению T. У такой цепи вероятность разрыва во всех точках одинакова. Определить уравнение равновесной кривой и закон изменения толщины цепи.

Решение. Обозначим буквой σ переменное сечение цепи, изменяющееся вдоль ее длины. Если обозначить вес единицы объема цепи через p, а ее длину через s, то вес элемента ds равен $p\sigma ds$.

Выберем начало координат в самой низкой точке цепи. Для нахождения уравнения кривой воспользуемся уравнением (1*)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{H}, \tag{1}$$

где H — натяжение в самой низкой точке цепи.

Замечаем, что приращение вертикальной нагрузки $dQ = p\sigma ds$, а натяжение цепи, согласно условию, пропорционально толщине, т.е. равно $T =$ $= k\sigma$, где k — коэффициент пропорциональности.

Вычисляя от обеих частей равенства (1) дифференциал, находим

$$dy' = \frac{dQ}{H} = \frac{p\sigma}{H}ds. \tag{2}$$

С другой стороны, так как на цепь действует только вертикальная нагрузка, то проекция натяжения на горизонтальную ось x есть величина постоянная

$$H = T\frac{dx}{ds} = k\sigma\frac{dx}{ds} = \text{const},$$

откуда

$$\sigma = \frac{H}{k}\frac{ds}{dx}. \tag{3}$$

Значение σ вносим в уравнение (2). Тогда находим

$$dy' = \frac{p\sigma}{H}ds = \frac{p}{k}\frac{ds\cdot ds}{dx} = \frac{p}{k}(1 + y')^2dx,$$

где учтено, что $ds = \sqrt{1 + y'^2}dx$. Разделяя переменные, получим

$$\frac{dy'}{(1+y')^2} = \frac{p}{k}dx$$

и, интегрируя, имеем

$$\operatorname{arctg} y' = \frac{p}{k}x + c_1.$$

Начало координат выбрано в самой низкой точке, где у кривой минимум. Следовательно, при $x = 0$ $y' = 0$ и $c_1 = 0$. Итак,

$$y' = \operatorname{tg}\frac{p}{k}x, \tag{4}$$

$$dy = \operatorname{tg}\frac{p}{k}xdx.$$

Интегрируя, находим

$$y = -\frac{k}{p}\ln\cos\frac{p}{k}x + c_2.$$

При $x = 0$ $y = 0$ и $c_2 = 0$.

Итак,

$$-\frac{p}{k}y = \ln\cos\frac{p}{k}x, \quad e^{-\frac{p}{k}y} = \cos\frac{p}{k}x$$

или окончательно

$$e^{\frac{p}{k}y}\cos\frac{p}{k}x = 1.$$

Это и есть уравнение кривой равного сопротивления. Чтобы найти закон изменения толщины цепи, воспользуемся равенством (3), откуда получаем с учетом (4)

$$\sigma = \frac{H}{p}\frac{ds}{dx} = \frac{H}{k}\sqrt{1 + y'^2} = \frac{H}{k}\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\frac{p}{k}x} = \frac{H}{k\cos\frac{p}{k}x}.$$

Эта задача была впервые рассмотрена французским ученым механиком Кориолисом (1792–1843).

Глава 2

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

§ 1. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ. РАВНОВЕСИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

В § 1 главы 1 была рассмотрена плоская система сходящихся сил. Пространственная система сходящихся сил, подобно плоской, также приводится к равнодействующей $\boldsymbol{R}$.

Равнодействующая $\boldsymbol{R}$ пространственной системы сходящихся сил приложена в точке пересечения линий действия слагаемых сил и является замыкающей стороной силового многоугольника, построенного на этих силах, т.е.

$$\boldsymbol{R} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k. \qquad (1^*)$$

В отличие от соответствующей плоской задачи силовой многоугольник не является здесь плоским, т.е. он представляет собой ломаную пространственную линию.

Проекции равнодействующей силы $\boldsymbol{R}$ на оси декартовых координат x, y, z равны суммам проекций слагаемых сил на соответствующие оси, т.е.

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \quad R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}, \quad R_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}. \qquad (2^*)$$

Модуль равнодействующей $\boldsymbol{R}$ равен

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \qquad (3^*)$$

направляющие косинусы даются формулами:

$$\cos(\widehat{x, \boldsymbol{R}}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\widehat{y, \boldsymbol{R}}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(\widehat{z, \boldsymbol{R}}) = \frac{R_z}{R}. \qquad (4^*)$$

Для равновесия пространственной системы сходящихся сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая равнялась нулю: $\boldsymbol{R} = 0$, т.е. чтобы силовой многоугольник был замкнут. При этом уравнения равновесия имеют вид

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0, \qquad (5^*)$$

так как согласно (3^*) модуль равнодействующей обращается в нуль, только если

$$R_x = R_y = R_z = 0.$$

Задача является статически определенной, если число алгебраических неизвестных не более трех (предполагается, что все силы не лежат на одной прямой или в одной плоскости). Так, если известны направления всех сил, то можно определить модули трех сил.

Указание. При решении задач на равновесие твердого тела, находящегося под действием пространственной системы сходящихся сил, надо выполнить четыре первых пункта, указанных в начале книги, на с. 16. Затем:

5) убедиться в том, что задача является статически определенной, т.е. что число алгебраических неизвестных величин не более трех;

6) выбрать систему осей декартовых координат x, y, z;

7) составить уравнения равновесия (5^*) в проекциях на оси декартовых координат;

8) решить полученную систему уравнений, т.е. определить неизвестные величины.

Если требуется найти равнодействующую пространственной системы сходящихся сил, то после выполнения первых шести пунктов следует определить проекции R_x, R_y, R_z равнодействующей R по формулам (2^*), затем вычислить модуль равнодействующей R и направляющие косинусы по формулам (3^*), (4^*).

Начало осей декартовых координат рекомендуется выбрать в точке пересечения линий действия слагаемых сил, а координатные оси направить параллельно либо перпендикулярно к большинству этих сил.

Иногда при определении проекции силы на координатную ось, например силы F на ось x, бывает неизвестен угол между осью x и линией действия силы, но зато задан угол α, образованный силой F и координатной плоскостью xy (рис. 2.1), а также угол β между осью проекций x и проекцией F_{xy} силы F на координатную плоскость xy. В этом случае для определения проекции F_x силы F на ось x надо, во-первых, найти проекцию F_{xy} силы F на координатную плоскость xy, а затем вычислить проекцию вектора F_{xy} на ось x, т.е.

$$F_x = Oa = \text{пр}_x F_{xy} = F_{xy}\cos\beta = F\cos\alpha\cos\beta.$$

Аналогично проекция силы F на ось y имеет вид

$$F_y = Ob = \text{пр}_y F_{xy} = F_{xy}\sin\beta = F\cos\alpha\sin\beta.$$

Далее,

$$F_z = Oc = F\sin\alpha.$$

Итак,

$$F_x = F\cos\alpha\cos\beta,\quad F_y = F\cos\alpha\sin\beta,\quad F_z = F\sin\alpha.$$

Не следует смешивать понятия проекции силы на ось и составляющей силы (рис. 2.2). Составляющая силы является вектором, равным

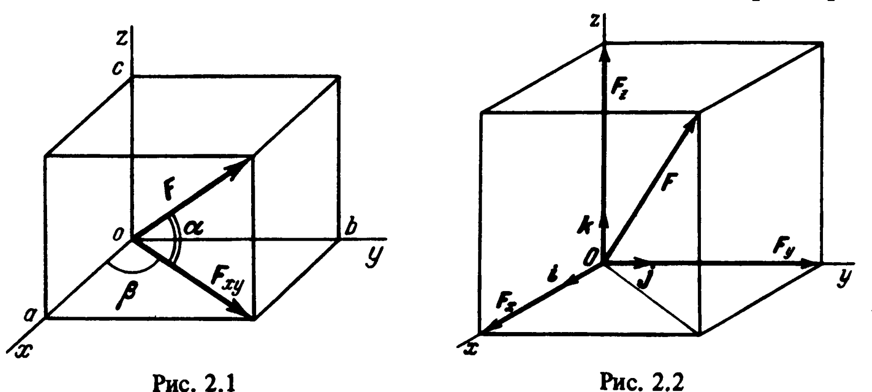


Рис. 2.1 Рис. 2.2

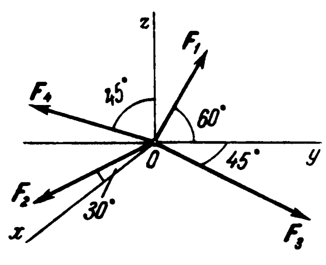
произведению соответствующей проекции силы на орт оси проекций, т.е.

$$\boldsymbol{F}_x = F_x \boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{F}_y = F_y \boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{F}_z = F_z \boldsymbol{k}.$$

Разложение силы $\boldsymbol{F}$ по ортам осей декартовых координат имеет вид

$$\boldsymbol{F} = F_x \boldsymbol{i} + F_y \boldsymbol{j} + F_z \boldsymbol{k}.$$

Если проекция силы на ось отрицательна, то соответствующая составляющая силы направлена в сторону, противоположную положительному направлению этой оси.



К задаче 2.1

Задача 2.1. Определить равнодействующую пространственной системы сходящихся сил, изображенной на рисунке.

Силы F_2 и F_3 расположены в плоскости xy, сила F_1 лежит в плоскости yz, а сила F_4 – в плоскости xz; $F_1 = 2$ кН, $F_2 = F_3 = 4$ кН, $F_4 = 6$ кН.

Решение. Можно определить равнодействующую $\boldsymbol{R}$ как замыкающую сторону силового многоугольника, построенного на силах $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$,

F_3 и F_4, т.е. $R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$. Однако этот многоугольник представляет пространственную ломаную и поэтому непосредственное определение модуля и направления вектора R требует либо построения модели, либо применения сложных методов начертательной геометрии.

Эту задачу можно решить значительно проще, воспользовавшись методом проекций. Как известно, проекции равнодействующей R определяются по формулам (2*).

В данном случае эти формулы имеют вид

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x},$$
$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y}, \quad (1)$$
$$R_z = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + F_{4z}.$$

Вычислим проекции сил F_1, F_2, F_3 и F_4 на оси x, y, z:

$$F_{1x} = 0, \quad F_{1y} = F_1\cos 60°, \quad F_{1z} = F_1\cos 30°;$$
$$F_{2x} = F_2\cos 30°, \quad F_{2y} = -F_2\cos 60°, \quad F_{2z} = 0;$$
$$F_{3x} = F_3\cos 45°, \quad F_{3y} = F_3\cos 45°, \quad F_{3z} = 0;$$
$$F_{4x} = F_4\cos 45°, \quad F_{4y} = 0, \quad F_{4z} = F_4\cos 45°.$$

Подставив эти значения в формулы (1), получим

$$R_x = F_2\cos 60° + F_3\cos 45° + F_4\cos 45°,$$
$$R_y = F_1\cos 60° - F_2\cos 60° + F_3\cos 45°, \quad (2)$$
$$R_z = F_1\cos 30° + F_4\cos 45°,$$

откуда, использовав заданные в условии числовые значения, находим

$$R_x = 10{,}5 \text{ кН}, \quad R_y = 1{,}82 \text{ кН}, \quad R_z = 5{,}96 \text{ кН}. \quad (3)$$

Теперь легко найти модуль равнодействующей R

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 12{,}3 \text{ кН}$$

и ее направляющие косинусы

$$\cos(\widehat{x, R}) = \frac{R_x}{R} = 0{,}86, \quad \cos(\widehat{y, R}) = \frac{R_y}{R} = 0{,}15,$$

$$\cos(\widehat{z, R}) = \frac{R_z}{R} = 0{,}57,$$

откуда

$$(\widehat{x, R}) = 31°, \quad (y, R) = 82°, \quad (\widehat{z, R}) = 56°.$$

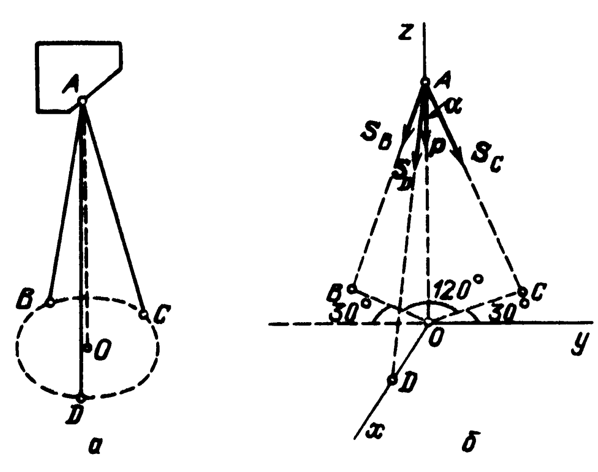
Зная модуль и направление равнодействующей R, можно изобразить ее в системе координатных осей x, y, z.

Построить равнодействующую можно и другим, более простым способом: надо отложить из начала координат составляющие равнодействующей, равные по модулю ее проекциям (3). Диагональ прямоугольного параллелепипеда (рис. 2.2) и будет являться равнодействующей.

Задача 2.2. Кинокамера весом 40 Н установлена на штативе-треножнике, ножки которого *AB*, *AC* и *AD* составляют одинаковые углы в 20° с вертикалью (рис. *а*).

Определить усилия в ножках штатива, считая их невесомыми стержнями. Размерами камеры пренебрегаем.

Решение. Для определения усилий в ножках штатива рассмотрим равновесие камеры. К камере приложена одна активная сила — сила веса P, линия действия которой проходит через точку A крепления камеры к штативу. На камеру наложены три связи — поддерживающие ее ножки. Применим принцип освобождаемости, мысленно отбросим связи и заменим их действие реакциями. Обозначим реакции ножек AB, AC и AD соответственно S_B, S_C и S_D, направим их вдоль AB, AC и AD от точки A к серединам ножек. Такое направление имеют реакции ножек, если ножки растянуты. На рис. *б* показаны направления активной силы P и реакции связей S_B, S_C и S_D. Камера на этой схеме представляет собой свободное твердое тело, находящееся в равновесии под действием пространственной системы четырех сходящихся сил P, S_B, S_C и S_D. При равновесии пространственной системы сходящихся сил можно составить три независимых уравнения проекций сил на оси декартовых координат. Число неизвестных — а неизвестными являются реакции S_B, S_C и S_D — равно числу уравнений, так что задача статически определенная и можно приступить к составлению уравнений.



К задаче 2.2

Проведем ось z вдоль высоты штатива и выберем начало координат в точке O пересечения высоты штатива с поверхностью земли. Нижние концы B, C и D ножек штатива отстоят на равные расстояния от точки O, и линии, соединяющие их с точкой O, делят полный плоский угол 360° на три равные части. Направим ось z из точки O вверх в точку A.

Ось x направим по линии OD. Ось y направим так, чтобы получилась правая система декартовых координат (см. рис. *б*).

При проектировании реакций S_B и S_C на оси x и y возникает затруднение, так как углы этих реакций непосредственно с направлениями осей x и y не заданы. Для нахождения проекций S_B и S_C на оси x и y нам придется сначала спроектировать их на координатную плоскость xOy. Если угол ножек штатива с вертикалью равен 20°, то с горизонтальной плоскостью ножки составляют углы в 70°. Горизонтальные проекции S_{Bxy} и S_{Cxy} будут направлены вдоль линий OB и OC и равны

$$S_{Bxy} = S_B \sin 20°, \quad S_{Cxy} = S_C \sin 20°. \tag{1}$$

Из взаимного расположения линий OD, OB и OC и принятых направлений осей Ox и Oy (см. рис. *б*) видно, что S_{Bxy} составляет угол в 30° с отрицательным направлением оси Oy, а S_{Cxy} составляет угол в 30° с положительным направлением оси Oy. Получаем

$$S_{Bx} = -S_{Bxy}\cos 60° = -S_B \sin 20° \cos 60°,$$
$$S_{By} = -S_{Bxy}\cos 30° = -S_B \sin 20° \cos 30°,$$
$$S_{Cx} = -S_{Cxy}\cos 60° = -S_C \sin 20° \cos 60°,$$
$$S_{Cy} = S_{Cxy}\cos 30° = S_C \sin 20° \cos 30°.$$

Переходим к составлению уравнений равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = S_D \sin 20° - S_B \sin 20° \cos 60° - S_C \sin 20° \cos 60° = 0, \tag{2}$$
$$\Sigma F_{ky} = -S_B \sin 20° \cos 30° + S_C \sin 20° \cos 30° = 0, \tag{3}$$
$$\Sigma F_{kz} = -P - S_D \cos 20° - S_B \cos 20° - S_C \cos 20° = 0. \tag{4}$$

Решаем систему уравнений (2) – (4). Из уравнения (3) следует

$$S_B = S_C. \tag{5}$$

Сокращая уравнение (2) на sin 20° и принимая во внимание (5), получаем

$$S_D - 2S_B \cos 60° = 0$$

или

$$S_D = S_B. \tag{6}$$

Реакции всех трех ножек равны, что интуитивно ясно из их пространственного расположения.

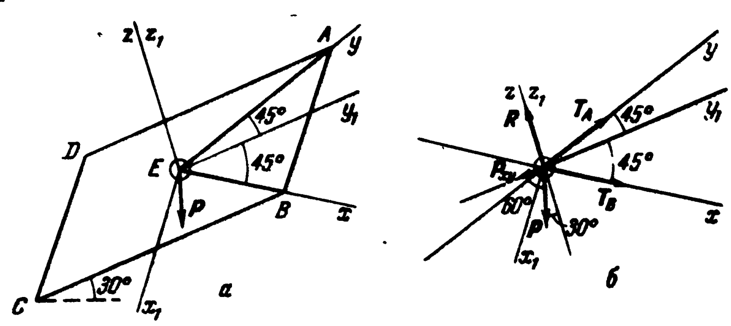
Подставляя (5) и (6) в (4), получаем $-P - 3S_B \cos 20° = 0$, откуда

$$P = -\frac{40}{3 \cdot 0{,}94} \approx -14{,}2 \text{ Н}. \tag{7}$$

Знак минус означает, что истинные направления реакций противоположны тем, которые были приняты при составлении расчетной схемы. Предполагалось, что ножки растянуты, а знак ответа указал, что они сжаты. Если бы с самого начала мы направили реакции от середины ножек к точке A

соединения ножек, т.е. соответственно сжатию, ответ получился бы со знаком плюс.

Задача 2.3. На гладкой прямоугольной наклонной плоскости *ABCD*, расположенной под углом 30° к горизонту, лежит груз *E* весом *P* (рис. *а*). Груз удерживается в равновесии посредством двух взаимно перпендикулярных равных по длине тросов *AE* и *BE*, лежащих на наклонной плоскости и прикрепленных к ней в точках *A* и *B*.



К задаче 2.3

Определить реакции тросов и наклонной плоскости. Размерами груза пренебречь.

Решение. Для определения неизвестных рассмотрим равновесие груза *E*. К грузу приложена одна активная сила – его сила тяжести *P* (рис. *б*). На груз *E* наложены три связи: гладкая наклонная плоскость и тросы *AE* и *BE*. Применив закон освобождаемости от связей, отбросим связи и заменим их действие на груз соответствующими реакциями. Так как наклонная плоскость является гладкой, то ее реакция *R* направлена перпендикулярно к плоскости. Реакции гибких связей направляются по касательным к ним в точках обрыва связей. В данном случае реакции тросов T_A и T_B направлены вдоль *AE* и *BE* (см. рис. *б*).

Теперь мы можем рассмотреть равновесие груза *E* как равновесие свободного твердого тела, находящегося под действием четырех сил: *P*, *R*, T_A и T_B, образующих пространственную систему сходящихся сил. Для этой системы мы можем составить три уравнения равновесия. Так как число алгебраических неизвестных также равно трем (R_A, T_A и T_B), то задача является статически определенной.

Учитывая, что тросы *AE* и *BE* и, следовательно, силы T_A и T_B взаимно перпендикулярны, направим оси *x* и *y* вдоль линий действия этих сил, а ось *z* – перпендикулярно к этой плоскости, т.е. вдоль линии действия силы *R*. При этом выборе направлений осей координат проекции сил *R*, T_A и T_B будут либо равны нулю, либо модулю соответствующей силы. Некоторые трудности приходится преодолеть лишь при проектировании силы *P*,

так как нам неизвестны углы, которые образует линия действия силы P с осями x и y. Поэтому, предварительно спроектировав силу P на плоскость xy, найдем вектор P_{xy} (проекция вектора на плоскость также является вектором) и затем уже спроектируем P_{xy} на оси x и y. Модуль вектора P_{xy} равен

$$P_{xy} = P\cos 60°. \tag{1}$$

Переходим к составлению уравнений равновесия пространственной системы сходящихся сил. Для этого суммы проекций всех сил на оси декартовых координат x, y, z надо приравнять нулю. Эти уравнения в данной задаче имеют вид

$$\Sigma F_{kx} = P_x + R_x + T_{Ax} + T_{Bx} = 0,$$
$$\Sigma F_{ky} = P_y + R_y + T_{Ay} + T_{By} = 0,$$
$$\Sigma F_{kz} = P_z + R_z + T_{Az} + T_{Bz} = 0.$$

После подстановки значений проекций сил:

$P_x = -P_{xy}\cos 45°$, $R_x = 0$, $T_{Ax} = 0$, $T_{Bx} = T_B$, $P_y = -P_{xy}\sin 45°$,
$R_y = 0$, $T_{Ay} = T_A$, $T_{By} = 0$, $P_z = -P\cos 30°$, $R_z = R$,
$T_{Az} = 0$, $T_{Bz} = 0$

эти уравнения примут вид

$$\Sigma F_{kx} = -P_{xy}\cos 45° + T_B = 0, \tag{2}$$
$$\Sigma F_{ky} = -P_{xy}\sin 45° + T_A = 0, \tag{3}$$
$$\Sigma F_{kz} = -P\cos 30° + R = 0. \tag{4}$$

Для определения неизвестных остается решить систему уравнений (2)—(4), приняв при этом во внимание равенство (1). Получим $T_A = T_B = \frac{\sqrt{2}}{2}P_{xy} = \frac{\sqrt{2}}{4}P = 0{,}35P$, $R = \frac{\sqrt{3}}{2}P = 0{,}87P$. При составлении уравнений равновесия нам пришлось столкнуться с трудностями при проектировании силы P на оси x и y, так как предварительно пришлось проектировать P на плоскость xy. Этих трудностей можно избежать, направив ось y_1 по биссектрисе угла AEB, ось z_1 — по оси z, а ось x_1 — так, чтобы вместе с осями y_1 и z_1 она образовала правую систему осей координат. Теперь сила P оказывается лежащей в плоскости y_1z_1 и, следовательно, ее проекции на оси x_1, y_1, z_1 имеют вид

$$P_{x_1} = 0, \quad P_{y_1} = -P\cos 60°, \quad P_{z_1} = -P\cos 30°.$$

Уравнения равновесия в проекциях на оси x_1, y_1, z_1 запишутся так:

$$\Sigma F_{kx_1} = -T_A \cos 45° + T_B \cos 45° = 0, \quad (5)$$

$$\Sigma F_{ky_1} = -P \cos 60° + T_A \cos 45° + T_B \cos 45° = 0, \quad (6)$$

$$\Sigma F_{kz_1} = -P \cos 30° + R = 0. \quad (7)$$

Сравним системы уравнений (2) – (4) и (5) – (7). При тождестве уравнений (4) и (7) составление уравнений (5) и (6) проще и потому предпочтительнее составлению уравнений (2) и (3). Объем же вычислений при решении систем (2) – (4) и (5) – (7) примерно одинаков, поэтому выбор осей координат x_1, y_1, z_1 является более целесообразным.

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 6.3; 6.7, 6.8, 6.10.

§ 2. ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

1. Момент силы относительно точки. Момент силы относительно оси. Теория пар в пространстве. В случае плоской системы сил момент силы относительно точки был определен как алгебраическая величина: $m_O(\boldsymbol{F}) = \pm Fh$.

При пространственном расположении сил этого определения недостаточно, так как плоскости, проходящие через линии действия сил и точку, относительно которой вычисляются моменты, различны. Поэтому *момент* $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})$ *силы* $\boldsymbol{F}$ *относительно точки* O *в пространстве определяют как векторное произведение* $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$, где $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор, проведенный из точки O в точку приложения силы. Таким образом, вектор $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})$ направлен перпендикулярно плоскости, содержащей линию действия силы

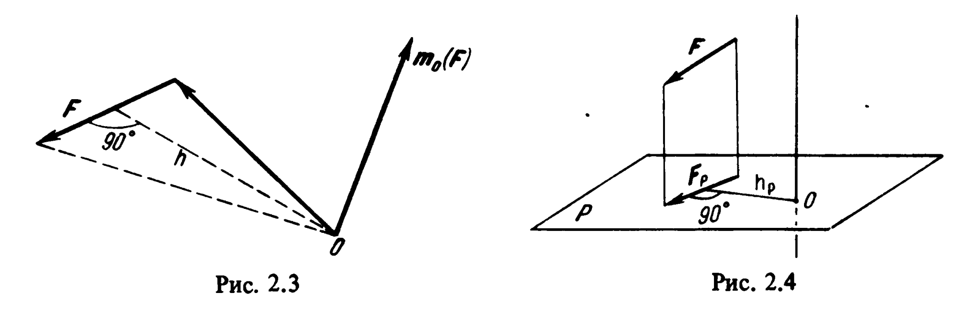


Рис. 2.3 Рис. 2.4

и точку O, так что сила с конца его видна направленной вокруг точки против хода часовой стрелки (рис. 2.3). Модуль вектора $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})$ равен произведению модуля силы на расстояние от точки до линии действия силы (плечо), т.е.

$$|\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})| = Fh.$$

8 Заказ № 899

Момент силы относительно оси $m_z(F)$ (рис. 2.4) определяется как алгебраическая величина, абсолютное значение которой равно произведению модуля проекции силы F_P на плоскость P, перпендикулярную оси z, на расстояние h_P от точки O пересечения оси с этой плоскостью до линии действия проекции силы на плоскость F_P, т.е. $|m_z(F)| = F_P h_P$.

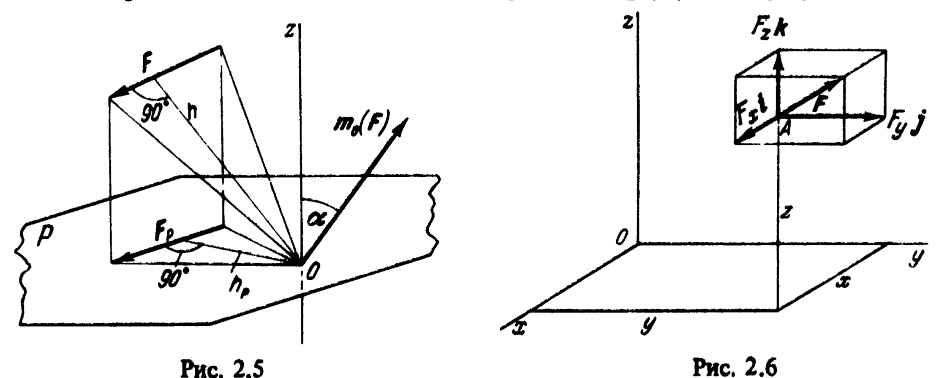


Рис. 2.5 Рис. 2.6

Если с конца оси z к ее началу видно, что сила F_P стремится повернуть тело вокруг точки O против хода часовой стрелки, то момент положителен, если по ходу часовой стрелки, то отрицателен, т.е.

$$m_z(F) = \pm F_P h_P.$$

Момент силы F, изображенной на рис. 2.4, относительно оси z положителен.

Итак, момент силы относительно точки – вектор, момент силы относительно оси – алгебраическая величина. Если точка лежит на оси, то момент силы относительно оси равен проекции момента силы относительно точки на эту ось, т.е. $m_z(F) = \text{пр}_z m_O(F)$ (рис. 2.5).

Зная моменты силы относительно осей декартовых координат $m_x(F)$, $m_y(F)$, $m_z(F)$, можно определить модуль момента силы $m_O(F)$ относительно начала координат O и его направляющие косинусы по формулам

$$|m_O(F)| = \sqrt{m_x^2(F) + m_y^2(F) + m_z^2(F)}; \qquad (1^*)$$

$$\cos[x,\widehat{m}_O(F)] = \frac{m_x(F)}{|m_O(F)|}, \qquad \cos[y,\widehat{m}_O(F)] = \frac{m_y(F)}{|m_O(F)|},$$

$$\cos[z,\widehat{m}_O(F)] = \frac{m_z(F)}{|m_O(F)|}, \qquad (2^*)$$

причем $m_O(F) = m_x(F)\,i + m_y(F)\,j + m_z(F)\,k$.

Выражения моментов силы относительно осей декартовых координат через проекции силы на эти оси даются формулами

$$m_x(F) = yF_z - zF_y, \quad m_y(F) = zF_x - xF_z, \quad m_z(F) = xF_y - yF_x. \qquad (3^*)$$

Здесь F_x, F_y, F_z – проекции силы F на оси декартовых координат, x, y, z – координаты точки A приложения силы (рис. 2.6).

Момент силы относительно оси равен нулю, если линия действия силы и ось лежат в одной плоскости (рис. 2.7), т.е.

а) если сила параллельна оси (при этом проекция F_P силы F на перпендикулярную к оси плоскость P обращается в нуль: $F_P = 0$);

б) если линия действия силы пересекает ось (при этом $h_P = 0$).

В случае пространственной системы сил *главным моментом относительно точки* называется векторная сумма моментов всех сил системы относительно той же точки

$$m_O = \sum_{k=1}^{n} m_O(F_k) = \sum_{k=1}^{n} r_k \times F_k. \tag{4*}$$

Главным моментом пространственной системы сил относительно оси называется алгебраическая сумма моментов всех сил системы относительно этой оси:

$$m_x = \sum_{k=1}^{n} m_x(F_k), \quad m_y = \sum_{k=1}^{n} m_y(F_k), \quad m_z = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k), \tag{5*}$$

т.е.

$$m_x = \sum_{k=1}^{n} (y_k F_{kz} - z_k F_{ky}), \quad m_y = \sum_{k=1}^{n} (z_k F_{kx} - x_k F_{kz}),$$

$$m_z = \sum_{k=1}^{n} (x_k F_{ky} - y_k F_{kx}). \tag{6*}$$

Зная главные моменты системы сил относительно осей декартовых координат, можно определить модуль главного момента относительно начала координат O и его направляющие косинусы по формулам

$$|m_O| = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}, \tag{7*}$$

$$\cos(\widehat{x, m_O}) = \frac{m_x}{|m_O|}, \ \cos(\widehat{y, m_O}) = \frac{m_y}{|m_O|}, \ \cos(\widehat{z, m_O}) = \frac{m_z}{|m_O|}. \tag{8*}$$

Если пространственная система сил приводится к равнодействующей, то согласно *теореме Вариньона* момент равнодействующей силы относительно точки равен векторной сумме моментов всех сил системы относительно той же точки:

$$m_O(R) = \sum_{k=1}^{n} m_O(F_k).$$

Та же теорема относительно осей декартовых координат формулируется так: момент равнодействующей силы относительно оси равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно той же оси:

$$m_x(R) = \sum_{k=1}^{n} m_x(F_k), \quad m_y(R) = \sum_{k=1}^{n} m_y(F_k), \quad m_z(R) = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k).$$

Момент пары в пространстве определяется как вектор, перпендикулярный к плоскости пары, причем с конца его к началу видно, что пара

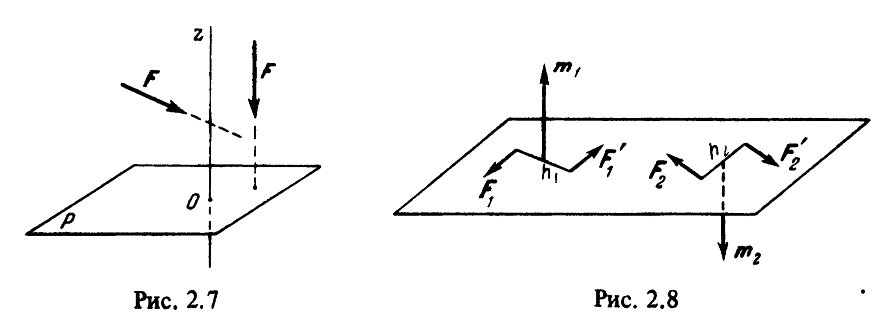


Рис. 2.7 Рис. 2.8

стремится повернуть твердое тело против хода часовой стрелки (рис. 2.8). Модуль момента пары сил равен произведению модуля одной из сил пары на расстояние между линиями действия сил (плечо): $|m| = Fh$.

Теория пар в пространстве дается двумя теоремами.

Теорема 1. Пары, векторные моменты которых равны, эквивалентны; следовательно, не нарушая состояния твердого тела, пару сил можно переносить в плоскость, параллельную данной.

Теорема 2. Система пар в пространстве эквивалентна одной паре, момент которой равен векторной сумме моментов пар системы.

Для равновесия системы пар в пространстве, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы векторная сумма моментов этих пар была равна нулю ($\sum_{k=1}^{n} m_k = 0$).

Вычисление моментов сил и главных моментов систем сил относительно осей является важной составной частью решения задач на равновесие твердых тел под действием произвольных пространственных систем сил, а также задач на приведение этих систем сил к простейшему виду.

Указание. Вычисление главных моментов систем сил относительно осей рекомендуется проводить в следующем порядке:

1) провести плоскость, перпендикулярную к оси, относительно которой требуется определить главный момент системы сил;

2) найти точку пересечения оси с этой плоскостью;

3) спроектировать силу на плоскость, перпендикулярную к оси;

4) опустить перпендикуляр (плечо) из точки пересечения оси с плоскостью на линию действия проекции силы на плоскость, определенную в предыдущем пункте;

5) записать модуль момента силы относительно оси в виде произведения модуля проекции силы на найденное плечо;

6) определить знак момента силы относительно оси;

7) повторить построения и выкладки, сделанные в третьем, четвертом, пятом и шестом пунктах для каждой из сил системы;

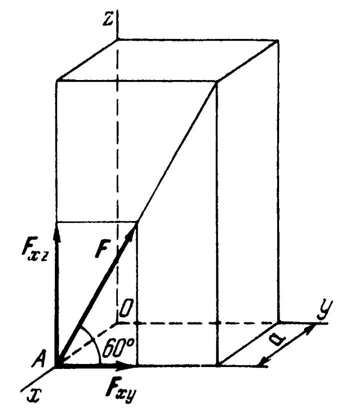
8) вычислить главные моменты системы сил относительно осей в виде алгебраических сумм моментов данных сил относительно этих осей.

Если определение проекции силы на плоскость, перпендикулярную к оси, затруднительно, то следует разложить силу на составляющие. Затем вместо момента силы относительно оси надо, применив теорему Вариньона, вычислить сумму моментов сил составляющих относительно этой оси.

Если этот прием также затруднителен, то надо найти проекции силы F_x, F_y, F_z на оси, записать координаты x, y, z точки приложения силы и вычислить моменты силы относительно осей декартовых координат по формулам (3*).

Если оси декартовых координат в условии задачи не заданы, то целесообразно выбрать эти оси так, чтобы моменты возможно большего числа сил обратились в нуль. Значит, надо направить оси параллельно силам либо так, чтобы оси пересекали линии действия сил.

Задача 2.4. Вычислить моменты относительно осей координат x, y и z силы $\boldsymbol{F}$, направленной по диагонали боковой грани прямоугольного параллелепипеда, изображенного на рисунке, если длина ребра, параллельного оси x, равна a.



К задаче 2.4

Р е ш е н и е. Линия действия силы $\boldsymbol{F}$ пересекает ось x, поэтому момент силы $\boldsymbol{F}$ относительно оси x равен нулю:

$$m_x(\boldsymbol{F}) = 0.$$

Для определения момента силы $\boldsymbol{F}$ относительно оси y спроектируем эту силу на плоскость xz, перпендикулярную к оси y, т.е. определим F_{xz}. Нетрудно видеть, что $F_{xz} = F \cos 30°$. Остается взять момент силы F_{xz} относительно точки пересечения оси y с перпендикулярной плоскостью xz, т.е. точки O. Плечом является ребро $OA = a$. С конца оси y к ее началу видно, что сила F_{xz} стремится повернуть тело в плоскости xz вокруг точки O по ходу часовой стрелки, следовательно, момент силы отрицателен. Итак,

$$m_y(\boldsymbol{F}) = -F_{xz}a = -Fa\cos 30° = -Fa\sqrt{3}/2.$$

Остается определить момент силы F относительно оси z. Для этого найдем проекцию F_{xy} силы F на плоскость xy, перпендикулярную к оси z. Легко видеть, что $F_{xy} = F \cos 60°$. Теперь вычисляем момент силы F_{xy} относительно точки O пересечения оси z с перпендикулярной ей плоскостью xy. Плечом оказывается отрезок $OA = a$. Знак момента положителен, так как с конца оси z к ее началу видно, что сила F_{xy} стремится повернуть тело в плоскости xy вокруг точки O против хода часовой стрелки. Значит,

$$m_z(F) = F_{xy}\, a = Fa/2.$$

Эта же задача может быть решена другим способом, при помощи формул (3*). Имеем

$$m_x(F) = yF_z - zF_y = 0,$$

так как координаты точки приложения силы F равны $y = 0$, $z = 0$. Далее находим

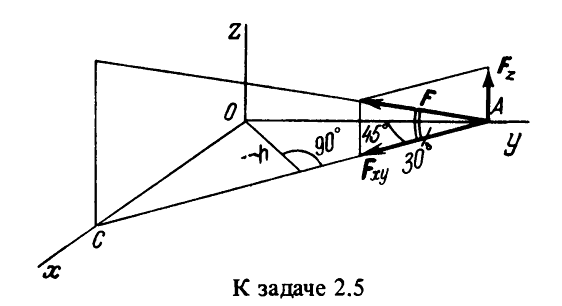
$$m_y(F) = zF_x - xF_z = -aF \cos 30° = -aF\sqrt{3}/2,$$

так как $z = 0, F_x = 0$; $x = a, F_z = F \cos 30°$. Наконец,

$$m_z(F) = xF_y - yF_x = aF \cos 60° = aF/2,$$

так как $x = a$, $y = 0$; $F_y = F \cos 60°, F_x = 0$. Естественно, что ответы, полученные разными способами, совпали.

Задача 2.5. Определить моменты относительно осей x, y и z силы F, изображенной на рисунке. Сила F, приложенная в точке A, лежащей на



К задаче 2.5

оси y, образует с плоскостью xy угол $30°$, причем ее проекция на эту плоскость образует с осью y угол OAC, равный $45°$; $AO = a$.

Решение. Как и в предыдущей задаче, находим без труда моменты силы F относительно осей y и z; $m_y(F) = 0$ (линия действия силы F пересекает ось y), $m_z(F) = -F_{xy}h$, где $F_{xy} = F \cos 30° = F \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ — модуль

проекции силы F на плоскость xy, перпендикулярную к оси z, а $h = OA \sin 45° = a \sin 45° = a\sqrt{2}/2$ – длина перпендикуляра, опущенного из точки O пересечения оси z с плоскостью xy на линию действия силы F_{xy}. (Знак момента отрицателен, так как с конца оси z к ее началу видно, что сила F_{xy} стремится повернуть тело в плоскости xy вокруг оси z по ходу часовой стрелки.) Итак,

$$m_y(F) = 0, \quad m_z(F) = -Fa\sqrt{6}/4. \tag{1}$$

Труднее найти момент силы F относительно оси x, так как неизвестен угол между силой F и перпендикулярной к оси x плоскостью yz. Здесь целесообразно прибегнуть к приему, упомянутому в обзоре теории, – разложить силу F на две составляющие. Разложим силу на составляющие F_{xy} и F_z (см. рисунок). Таким образом, $F = F_{xy} + F_z$, где $F_{xy} = F \cos 30°$, $F_z = F \cos 60°$.

Теперь для определения момента силы F относительно оси x применим теорему Вариньона, согласно которой момент равнодействующей силы относительно оси равен сумме моментов составляющих сил относительно той же оси. В данном случае

$$m_x(F) = m_x(F_{xy}) + m_x(F_z). \tag{2}$$

Так как линия действия силы F_{xy} пересекает ось x, то $m_x(F_{xy}) = 0$. Момент силы F_z относительно оси x равен $m_x(F_z) = F_z a$. Учитывая, что $F_z = F \cos 60° = F/2$, окончательно получим

$$m_x(F) = Fa/2. \tag{3}$$

Для вычисления момента силы F относительно оси x можно было также воспользоваться формулой

$$m_x(F) = yF_z - zF_y, \tag{4}$$

где y и z – координаты точки A приложения силы F, а F_y и F_z – проекции силы F на оси y и z. В данном случае $y = a$, $z = 0$,

$$F_y = -F_{xy} \cos 45° = -F \cos 30° \cos 45° = -F\sqrt{6}/4,$$

$$F_z = F \cos 60° = F/2.$$

Подставив эти значения в формулу (4), получим результат формулы (3), т.е. $m_x(F) = Fa/2$.

Как показывает решение этой задачи, в случаях, когда вычисление момента силы относительно оси обычным приемом затруднительно, следует прибегать к разложению силы на составляющие, с последующим применением теоремы Вариньона, либо к выражениям (3*) моментов силы относительно осей через проекции силы на эти оси.

Задача 2.6. Доказать, что момент пары сил – свободный вектор.

Решение. Докажем, что сумма моментов сил, образующих пару сил, относительно любой точки равна моменту пары сил. Для этого рассмотрим пару сил, образованную силами F_1 и F_2, равными по модулю и направленными по параллельным линиям действия в противоположные стороны. Плечо пары представим вектором r_0, перпендикулярным линиям действия сил и соединяющим их точки приложения (см. рис.).

Выбираем за центр моментов произвольную точку O и проводим из точки O в точки A и B, где приложены силы F_1 и F_2, векторы r_1 и r_2.

Составляем сумму моментов сил, образующих пару сил, относительно точки O

$$m_O(F_1) + m_O(F_2) = r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2.$$

Замечая, что $F_2 = -F_1$, перепишем это равенство

$$r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 = r_1 \times F_1 - r_2 \times F_1 = (r_1 - r_2) \times F_1.$$

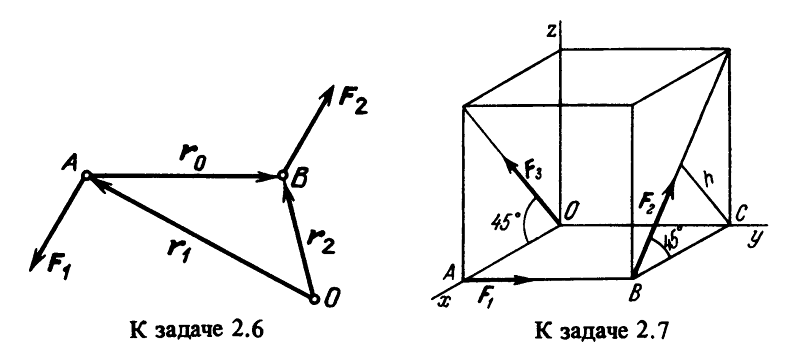
Но из рисунка видно, что

$$r_1 - r_2 = -r_0$$

и, следовательно,

$$m_O(F_1) + m_O(F_2) = -r_0 \times F_1 = r_0 \times F_2.$$

Таким образом, момент сил, образующих пару относительно любой произвольной точки, равен моменту пары. Момент пары сил – свободный



К задаче 2.6 К задаче 2.7

вектор. Не нарушая действия сил на абсолютно твердое тело, можно переносить пару сил в любую параллельную плоскость, сохраняя ее момент неизменным по модулю и направлению.

Задача 2.7. Вычислить главные моменты относительно осей x, y и z и точки O пространственной системы сил, изображенной на рисунке. Сила F_1 лежит на ребре куба, а силы F_2 и F_3 – на диагоналях его боковых граней. Ребро куба a равно 2 м, $F_1 = 10$ кН, $F_2 = F_3 = 12\sqrt{2}$ кН.

Решение. Главные моменты системы сил относительно осей равны суммам моментов данных сил относительно этих осей, т.е.

$$m_x = \sum_{k=1}^{n} m_x(F_k), \quad m_y = \sum_{k=1}^{n} m_y(F_k), \quad m_z = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k),$$

в данной задаче

$$\begin{aligned} m_x &= m_x(F_1) + m_x(F_2) + m_x(F_3), \\ m_y &= m_y(F_1) + m_y(F_2) + m_y(F_3), \\ m_z &= m_z(F_1) + m_z(F_2) + m_z(F_3). \end{aligned} \tag{1}$$

Моменты сил F_1, F_2 и F_3 относительно осей x, y и z имеют следующий вид: $m_x(F_1) = 0$ (линия действия силы F_1 пересекает ось x), $m_y(F_1) = 0$ (сила F_1 параллельна оси y), $m_z(F_1) = F_1 a$; далее,

$$m_x(F_2) = F_2 a \sin 45^\circ = F_2 a\sqrt{2}/2,$$
$$m_y(F_2) = -F_2 h = -F_2 a \sin 45^\circ = -F_2 a\sqrt{2}/2,$$
$$m_z(F_2) = F_2 a \cos 45^\circ = F_2 a\sqrt{2}/2,$$
$$m_x(F_3) = m_y(F_3) = m_z(F_3) = 0$$

(линия действия силы F_3 проходит через точку O, т.е. пересекает оси x, y и z).

Внеся эти значения моментов сил в формулы (1), получим

$$m_x = F_2 a\sqrt{2}/2, \quad m_y = -F_2 a\sqrt{2}/2, \quad m_z = F_1 a + F_2 a\sqrt{2}/2,$$

или, подставляя числовые значения,

$$m_x = 24 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad m_y = -24 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad m_z = 44 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Главные моменты системы сил m_x, m_y, m_z относительно осей декартовых координат x, y, z одновременно являются проекциями главного момента $\boldsymbol{m}_O$ относительно начала координат O на соответствующие оси, т.е. $\boldsymbol{m}_O = m_x \boldsymbol{i} + m_y \boldsymbol{j} + m_z \boldsymbol{k}$. Использовав формулы (7*) и (8*), найдем теперь модуль главного момента системы сил относительно точки O и его направляющие косинусы:

$$m_O = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} = 55{,}5 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$\cos(x, \widehat{\boldsymbol{m}_O}) = \frac{m_x}{m_O} = 0{,}43, \quad \cos(y, \widehat{\boldsymbol{m}_O}) = \frac{m_y}{m_O} = -0{,}43,$$

$$\cos(z, \widehat{\boldsymbol{m}_O}) = \frac{m_z}{m_O} = 0{,}79,$$

т.е. $(x, \widehat{\boldsymbol{m}_O}) = 65^\circ$, $(y, \widehat{\boldsymbol{m}_O}) = 115^\circ$, $(z, \widehat{\boldsymbol{m}_O}) = 38^\circ$. Итак, $\boldsymbol{m}_O = 24\boldsymbol{i} - 24\boldsymbol{j} + 44\boldsymbol{k}$.

Вычисление главного момента сил относительно точки O непосредственно, без нахождения m_x, m_y, m_z, более сложно.

2. Приведение к одному центру сил, произвольно расположенных в пространстве. Равновесие произвольной пространственной системы сил. *Главным вектором* V *системы сил* называется векторная сумма этих сил, т.е. $V = \sum_{k=1}^{n} F_k$

Проекции V_x, V_y и V_z главного вектора V на оси декартовых координат равны суммам проекций сил на соответствующие оси:

$$V_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \quad V_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}, \quad V_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}. \tag{9*}$$

Модуль главного вектора V и направляющие косинусы определяются по формулам

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}, \tag{10*}$$

$$\cos(x, \widehat{V}) = \frac{V_x}{V}, \quad \cos(y, \widehat{V}) = \frac{V_y}{V}, \quad \cos(z, \widehat{V}) = \frac{V_z}{V}. \tag{11*}$$

Главный момент m_O пространственной системы сил относительно центра O равен векторной сумме моментов всех сил относительно этого центра:

$$m_O = \sum_{k=1}^{n} m_O(F_k).$$

Проекции главного момента m_O на оси декартовых координат называются главными моментами m_x, m_y, m_z относительно соответствующих осей, т.е. $m_O = m_x i + m_y j + m_z k$.

Главные моменты пространственной системы сил m_x, m_y, m_z относительно осей x, y, z определяются по формулам (5*), (6*). Зная m_x, m_y, m_z, можно определить модуль и направляющие косинусы m_O по формулам (7*) и (8*).

В результате приведения сил, произвольно расположенных в пространстве, к одному центру система сил оказывается эквивалентной силе, приложенной в центре приведения O и равной главному вектору V, и паре сил, момент которой векторно равен главному моменту m_O.

При перемене центра приведения системы сил главный момент системы, вообще говоря, меняется, причем зависимость главного момента пространственной системы сил от выбора центра приведения выражается так: главный момент m_A пространственной системы сил относительно нового центра A равен векторной сумме главного момента m_O этой системы сил относительно старого центра O и момента относительно нового центра A силы V, приложенной в старом центре O: $m_A = m_O + m_A(V_O)$.

Статическими инвариантами пространственной системы сил называются такие характеристики этой системы, которые остаются неизменными при перемене центра приведения. Статических инвариантов существует два:

первый статический инвариант – главный вектор $\boldsymbol{V}$ системы сил; в соответствии с определением модуль и направление главного вектора $\boldsymbol{V}$ не зависят от выбора центра приведения:

$$\boldsymbol{V} = V_x \boldsymbol{i} + V_y \boldsymbol{j} + V_z \boldsymbol{k},$$

где V_x, V_y, V_z определяются по формулам (9*);

второй статический инвариант – скалярное произведение главного вектора $\boldsymbol{V}$ и главного момента $\boldsymbol{m}_O$ – не зависит от выбора центра приведения:

$$\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{m}_O = V_x m_x + V_y m_y + V_z m_z,$$

где V_x, V_y, V_z и m_x, m_y, m_z определяются соответственно по формулам (9*) и (5*), (6*).

Не следует отождествлять силу $\boldsymbol{V}$ с равнодействующей силой $\boldsymbol{R}$, так как равнодействующая $\boldsymbol{R}$ – это одна сила, которая эквивалентна данной пространственной системе сил, а сила $\boldsymbol{V}$ эквивалентна данной системе сил только в совокупности с парой сил, момент которой равен главному моменту $\boldsymbol{m}_O$.

Различные случаи приведения сил, произвольно расположенных в пространстве.

а. Главный вектор равен нулю, но главный момент не равен нулю, т.е. $\boldsymbol{V} = 0, \boldsymbol{m}_O \neq 0$.

Система сил приводится к паре сил, момент которой равен главному моменту $\boldsymbol{m}_O$. (В этом случае главный момент системы сил $\boldsymbol{m}_O$ не зависит от выбора центра приведения.)

б. Главный вектор не равен нулю, но главный момент равен нулю, т.е. $\boldsymbol{V} \neq 0, \boldsymbol{m}_O = 0$.

Система сил приводится *к равнодействующей* $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{V}$, приложенной в центре приведения системы.

в. Главный вектор и главный момент системы не равны нулю и притом взаимно перпендикулярны, т.е. $\boldsymbol{V} \neq 0, \boldsymbol{m}_O \neq 0$, $(\widehat{\boldsymbol{m}_O, \boldsymbol{V}}) = 90°$.

Система сил приводится к *равнодействующей* $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{V}$, линия действия которой параллельна линии действия силы $\boldsymbol{V}$ и отстоит от нее на расстояние $h = m_O / V$. Положение линии действия равнодействующей должно быть таким, чтобы направление момента равнодействующей $\boldsymbol{R}$ относительно центра приведения O совпадало с направлением главного момента системы сил $\boldsymbol{m}_O$ относительно центра O.

Сила $\boldsymbol{V}$ и равнодействующая $\boldsymbol{R}$ равны по модулю, параллельны и отличаются, вообще говоря, только линиями действия (рис. 2.9).

г. Главный вектор и главный момент системы не равны нулю и притом не взаимно перпендикулярны, т.е.

$V \neq 0, \quad m_O \neq 0$ и $(\widehat{V, m_O}) \neq 90°$.

Система сил приводится к *динаме* (*силовому винту*) – совокупности силы V и пары сил, лежащей в плоскости, перпендикулярной к этой силе.

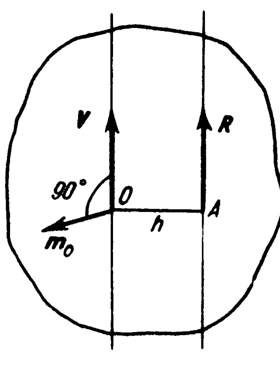


Рис. 2.9

Линия действия силы V называется *центральной осью*. Центральная ось является геометрическим местом центров приведения, для которых главный момент m_O имеет наименьшее значение и направлен вдоль этой оси (рис. 2.10). Уравнения центральной оси имеют вид

$$\frac{m_x - yV_z + zV_y}{V_x} = \frac{m_y - zV_x + xV_z}{V_y} = \frac{m_z - xV_y + yV_x}{V_z},$$

где m_x, m_y, m_z, V_x, V_y, V_z имеют прежние значения, а x, y, z – текущие координаты.

д. Главный вектор и главный момент системы равны нулю, т.е. $V = 0$, $m_O = 0$.

К твердому телу приложена пространственная система уравновешивающихся сил.

Уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил, приложенных к твердому телу. Для равновесия произвольной пространственной системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех данных сил на произвольно выбранные оси декартовых координат x, y, z и суммы моментов всех сил относительно этих осей равнялись нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0, \qquad (12^*)$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_x(F_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_y(F_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k) = 0. \qquad (13^*)$$

Первые три уравнения называются *уравнениями проекций;* они обеспечивают равенство нулю главного вектора V. Три последних уравнения называются *уравнениями моментов;* они обеспечивают равенство нулю главного момента m_O. В случае произвольной пространственной системы сил задача является статически определенной, если число алгебраических неизвестных не более шести.

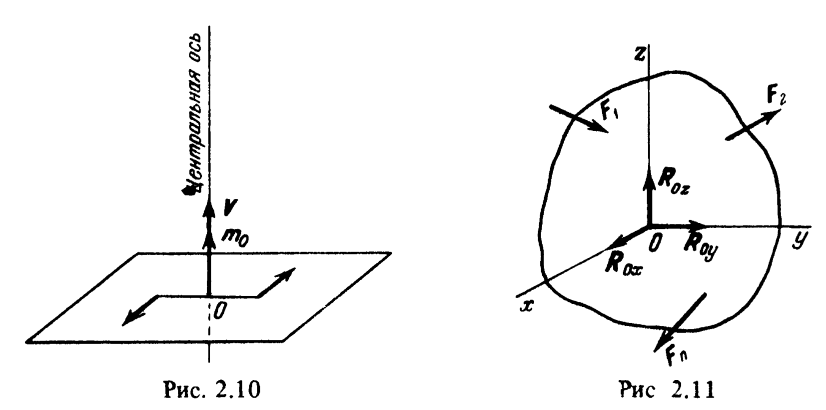


Рис. 2.10 Рис 2.11

В случае равновесия твердого тела с одной неподвижной точкой, например со сферическим шарниром (рис. 2.11), система активных сил приводится к равнодействующей, линия действия которой проходит через неподвижную точку. Три проекции реакции неподвижной точки R_{Ox}, R_{Oy}, R_{Oz} на оси декартовых координат определяются из уравнений (12*).

Из уравнений моментов (13*) могут быть определены три неизвестные активные силы (напомним, что активными называются все силы, не являющиеся реакциями связей).

В случае равновесия твердого тела с двумя закрепленными точками, например с двумя сферическими шарнирами или двумя подпятниками (рис. 2.12), можно определить четыре составляющие опорных реакций R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Bx}, R_{By}, перпендикулярных к оси, проходящей через неподвижные точки. Составляющие опорных реакций R_{Az} и R_{Bz} направлены вдоль этой оси и не могут быть в отдельности определены. Можно найти только их сумму $R_{Az} + R_{Bz}$. Если одна из опор выполнена в виде подшипника B (рис. 2.13), допускающего перемещение вдоль оси z, то отсутствует составляющая реакции R_{Bz}. В этом случае из уравнений равновесия можно определить пять составляющих опорных реакций R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az}, R_{Bx}, R_{By} и одну активную силу.

Заметим, что в случаях, изображенных на рис. 2.12, 2.13, уравнение моментов сил относительно оси z является единственным условием равновесия. Остальные пять уравнений равновесия служат для определения реакций.

Различные случаи приведения к одному центру параллельных сил в пространстве. Эти силы могут быть приведены:

а) к паре сил, если главный вектор равен нулю, а главный момент не равен нулю: $V = 0$, $m_O \neq 0$;

б) к равнодействующей, если главный вектор не равен нулю, а главный момент равен нулю: $V \neq 0$, $m_O = 0$;

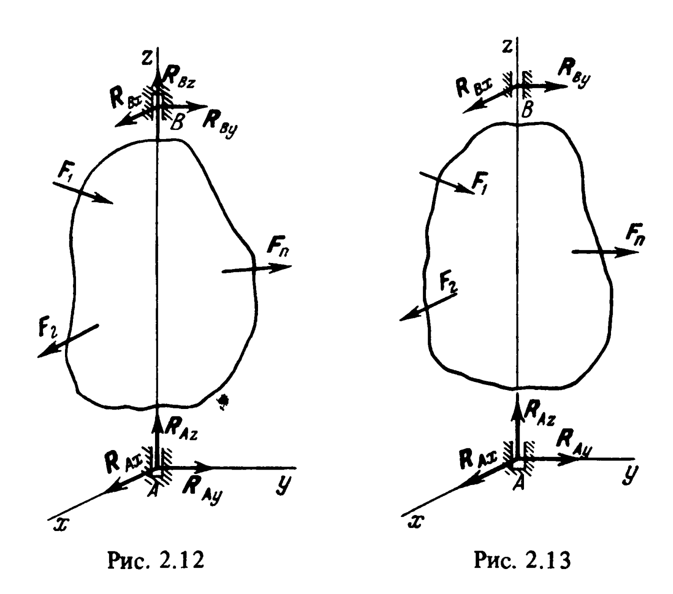


Рис. 2.12 Рис. 2.13

в) к равнодействующей, если главный вектор и главный момент не равны нулю: $V \neq 0$, $m_O \neq 0$; в случае системы параллельных сил вектор V и вектор m_O всегда взаимно перпендикулярны;

г) система сил является уравновешивающейся, если главный вектор и главный момент системы равны нулю: $V = 0, m_O = 0$.

Уравнения равновесия системы сил, параллельных оси z, имеют вид

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} m_x(F_k) = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} m_y(F_k) = 0. \qquad (14^*)$$

Задача является статически определенной, если число алгебраических неизвестных не более трех.

Указание. При решении задач на равновесие твердого тела, находящегося под действием произвольной пространственной системы сил, надо выполнить четыре первых пункта, указанных в начале книги, на с. 16. Затем:

5) убедиться в том, что данная задача является статически определенной, т.е. число алгебраических неизвестных не более шести;

6) выбрать систему осей декартовых координат;

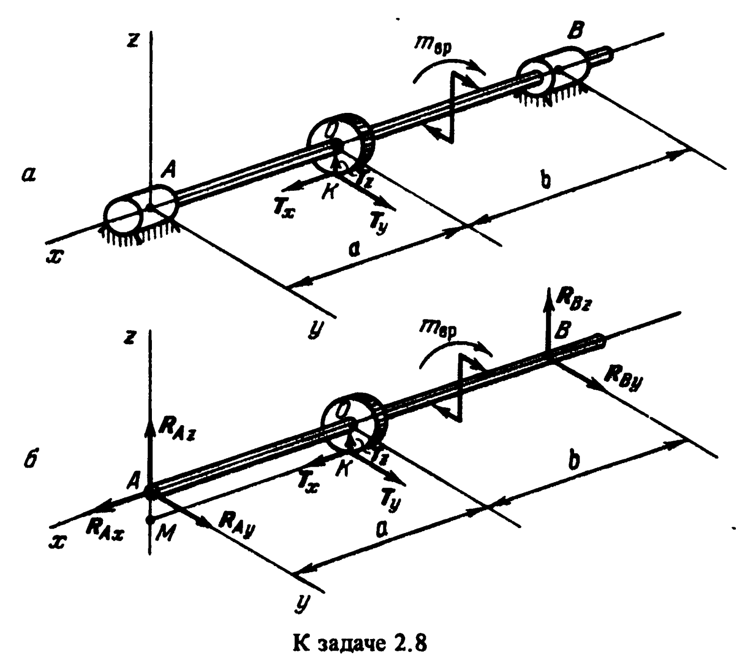
7) составить шесть уравнений равновесия твердого тела (12*) и (13*).

В случае системы параллельных сил отпадают два уравнения проекций сил на оси, перпендикулярные к силам, и одно уравнение моментов сил относительно оси, параллельной силам. Так, если силы параллельны оси x, то уравнения равновесия имеют вид

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}=0,\quad \sum_{k=1}^{n} m_y(F_k)=0,\quad \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k)=0;$$

8) решив систему уравнений, составленных в предыдущем пункте, найти неизвестные величины.

Оси декартовых координат рекомендуется выбирать так, чтобы они оказались параллельными либо перпендикулярными к возможно большему числу неизвестных сил, а также чтобы линии действия неизвестных сил пересекали эти оси.



К задаче 2.8

Задача 2.8. На рис. *а* изображена косозубая шестерня радиусом r, закрепленная на горизонтальном валу. Вал лежит в двух опорах: упорном подшипнике A и цилиндрическом подшипнике B. В точке K, расположенной в вертикальной плоскости симметрии шестерни, к ее зубу приложено давление T со стороны другой шестерни, находящейся с ней в зацеплении (на рис. *а* сила T и вторая шестерня не изображены). Давление T разложено на три составляющие T_x, T_y и T_z, которые соответственно параллель-

ны осям координат x, y и z (начало координат взято в точке A, ось x направлена вдоль вала, ось z – по вертикали вверх, ось y – так, чтобы вместе с осями x и z была образована правая система координат). К валу, вращающемуся равномерно, приложена пара сил с вращающим моментом $m_{\text{вр}}$ так, что ее моменты относительно осей равны: $m_x = m_{\text{вр}}$, $m_y = m_z = 0$.

Определить реакции опор A и B и вращающий момент $m_{\text{вр}}$. Даны модули составляющих T_x, T_y и T_z давления T на зуб шестерни. Размеры указаны на рисунке. Весом шестерни и вала пренебречь.

Решение. Для определения неизвестных реакций опор A и B и вращающего момента $m_{\text{вр}}$ рассмотрим равновесие вала с сидящей на нем шестерней. (Под равновесием вала мы понимаем не только покой, но и его равномерное вращение, упомянутое в условии задачи.)

К валу и шестерне приложены следующие активные силы, изображенные на рисунке: три составляющие T_x, T_y, T_z давления T и пара сил, момент которой $m_x = m_{\text{вр}}$ требуется определить (в данной задаче момент активной пары сил неизвестен).

Связями, наложенными на вал, являются две опоры: упорный подшипник A и подшипник B. Мысленно отбросим связи и заменим их действия на вал реакциями. Подшипник B допускает перемещение вала вдоль оси x, поэтому составляющая реакции вдоль оси x отсутствует, и нам остается изобразить лишь две составляющие R_{By} и R_{Bz}, перпендикулярные к оси вала. (Мы направляем на рис. *б* эти составляющие в сторону возрастания соответствующих координат. Если в действительности направление какой-либо составляющей противоположно, то ответ окажется отрицательным.) Упорный подшипник A, в отличие от подшипника B, не допускает перемещения вала вдоль оси x. Поэтому в точке A мы изображаем все три составляющие R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az} реакции.

Итак, нам предстоит рассмотреть равновесие свободного вала с шестерней под действием активных сил T_x, T_y, T_z и пары сил с моментом $m_x = m_{\text{вр}}$, а также составляющих реакций R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az}, R_{By}, R_{Bz}. Все эти силы образуют пространственную систему сил, для которой надо записать шесть уравнений равновесия. Так как число алгебраических неизвестных также равно шести ($m_{\text{вр}}$, R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az}, R_{By} и R_{Bz}), то задача является статически определенной.

Составим уравнения проекций сил на оси декартовых координат x, y, z. Все силы либо перпендикулярны, либо параллельны этим осям. Поэтому их проекции равны нулю или модулю соответствующей силы. Так, силы T_y, T_z, R_{Ay}, R_{Az}, R_{By}, R_{Bz} и пара сил перпендикулярны к оси x, и, следовательно, их проекции на эту ось равны нулю. Из проекций на ось x лишь R_{Ax} и T_x отличны от нуля, причем обе проекции положительны. Итак,

$$\Sigma F_{kx} = T_x + R_{Ax} = 0. \tag{1}$$

Аналогично запишем уравнения проекций сил на оси y и z:

$$\Sigma F_{ky} = T_y + R_{Ay} + R_{By} = 0, \qquad (2)$$

$$\Sigma F_{kz} = T_z + R_{Az} + R_{Bz} = 0. \qquad (3)$$

(Напомним, что проекция пары сил на любую ось равна нулю, ибо главный вектор пары сил равен нулю.)

Переходим к составлению уравнений моментов сил относительно осей x, y, z. Предварительно заметим, что составление этих уравнений в данной задаче производится достаточно просто. Действительно, линии действия сил параллельны или пересекают оси координат и, значит, имеют моменты, равные нулю, либо силы лежат в плоскостях, перпендикулярных к осям и, следовательно, отпадает необходимость в проектировании этих сил на плоскости, перпендикулярные к осям.

При составлении уравнения моментов сил относительно оси x предварительно заметим, что силы R_{Ax} и T_x параллельны оси x, а линии действия сил R_{Ay}, R_{Az}, T_z, R_{By} и R_{Bz} пересекают ось x. Следовательно, их моменты равны нулю. Значит, в уравнение моментов войдут лишь моменты силы T_y и пары сил.

По условию момент пары относительно оси x равен $m_{\text{вр}}$, т.е.

$$m_x = - m_{\text{вр}}. \qquad (4)$$

Знак минус взят, поскольку если смотреть с положительного направления оси x, то вращение, вызываемое парой, происходит по ходу часовой стрелки.

Сила T_y лежит в плоскости, перпендикулярной к оси x. Из точки O пересечения оси с плоскостью опускаем перпендикуляр $OK = r$ на линию действия T_y. Момент положителен, так как с конца оси x к ее началу видно, что сила T_y стремится повернуть тело вокруг точки O против часовой стрелки. Итак,

$$m_x(T_y) = T_y \cdot r. \qquad (5)$$

Использовав формулы (4) и (5), запишем уравнение моментов:

$$\Sigma m_x(F_k) = -m_{\text{вр}} + T_y \cdot r = 0. \qquad (6)$$

При составлении уравнения моментов относительно оси y заметим, что силы T_y, R_{Ay}, R_{By} параллельны оси y, а линии действия сил R_{Ax} и R_{Az} пересекают ось y. Следовательно, моменты их равны нулю. Кроме того, по условию момент пары сил m_y равен нулю. Значит, отличными от нуля являются только моменты сил T_x, T_z и R_{Bz}. Все эти силы лежат в плоскости xz, перпендикулярной к оси y. Плоскость xz пересекается с осью y в точке A. Поэтому из точки A опускаем перпендикуляры на линии действия сил T_x, T_z и R_{Bz}. Соответственно получим: $AM = r$, $AO = a$ и $AB = a + b$. Момент силы T_x отрицателен, так как с конца оси y к ее началу

видно, что сила T_x стремится повернуть тело вокруг точки A по ходу часовой стрелки, а моменты сил T_z и R_{Bz} положительны, ибо они видны противоположно направленными. Итак,

$$m_y(T_x) = -T_x \cdot r, \quad m_y(T_z) = T_z \cdot a, \quad m_y(R_{Bz}) = R_{Bz}(a+b). \qquad (7)$$

Приняв во внимание формулы (7), запишем уравнение моментов относительно оси y в виде

$$\Sigma m_y(F_k) = -T_x \cdot r + T_z \cdot a + R_{Bz}(a+b) = 0. \qquad (8)$$

При составлении уравнения моментов относительно оси z надо учесть, что силы T_z, R_{Az}, R_{Bz} параллельны оси z, а линии действия сил T_x, R_{Ax}, R_{Ay} пересекают эту ось. Поэтому моменты этих сил относительно оси z равны нулю. Кроме того, по условию момент пары сил относительно оси z также равен нулю. Значит, в уравнение войдут только моменты сил T_y и R_{By}.

Сила T_y лежит в горизонтальной плоскости, перпендикулярной к оси z. Из точки M пересечения оси z с этой плоскостью опускаем перпендикуляр $MK = AO = a$ на линию действия T_y. Момент силы T_y относительно оси z отрицателен, так как с конца оси z к ее началу видно, что сила T_y стремится повернуть тело по ходу часовой стрелки. Значит,

$$m_z(T_y) = -T_y \cdot a. \qquad (9)$$

Сила R_{By} лежит в плоскости xy, перпендикулярной к оси z. Из точки A пересечения этой плоскости с осью z опускаем перпендикуляр $AB = a + b$ на линию действия R_{By}. Момент отрицателен, ибо с конца оси z к ее началу видно, что сила R_{By} стремится повернуть тело вокруг точки A по ходу часовой стрелки. Итак,

$$m_z(R_{By}) = -R_{By} \cdot (a+b). \qquad (10)$$

Приняв во внимание формулы (9) и (10), запишем уравнение моментов сил относительно оси z:

$$\Sigma m_z(F_k) = -T_y \cdot a - R_{By} \cdot (a+b) = 0. \qquad (11)$$

Итак, уравнения равновесия вала с закрепленной на нем шестерней имеют вид

$$\Sigma F_{kx} = T_x + R_{Ax} = 0,$$
$$\Sigma F_{ky} = T_y + R_{Ay} + R_{By} = 0,$$
$$\Sigma F_{kz} = T_z + R_{Az} + R_{Bz} = 0,$$
$$\Sigma m_x(F_k) = -m_{вр} + T_y \cdot r = 0,$$
$$\Sigma m_y(F_k) = -T_x \cdot r + T_z \cdot a + R_{Bz} \cdot (a+b) = 0,$$
$$\Sigma m_z(F_k) = -T_y \cdot a - R_{By} \cdot (a+b) = 0.$$

Теперь переходим к решению этой системы шести уравнений с шестью неизвестными (R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az}, R_{By}, R_{Bz} и $m_{\text{вр}}$). Из уравнения (6) имеем $m_{\text{вр}} = T_y \cdot r$. Из уравнения (8) получим

$$R_{Bz} = \frac{T_x \cdot r - T_z \cdot a}{a + b}.$$

Из уравнения (11) находим

$$R_{By} = -\frac{T_y \cdot a}{a + b}.$$

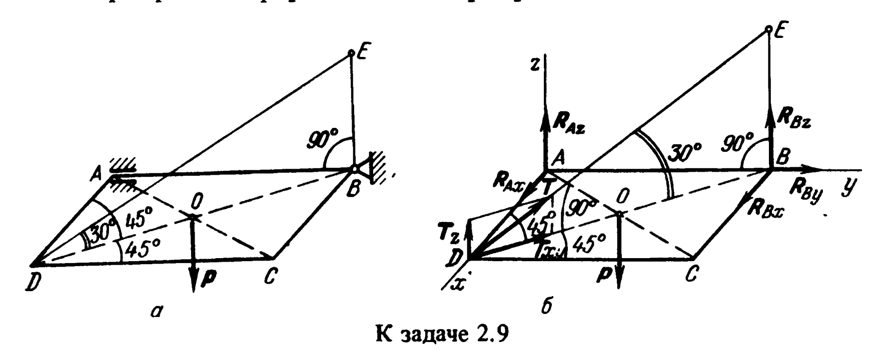
Теперь, подставив значение R_{By} в уравнение (2), а R_{Bz} в (3), соответственно имеем

$$R_{Ay} = -\frac{T_y \cdot b}{a + b}, \qquad R_{Az} = -\frac{T_x \cdot r + T_z \cdot b}{a + b}.$$

Наконец, из (1) следует $R_{Ax} = -T_x$.

Значения R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az} и R_{By} оказались отрицательными. Это означает, что направления сил R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az} и R_{By} противоположны тем, которые предположительно были нами указаны на рисунке. Знак R_{Bz} может быть выяснен только после подстановки числовых значений T_x, T_z, a и r.

Задача 2.9. Однородная квадратная пластина *ABCD* весом *P* поддерживается в равновесии в горизонтальном положении посредством цилиндрического шарнира *A*, сферического шарнира *B* и нити *DE*. Нить соединяет



К задаче 2.9

вершину *D* пластины с точкой *E*, расположенной на вертикальной стене. К этой стене пластина прикреплена шарнирами *A* и *B*. Нить образует с плоскостью пластины угол 30°, причем *BE* перпендикулярна к *AB* (см. рис. *а*).

Определить реакции шарниров *A* и *B* и нити *DE*.

Р е ш е н и е. Для определения неизвестных рассмотрим равновесие пластины *ABCD*. К ней в точке *O* пересечения диагоналей квадрата приложена одна активная сила – сила тяжести *P*.

Применив закон освобождаемости, мысленно отбросим связи, наложенные на пластину: цилиндрический шарнир A, сферический шарнир B и нить DE. Заменим действие связей на пластину соответствующими реакциями связей. Рассечем нить DE и направим реакцию T от точки D по нити (см. рис. *б*). Направление реакции сферического шарнира B заранее неизвестно. Поэтому заменим реакцию R_B тремя взаимно перпендикулярными составляющими. Направив оси x и y вдоль сторон пластины и ось z перпендикулярно к пластине, изобразим эти составляющие R_{Bx}, R_{By} и R_{Bz}. Цилиндрический шарнир A допускает перемещение пластины вдоль AB. Поэтому реакцию R_A, перпендикулярную AB, заменим двумя взаимно перпендикулярными составляющими R_{Ax} и R_{Az}.

Итак, пластина $ABCD$ находится в покое под действием активной силы тяжести P и реакций T, R_{Ax}, R_{Az}, R_{Bx}, R_{By}, R_{Bz}. Для этой произвольной пространственной системы сил можно составить шесть независимых уравнений равновесия. Так как число скалярных неизвестных также равно шести: T, R_{Ax}, R_{Az}, R_{Bx}, R_{By}, R_{Bz}, то задача является статически определенной.

Переходя к составлению уравнений равновесия, заметим, что неизвестны углы, которые образует сила T с осями x и y. Поэтому разложим силу T на две составляющие так, чтобы одна из них, T_{xy}, лежала в плоскости xy пластины, а вторая, T_z, была параллельна оси z, т.е. $T = T_{xy} + T_z$. Модули этих составляющих равны:

$$T_{xy} = T\cos 30^\circ, \quad T_z = T\sin 30^\circ. \tag{1}$$

В дальнейшем при составлении уравнений вместо определения проекций силы T на оси координат будем вычислять алгебраические суммы проекций сил T_{xy} и T_z на эти оси. Аналогично вместо вычисления моментов силы T относительно осей координат будем находить алгебраические суммы моментов сил T_{xy} и T_z относительно этих осей. Составим уравнения проекций сил:

$$\Sigma F_{kx} = R_{Ax} + R_{Bx} - T_{xy}\cos 45^\circ = 0, \tag{2}$$

$$\Sigma F_{ky} = R_{By} + T_{xy}\sin 45^\circ = 0, \tag{3}$$

$$\Sigma F_{kz} = R_{Az} + R_{Bz} - P + T_z = 0. \tag{4}$$

Перейдем к составлению уравнения моментов сил относительно оси x. Линии действия сил T, R_{Ax}, R_{Az}, R_{By} пересекают ось x, сила R_{Bx} параллельна этой оси. Значит, моменты упомянутых сил относительно оси x равны нулю. Поэтому

$$\Sigma m_x(F_k) = -P\cdot\frac{a}{2} + R_{Bz}\cdot a = 0, \tag{5}$$

где буквой a обозначена сторона квадратной пластины.

Линии действия сил $T_{xy}, R_{Ax}, R_{Az}, R_{Bx}, R_{By}, R_{Bz}$ пересекают ось y. Поэтому их моменты относительно этой оси равны нулю. Значит,

$$\Sigma m_y(F_k) = -T_z \cdot a + P \cdot \frac{a}{2} = 0. \qquad (6)$$

Линии действия сил R_{Ax}, R_{Az}, R_{By} пересекают ось z, силы T_z, R_{Bz} и P параллельны оси z. Значит, их моменты относительно этой оси равны нулю. При вычислении момента силы T_{xy} заметим, что плечом является $OA = AD \cos 45° = a\sqrt{2}/2$. Поэтому

$$\Sigma m_z(F_k) = T_{xy} \cdot a\frac{\sqrt{2}}{2} - R_{Bx} \cdot a = 0. \qquad (7)$$

Из уравнения (5) следует $R_{Bz} = P/2$, из уравнения (6) $T_z = P/2$. Воспользовавшись результатами (1), вычислим $T = T_z/\sin 30° = P$, $T_{xy} = T\cos 30° = P\sqrt{3}/2$. Подставив это значение T_{xy} в уравнение (7), получим $R_{Bx} = P\sqrt{6}/4 = 0{,}61\,P$.

Определив T_{xy} и R_{Bx}, из уравнения (2) получим $R_{Ax} = 0$. Подстановка значения T_{xy} в уравнение (3), а значений R_{Bz} и T_z в уравнение (4) дает $R_{By} = -P\sqrt{6}/4 = -0{,}61P$, $R_{Az} = 0$, Итак, $T = P$, $R_{Ax} = 0$, $R_{Az} = 0$, $R_{Bx} = 0{,}61P$, $R_{By} = -0{,}61P$, $R_{Bz} = P/2$.

Так как $R_{Ax} = R_{Az} = 0$, то реакция цилиндрического шарнира A $R_A = R_{Ax} + R_{Az} = 0$.

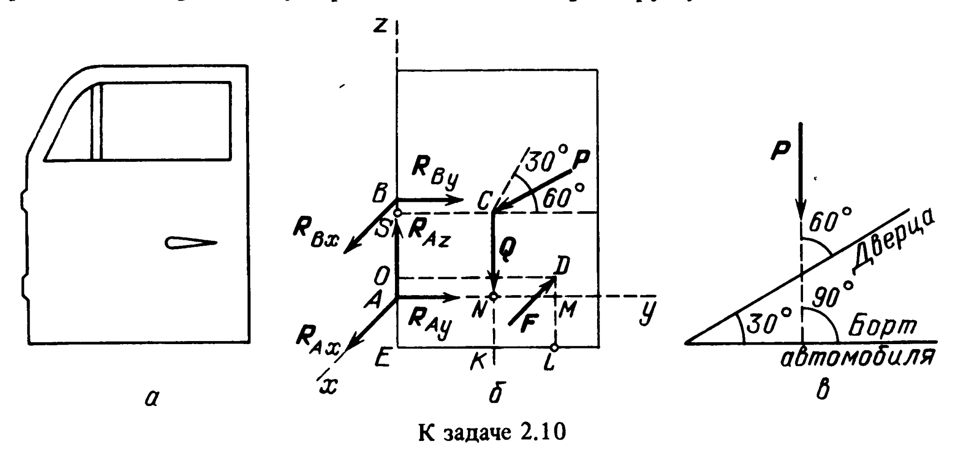
Задача 2.10. Дверь автомобиля, которая весит 2 Н, можно представить в виде прямоугольника шириной 0,8 м и высотой 1,1 м (рис. *а*). Петли A и B расположены на высоте 0,2 и 0,6 м от нижнего края двери. Боковой (по отношению к автомобилю) ветер давит на дверь с силой 1,5 Н, приложенной в геометрическом центре двери. Какой горизонтальной силой, приложенной к ручке двери перпендикулярно ее плоскости, можно удержать дверь приоткрытой на 30°? Ручка двери D находится на высоте 0,3 м от нижнего края двери и на расстоянии 0,65 м от оси, проходящей через петли.

Найти также реакции в петлях, считая, что вертикальная нагрузка целиком воспринимается нижней петлей.

Р е ш е н и е. Рассмотрим равновесие двери, открытой на 30°. К двери приложены три активные силы (рис. *б*). Первая – это сила веса двери, которую обозначим на схеме Q и приложим в точке пересечения диагоналей прямоугольника двери.

Вторая активная сила – это сила давления бокового ветра, которую обозначаем P. Эта сила перпендикулярна борту автомобиля, а с плоскостью двери, открытой на 30°, составляет угол 60° (на рис. *в* представлен для наглядности вид сверху на борт автомобиля и приоткрытую дверь).

И, наконец, третья сила F приложена к ручке двери так, чтобы удержать дверь приоткрытой. В задаче не указано, приложена ли сила снаружи (к внешней ручке) или изнутри автомобиля. Направление силы – одно и то же, независимо от того, приложена ли она снаружи или изнутри. На расчетной схеме изображаем силу F приложенной к ручке двери и направленной перпендикулярно плоскости двери наружу.



К задаче 2.10

На дверь наложены две связи, осуществляемые петлями. Нижняя петля A, согласно условию, содержит подпятник для восприятия вертикальной нагрузки. Петля A препятствует перемещению в любом из трех взаимно перпендикулярных направлений. При освобождении от связей нижнюю петлю надо заменить реакцией, имеющей независимые составляющие по трем осям координат. Верхняя петля B препятствует перемещению в двух взаимно перпендикулярных радиальных направлениях. Мысленно освобождая дверь от верхней петли, надо приложить реакцию, имеющую две независимых составляющих по горизонтальным осям координат (поскольку ось петли совпадает с вертикалью). Чтобы изобразить реакции на рисунке, требуется задаться направлениями координатных осей. Направим ось z из нижней петли A вертикально вверх. Совместим координатную плоскость yAz с плоскостью при открытой двери. Ось y проведем из точки A параллельно нижнему краю двери. Ось x направим из точки A перпендикулярно плоскости двери внутрь автомобиля. При таком выборе осей все силы, кроме силы P давления ветра, оказываются направленными параллельно какой-либо координатной оси. Расчетная схема изображена на рис. $б$. Для большей наглядности на схеме намечены в точке C горизонтальные оси, параллельные x и y, и показаны углы, которые сила P составляет с этими осями.

Расчетная схема содержит шесть неизвестных сил – три составляющих реакции нижней петли, две составляющих реакции верхней петли и удержи-

вающую силу F. Система сил, удерживающих дверь в равновесии – произвольная пространственная. Для нее составляются шесть уравнений равновесия. Число неизвестных совпадает с числом уравнений, задача статически определима. Приступаем к составлению уравнений равновесия:

$$\begin{aligned}
&\Sigma F_{kx} = R_{Ax} + R_{Bx} + P\cos 30^\circ - F = 0,\\
&\Sigma F_{ky} = R_{Ay} + R_{By} - P\cos 60^\circ = 0,\\
&\Sigma F_{kz} = R_{Az} - Q = 0,\\
&\Sigma m_x(F_k) = -R_{By}\cdot AB - Q\cdot AN + P\cos 60^\circ\cdot AS = 0,\\
&\Sigma m_y(F_k) = B_{Bx}\cdot AB + P\cos 30^\circ\cdot CN - F\cdot DM = 0,\\
&\Sigma m_z(F_k) = -P\cos 30^\circ\cdot SC + F\cdot OD = 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Вычислим, исходя из условия задачи, значения отрезков, вошедших в уравнения моментов.

Отрезок SC равен половине ширины двери $SC = 0{,}4$ м, $CN = CK - NK = 0{,}55 - 0{,}2 = 0{,}35$ м, $AS = CN$, $DM = DL - ML = 0{,}3 - 0{,}2 = 0{,}1$ м, OD задано в условии: $OD = 0{,}65$ м. Расстояние между петлями $AB = EB - EA = 0{,}6 - 0{,}2 = 0{,}4$ м.

Подставляем значения сил и плеч в уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}
&R_{Ax} + R_{Bx} + 1{,}5\cdot 0{,}87 - F = 0,\\
&R_{Ay} + R_{By} - 1{,}5\cdot 0{,}5 = 0,\\
&R_{Az} - 2 = 0,\\
&-R_{By}\cdot 0{,}4 - 2\cdot 0{,}4 + 1{,}5\cdot 0{,}5\cdot 0{,}35 = 0,\\
&R_{Bx}\cdot 0{,}4 + 1{,}5\cdot 0{,}87\cdot 0{,}35 - F\cdot 0{,}1 = 0,\\
&-1{,}5\cdot 0{,}87\cdot 0{,}4 + F\cdot 0{,}65 = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Решаем систему (2), начиная с последнего уравнения:

$$F \approx \frac{1{,}5\cdot 0{,}87\cdot 0{,}4}{0{,}65} \approx 0{,}8 \text{ Н}.$$

Подставляя значение F в пятое уравнение системы (1), находим

$$R_{Bx} = \frac{F}{4} - 1{,}5\cdot\frac{0{,}87}{0{,}4}\cdot 0{,}35 = 0{,}2 - 1{,}14 = -0{,}94 \text{ Н}.$$

Из четвертого уравнения (2) сразу определяется

$$R_{By} = -2 + \frac{1{,}5\cdot 0{,}5\cdot 0{,}35}{0{,}4} = -2 + 0{,}66 = -1{,}34 \text{ Н}.$$

Из третьего уравнения (2) находим

$$R_{Az} = 2 \text{ Н}.$$

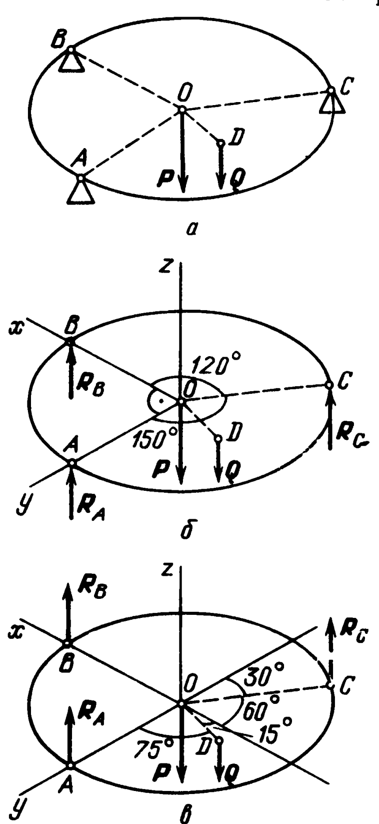
Подставим во второе уравнение системы (2) найденное значение R_{By}. Тогда

$$R_{Ay} = 1{,}5 \cdot 0{,}5 - R_{By} = 2{,}1 \text{ Н}.$$

И, наконец, из первого уравнения (2) получаем, подставив в него $R_{Bx} = -0{,}94$ Н, последнюю неизвестную силу

$$R_{Ax} = 0{,}8 + 0{,}94 - 1{,}5 \cdot 0{,}87 = 0{,}44 \text{ Н}.$$

Задача 2.11. Круглая горизонтальная плита диаметром $2r = 2$ м и весом $P = 120$ Н лежит на трех остриях, расположенных в точках A, B и C окружности плиты. Дуга AB равна 90°, дуга BC равна 120°. На плиту помещен груз весом $Q = 40$ Н. Груз лежит в точке D на биссектрисе угла COA на расстоянии 30 см от центра O плиты (рис. *а*).



К задаче 2.11

Найти давление плиты с грузом на опоры.

Р е ш е н и е. Рассмотрим равновесие плиты. К плите приложены две активные силы: сила тяжести плиты P и сила тяжести груза Q. На плиту наложены три связи – опоры в точках A, B и C. Применив аксиому освобождаемости от связей, отбросим опоры и приложим вместо них реакции R_A, R_B, R_C. Исходя из вида опор, направляем реакции перпендикулярно плоскости плиты вверх.

Теперь плита вместе с грузом может рассматриваться как свободное твердое тело, находящееся в равновесии под действием пяти сил: P, Q, R_A, R_B, R_C. Это – система параллельных сил в пространстве.

Как было указано выше в случае системы параллельных сил в пространстве, два уравнения проекций на оси, перпендикулярные силам, и одно уравнение моментов относительно оси, параллельной силам, обращаются в тождество.

За начало координат примем центр O круглой плиты (рис. *б*). Ось z направим вертикально вверх. Для координатных осей x и y на рисунке есть два удобных взаимно перпендикулярных направления – OB и OA. Направим ось x по OB, а ось y – по OA. С учетом выбранных координатных осей из шести уравнений равновесия остаются следующие три

уравнения:

$$\Sigma F_{kz} = 0, \tag{1}$$

$$\Sigma m_x(F_k) = 0, \tag{2}$$

$$\Sigma m_y(F_k) = 0. \tag{3}$$

Воспользуемся первыми двумя формулами (6*)

$$m_x = \sum_{k=1}^{n} m_x(F_k) = \sum_{k=1}^{n} (y_k F_{kz} - z_k F_{ky}),$$

$$m_y = \sum_{k=1}^{n} m_y(F_k) = \sum_{k=1}^{n} (z_k F_{kx} - x_k F_{kz}).$$

Так как все силы параллельны оси z, они имеют проекции только на ось z, а $F_{ky} = 0$ и $F_{kx} = 0$.

Формулы (6*) для сил, параллельных оси z, принимают более простой вид:

$$m_x = \sum_{k=1}^{n} m_x(F_k) = \sum_{k=1}^{n} y_k F_{kz}, \tag{4}$$

$$m_y = \sum_{k=1}^{n} m_y(F_k) = \sum_{k=1}^{n} -x_k F_{kz}. \tag{5}$$

Проведем (рис. *в*) продолжения осей x и y в сторону отрицательных осей координат и отметим на рисунке все необходимые углы. Вычислим координаты x_k, y_k точек приложения сил:

$$\begin{aligned} x_A &= 0, \quad y_A = r, \\ x_B &= r, \quad y_B = 0, \\ x_C &= -r\cos 60^\circ, \quad y_C = -r\cos 30^\circ, \\ x_D &= -OD\cdot\cos 15^\circ, \quad y_D = OD\cdot\cos 75^\circ. \end{aligned} \tag{6}$$

Подставим проекции сил на ось z и координаты точек приложения сил (6) в формулы (4) и (5). Получаем главные моменты относительно осей x и y:

$$m_x = \Sigma m_x(F_k) = -R_C r\cos 30^\circ - Q\cdot OD\cdot\cos 75^\circ + R_A r,$$

$$m_y = \Sigma m_y(F_k) = -R_B r - Q\cdot OD\cdot\cos 15^\circ + R_C r\cos 60^\circ.$$

Теперь нетрудно записать уравнения равновесия (1), (2), (3):

$$\Sigma F_{kz} = R_A + R_B + R_C - P - Q = 0, \tag{7}$$

$$\Sigma m_x(F_k) = -R_C r\cos 30^\circ - Q\cdot OD\cdot\cos 75^\circ + R_A r = 0, \tag{8}$$

$$\Sigma m_y(F_k) = -R_B r - Q\cdot OD\cdot\cos 15^\circ + R_C r\cos 60^\circ = 0. \tag{9}$$

По условию радиус круга равен 1 м, а расстояние $OD = 0{,}3$ м.

Выразим R_A из (8) и R_B из (9):

$$R_A = \frac{R_C r\cos 30^\circ + Q\cdot OD\cdot\cos 75^\circ}{r} = R_C\cdot 0{,}87 + Q\cdot 0{,}3\cdot 0{,}26, \quad (10)$$

$$R_B = \frac{R_C r\cos 60^\circ - Q\cdot OD\cdot\cos 15^\circ}{r} = R_C\cdot 0{,}5 - Q\cdot 0{,}3\cdot 0{,}96. \quad (11)$$

Подставим полученные выражения в (7):

$$R_C\cdot 0{,}87 + Q\cdot 0{,}08 + R_C\cdot 0{,}5 - Q\cdot 0{,}29 + R_C - P - Q = 0.$$

Отсюда вычисляем

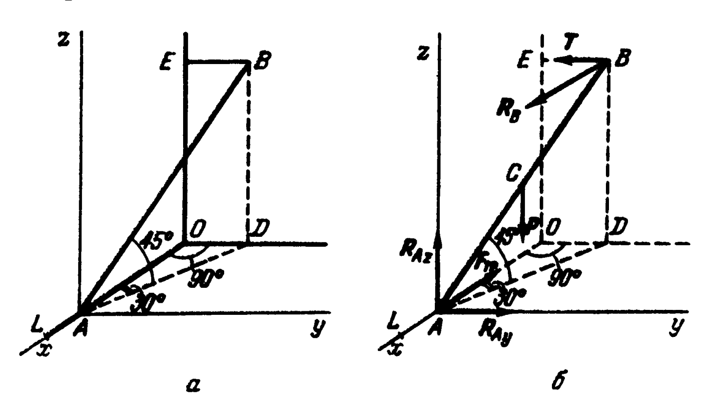
$$R_C = \frac{P + Q(1 + 0{,}29 - 0{,}08)}{1 + 0{,}866 + 0{,}5} = 71{,}17\ \text{Н}.$$

Подставим значение R_C в (10) и (11):

$$R_A = 71{,}2\cdot 0{,}87 + 40\cdot 0{,}08 = 64{,}8\ \text{Н},$$

$$R_B = 35{,}6 - 40\cdot 0{,}29 = 47{,}1\ \text{Н}.$$

Задача 2.12. Однородный стержень AB весом P, образующий с полом угол 45°, упирается концом A в негладкий плинтус комнаты (рис. *а*),



К задаче 2.12

а концом B в гладкую вертикальную стену. В точке B к стержню прикреплен горизонтальный трос BE.

Проверить, может ли стержень оставаться в равновесии, а также определить реакции плинтуса, стены и троса, если коэффициент трения скольжения о плинтус $f = 0{,}5$, а угол OAD равен 30°. Оси x, y, z изображены на рисунке.

Решение. Стержень не мог бы оставаться в равновесии, если бы плинтус был гладким. В этом случае конец стержня A начал бы скользить вдоль плинтуса. Равновесие возможно лишь при наличии силы трения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$, направленной противоположно возможному движению, т.е. от A к O, причем модуль силы трения должен быть меньше или равен его наибольшему значению

$$F_{\text{тр}} \leqslant f R_A, \tag{1}$$

где f – коэффициент трения скольжения, а R_A – модуль нормальной реакции плинтуса. В случае невыполнения условия (1) стержень придет в движение.

К стержню приложена одна активная сила – его сила тяжести $\boldsymbol{P}$ (рис. *б*). Так как по условию стена является гладкой, то ее реакция R_B перпендикулярна к плоскости стены, т.е. параллельна оси x. Реакция $\boldsymbol{T}$ троса направлена от B к E. О направлении силы трения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ было указано выше. Нормальная реакция $\boldsymbol{R}_A$ плинтуса расположена в плоскости yz, но направление ее пока неизвестно. Поэтому разложим силу $\boldsymbol{R}_A$ на две взаимно перпендикулярные составляющие R_{Ay} и $\boldsymbol{R}_{Az}$, т.е.

$$\boldsymbol{R}_A = \boldsymbol{R}_{Ay} + \boldsymbol{R}_{Az}. \tag{2}$$

Задача является статически определенной, ибо число неизвестных равно пяти: R_B, T, $F_{\text{тр}}$, R_{Ay} и R_{Az}.

Обозначив длину стержня через $2l$, составим пять уравнений равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = R_B - F_{\text{тр}} = 0, \tag{3}$$

$$\Sigma F_{ky} = R_{Ay} - T = 0, \tag{4}$$

$$\Sigma F_{kz} = R_{Az} - P = 0, \tag{5}$$

$$\Sigma m_x(\boldsymbol{F}_k) = -P \cdot l \cos 45^\circ \sin 30^\circ + T \cdot 2l \sin 45^\circ = 0, \tag{6}$$

$$\Sigma m_y(\boldsymbol{F}_k) = -P \cdot l \cos 45^\circ \cos 30^\circ + R_B \cdot 2l \sin 45^\circ = 0. \tag{7}$$

Решая систему уравнений (3)–(7), найдем R_{Az} из (5), T из (6), R_B из (7); затем получим $F_{\text{тр}}$ из (3) и R_{Ay} из (4). Итак, искомые силы по модулю равны

$$R_{Az} = P, \quad R_{Ay} = T = 0{,}25P, \quad R_B = F_{\text{тр}} = P\sqrt{3}/4 = 0{,}43P. \tag{8}$$

Остается проверить, может ли стержень оставаться в равновесии. В соответствии с формулой (2) запишем

$$R_A = \sqrt{R_{Ay}^2 + R_{Az}^2}. \tag{9}$$

Внеся значения R_{Ay} и R_{Az} из (8) в формулу (9), найдем

$$R_A = \frac{P}{4}\sqrt{17} = 1{,}04P. \tag{10}$$

Подставив в неравенство (1) значения $F_{\text{тр}}$ и R из (8) и (10), при $f = 0{,}5$ получим

$$0{,}43P < 0{,}52P.$$

Так как условие (1) выполнено, то стержень находится в равновесии.

В заключение вычислим наименьшее значение коэффициента трения скольжения f, при котором стержень будет оставаться в равновесии. Отбросив в формуле (1) знак неравенства, найдем

$$f = \frac{F_{\text{тр}}}{R_A} = \frac{0{,}43P}{1{,}04P} = 0{,}41.$$

Если бы по условию коэффициент трения скольжения был меньше чем 0,41, то стержень не мог бы остаться в равновесии и начал бы двигаться.

В этой задаче находится только наименьшее значение коэффициента трения, так как возможно только одно движение стержня, при котором точка B скользит по стене вниз, а точка A – вдоль плинтуса.

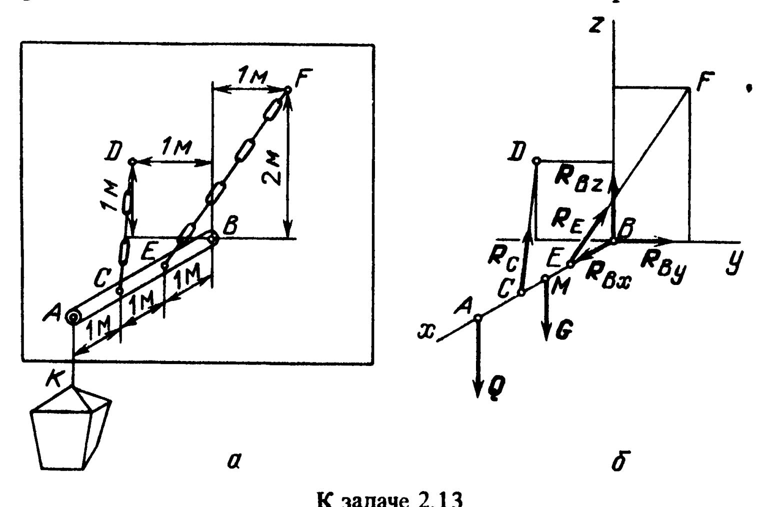
Задача 2.13. Фонарь весом Q = 48 Н подвешен на цепи AK к балке AB, имеющей вес G = 12 Н. Балка прикреплена к стене шаровым шарниром в точке B и удерживается в горизонтальном положении перпендикулярно стене с помощью двух цепей, CD и EF, показанных на рис. *а*.

Найти силы натяжения цепей CD и EF и реакцию шарнира B.

Решение. Для определения искомых реакций рассмотрим равновесие балки AB. К балке приложены две активные силы – это сила ее собственного веса G, приложенная посредине балки, и сила Q веса фонаря (точнее говоря, к балке приложена сила натяжения цепочки AK, равная весу фонаря). На балку AB наложены три связи – шаровой шарнир в точке B и две цепи, CD и EF. Применяя принцип освобождаемости, отбросим мысленно связи и заменим их действие реакциями. Шаровой шарнир препятствует перемещению точки B балки в любом из трех взаимно перпендикулярных направлений. Соответственно вместо шарнира следует приложить в точке B три составляющих реакции по трем координатным осям. Выбор системы координат подсказан самим видом конструкции, изображенной на рис. *а*. Направим ось x из точки B вдоль балки к точке A, ось z – вертикально вверх, а ось y – по стене горизонтально вправо. Реакции шарнира обозначим через R_{Bx}, R_{By}, R_{Bz} и направим, как показано на рис. *б*. Действие поддерживающих цепей заменяем двумя реакциями, приложенными к балке в точках C и E и направленными вдоль цепей. Эти реакции R_C и R_E равны силам, натягивающим цепи. На расчет-

ной схеме (рис. *б*) изображены активные силы и реакции связей, приложенные к балке AB. Пять реакций являются неизвестными.

Система семи сил, получившаяся на расчетной схеме, является произвольной пространственной системой. Заметим, что эта система обладает одной особенностью – все семь сил пересекают ось x. Следовательно, ни одна из сил не даст момента относительно оси x и одно из уравнений равновесия – уравнение моментов относительно оси x – обратится в тождество.



а *б*

К задаче 2.13

Из шести уравнений равновесия произвольной пространственной системы сил остается пять уравнений. Но и неизвестных в задаче как раз пять, так что задача статически определима.

При составлении уравнений равновесия нам понадобятся направляющие косинусы отрезков CD и EF, поэтому найдем их. Для этого составим таблицу координат точек C, D, E и F:

Точка	Координата			Точка	Координата		
	x	y	z		x	y	z
C	2	0	0	E	1	0	0
D	0	–1	1	F	0	1	2

Получим

$$\cos(\widehat{CD, Ox}) = \frac{\text{пр}_x CD}{CD} = \frac{x_D - x_C}{\sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2 + (z_D - z_C)^2}} = -\frac{2}{\sqrt{6}},$$

$$\cos(\widehat{CD, Oy}) = \frac{\text{пр}_y CD}{CD} = \frac{y_D - y_C}{\sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2 + (z_D - z_C)^2}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$\cos(\widehat{CD, Oz}) = \frac{\text{пр}_z CD}{CD} = \frac{z_D - z_C}{\sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2 + (z_D - z_C)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$\cos(\widehat{EF, Ox}) = \frac{\text{пр}_x EF}{EF} = \frac{x_F - x_E}{\sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2 + (z_F - z_E)^2}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$\cos(\widehat{EF, Oy}) = \frac{\text{пр}_y EF}{EF} = \frac{y_F - y_E}{\sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2 + (z_F - z_E)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$\cos(\widehat{EF, Oz}) = \frac{\text{пр}_z EF}{EF} = \frac{z_F - z_E}{\sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2 + (z_F - z_E)^2}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Записываем уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = 0, \quad R_C\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right) + R_E\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + R_{Bx} = 0, \qquad (1)$$

$$\Sigma F_{ky} = 0, \quad R_C\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + R_E\frac{1}{\sqrt{6}} + R_{By} = 0, \qquad (2)$$

$$\Sigma F_{kz} = 0, \quad -Q + R_C\frac{1}{\sqrt{6}} - G + R_E\frac{2}{\sqrt{6}} + R_{Bz} = 0, \qquad (3)$$

$$\Sigma m_{ky} = \Sigma(F_{kx} z_k - F_{kz} x_k) = 0,$$

или

$$Q \cdot 3 - R_C \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot 2 + G \cdot \frac{3}{2} - R_E \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot 1 = 0, \tag{4}$$

$$\Sigma m_{kz} = \Sigma (F_{ky} x_k - F_{kx} y_k) = 0,$$

или

$$R_C \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \cdot 2 + R_E \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot 1 = 0. \tag{5}$$

Последнее уравнение дает зависимость $R_E = 2R_C$, которую используем в остальных четырех уравнениях.

Из (4) получаем $R_C = (Q/2 + G/4)\sqrt{6}$. Тогда $R_E = (Q + G/2)\sqrt{6}$. До окончания решения системы удобно оставить R_C и R_E в буквенном виде. Рассматривая далее уравнения (1), (2) и (3), находим составляющие реакции шарового шарнира:

$$R_{Bx} = 2Q + G, \quad R_{By} = -\left(\frac{Q}{2} + \frac{G}{4}\right), \quad R_{Bz} = -\left(\frac{3}{2} Q + \frac{G}{4}\right).$$

Подставляя значения весов Q и G из условия задачи, получаем ответы:

$$R_{Bx} = 108 \text{ Н}, \quad R_{By} = -27 \text{ Н}, \quad R_{Bz} = -75 \text{ Н},$$
$$R_C = 66{,}1 \text{ Н}, \quad R_E = 132{,}2 \text{ Н}.$$

3. Приведение произвольной пространственной системы сил к простейшему виду. Рекомендуется выполнять в следующем порядке:

1) выбрать оси декартовых координат;

2) взять центр приведения системы сил в начале координат O;

3) вычислить проекции V_x, V_y, V_z главного вектора V системы сил по формулам (9*);

4) определить модуль главного вектора V и направляющие косинусы по формулам (10*) и (11*), причем

$$V = V_x \boldsymbol{i} + V_y \boldsymbol{j} + V_z \boldsymbol{k};$$

5) найти главные моменты m_x, m_y, m_z системы сил относительно осей x, y, z по формулам (5*), (6*);

6) определить модуль главного момента m_O и его направляющие косинусы по формулам (7*) и (8*), причем

$$m_O = m_x \boldsymbol{i} + m_y \boldsymbol{j} + m_z \boldsymbol{k};$$

7) выяснить, к какому простейшему виду приводится заданная система сил.

а) если $V = 0$ и $m_O = 0$, то система сил, приложенных к твердому телу, является уравновешивающейся;

б) если $V = 0$, $m_O \neq 0$, то система сил приводится к паре сил с моментом m_O;

в) если $V \neq 0$, $m_O = 0$, то система сил приводится к равнодействующей $R = V$. Уравнения линии действия равнодействующей в этом случае будут:

$$\frac{x}{V_x} = \frac{y}{V_y} = \frac{z}{V_z}, \tag{15*}$$

где V_x, V_y, V_z – проекции главного вектора V, определенные в третьем пункте, а x, y, z – текущие координаты линии действия равнодействующей;

г) если $V \neq 0$, $m_O \neq 0$, то следует выяснить, не являются ли V и m_O взаимно перпендикулярными.

В случае взаимной перпендикулярности V и m_O их скалярное произведение $V \cdot m_O$ равно нулю. Поэтому надо проверить, выполняется ли равенство

$$V_x m_x + V_y m_y + V_z m_z = 0.$$

Если равенство имеет место, то система сил приводится к равнодействующей R. Уравнения линии действия равнодействующей R в этом случае имеют вид

$$\frac{m_x - yV_z + zV_y}{V_x} = \frac{m_y - zV_x + xV_z}{V_y} = \frac{m_z - xV_y + yV_x}{V_z}. \tag{16*}$$

Если равенство $V_x m_x + V_y m_y + V_z m_z = 0$ не имеет места, то главный вектор V и главный момент m_O не взаимно перпендикулярны и система сил приводится к динаме. Уравнения центральной оси также определяются по формулам (16*).

Главный вектор V динамы определен в четвертом пункте. Главный момент m динамы для центров приведения, взятых на центральной оси, лежит на этой оси. Его проекцию на центральную ось (минимальный момент) следует определить по формуле

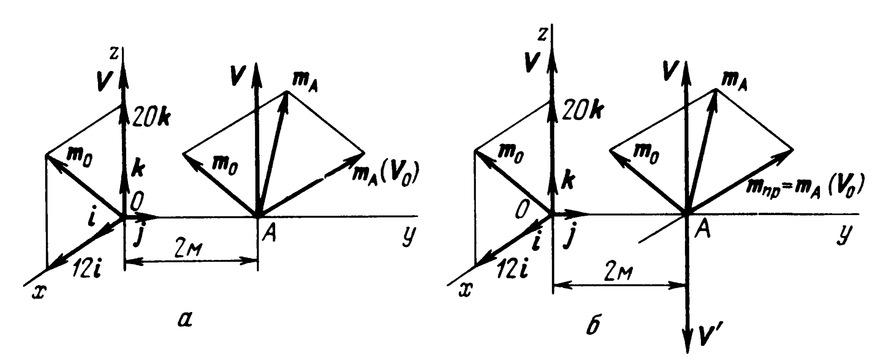
$$\text{пр}_V m = \frac{V_x m_x + V_y m_y + V_z m_z}{V}. \tag{17*}$$

При приведении пространственной системы сил к простейшему виду оси декартовых координат следует выбрать так, чтобы возможно большее число сил оказалось параллельно либо перпендикулярно к этим осям, а также чтобы линии действия сил в возможно большем числе пересекали эти координатные оси.

Приведение пространственной системы сил к простейшему виду играет большую роль в динамике твердого тела, позволяя судить по результатам приведения о характере возможного движения.

Задача 2.14. Пространственная система сил была приведена к центру O, взятому в начале координат системы xyz. В результате приведения были получены: сила $\boldsymbol{V} = 10\boldsymbol{k}$ и пара сил, момент которой векторно равен главному моменту системы $\boldsymbol{m}_O = 12\boldsymbol{i} + 20\boldsymbol{k}$, причем $[V]$ = Н, а $[m_O]$ = Н · м.

Определить силу и пару сил, к которым приведется данная система сил, если за центр приведения принять точку A, лежащую на оси y и отстоящую от начала координат на расстояние OA = 2 м (рис. *а*).



К задаче 2.14

Решение. При приведении пространственной системы сил к новому центру сила остается равной главному вектору $\boldsymbol{V}$, а главный момент меняется в соответствии с формулой

$$\boldsymbol{m}_A = \boldsymbol{m}_O + \boldsymbol{m}_A(\boldsymbol{V}_O) = \boldsymbol{m}_O + \overline{AO} \times \boldsymbol{V}_O. \qquad (1)$$

Поэтому строим в точке A силу $\boldsymbol{V}$. Затем переносим $\boldsymbol{m}_O$ в точку A и изображаем момент относительно нового центра A силы $\boldsymbol{V}$, приложенной в старом центре O, т.е. $\boldsymbol{m}_A(\boldsymbol{V}_O)$. Так как $\boldsymbol{m}_A(\boldsymbol{V}_O)$ надо направить перпендикулярно к плоскости, проходящей через $\boldsymbol{V}_O$ и точку A, т.е. к плоскости yz, и притом так, чтобы с конца его к началу казалось, что сила $\boldsymbol{V}_O$ стремится повернуть тело вокруг центра A против хода часовой стрелки, то вектор $\boldsymbol{m}_A(\boldsymbol{V}_O)$ параллелен оси x, но направлен в противоположную сторону (рис. *а*). При этом $|\boldsymbol{m}_A(\boldsymbol{V}_O)| = |\boldsymbol{V}|\,OA = 20$ Н · м.

Итак, для определения главного момента $\boldsymbol{m}_A$ относительно нового центра A надо, следуя формуле (1), сложить векторы $\boldsymbol{m}_O$ и $\boldsymbol{m}_A(\boldsymbol{V}_O)$, приложенные в точке A, т.е.

$$\boldsymbol{m}_A = \boldsymbol{m}_O + \boldsymbol{m}_A(\boldsymbol{V}_O) = 12\boldsymbol{i} + 20\boldsymbol{k} - 20\boldsymbol{i} = -8\boldsymbol{i} + 20\boldsymbol{k}.$$

На рис. *а* вектор $\boldsymbol{m}_A$ получаем как диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{m}_O$ и $\boldsymbol{m}_A(\boldsymbol{V}_O)$.

Из найденного результата $\boldsymbol{m}_A = -8\boldsymbol{i} + 20\boldsymbol{k}$ следует, что $m_{Ax} = -8$ Н · м, $m_{Ay} = 0$, $m_{Az} = 20$ Н · м. Таким образом, главный момент $\boldsymbol{m}_A$ по модулю

9 Заказ № 899

равен $m_A = \sqrt{m_{Ax}^2 + m_{Ay}^2 + m_{Az}^2} = 4\sqrt{29}$ Н · м. Направляющие косинусы определяем по формулам:

$$\cos(x,\widehat{\ } m_A) = \frac{m_{Ax}}{m_A} = -\frac{2}{\sqrt{29}} = -0{,}37,$$

$$\cos(y,\widehat{\ } m_A) = \frac{m_{Ay}}{m_A} = 0,$$

$$\cos(z,\widehat{\ } m_A) = \frac{m_{Az}}{m_A} = \frac{5}{\sqrt{29}} = 0{,}93,$$

откуда

$$(x,\widehat{\ } m_A) = 111°40', \quad (y,\widehat{\ } m_A) = 90°, \quad (z,\widehat{\ } m_A) = 21°40'.$$

Эту задачу можно решить, не прибегая к формуле (1) – зависимости между главными моментами пространственной системы сил, определенными относительно двух центров.

Можно построить в центре A две уравновешивающиеся силы V и V' (рис. *б*). Тогда сила V оказывается приведенной к центру A, но при этом добавляется присоединенная пара в составе сил: V, приложенной в точке O, и V', приложенной в точке A. Момент этой присоединенной пары $m_{пр}$ перпендикулярен к плоскости пары, т.е. к плоскости yz, причем с его конца к началу приложенная пара видна направленной против хода часовой стрелки, т.е. параллельно оси x, но в сторону, противоположную положительному направлению этой оси. По модулю $|m_{пр}| = |V| \cdot OA =$ $= 20$ Н · м. Нетрудно заметить, что $m_{пр}$ и $m_A(V_O)$ (из первого варианта решения задачи) векторно равны, т.е. $m_{пр} = m_A(V_O)$. Для определения главного момента относительно центра A остается сложить m_O и $m_{пр}$, т.е. $m_A = m_O + m_{пр} = m_O + m_A(V)$, откуда находим значение m_A, полученное в первом варианте решения задачи.

Оба метода решения задачи по объему вычислений примерно равноценны.

Задача 2.15. По ребрам прямоугольного параллелепипеда приложены силы F_1, F_2 и F_3. Модуль силы F_2 вдвое больше модуля силы F_1, а модуль силы F_3 в три раза больше модуля силы F_1.

Какое соотношение должно существовать между размерами параллелепипеда, чтобы заданная система сил могла быть приведена к равнодействующей?

Р е ш е н и е. Найдем проекции главного вектора и главного момента системы сил на оси координат, которые направляем вдоль ребер паралле-

лепипеда из вершины O так, как показано на рисунке:

$$V_x = -3F, \quad m_x = -2F \cdot b,$$
$$V_y = -F, \quad m_y = -3F \cdot c + 2F \cdot a,$$
$$V_z = -2F, \quad m_z = 0.$$

Видим, что и главный вектор и главный момент не равны нулю. В этом случае систему сил можно привести к равнодействующей, если главный вектор и главный момент перпендикулярны друг другу. Условие перпендикулярности главного вектора и главного момента:

$$V_x m_x + V_y m_y + V_z m_z = 0.$$

Подставим в это уравнение проекции главного вектора и главного момента заданной в задаче системы сил:

$$(-3F)(-2F \cdot b) + (-F)(-3F \cdot c + 2F \cdot a) + (-2F) \cdot 0 = 0.$$

Сокращая на не равную нулю величину $(F)^2$, получаем

$$6b + 3c - 2a = 0,$$

или

$$a = 1{,}5c + 3b.$$

Если размеры параллелепипеда удовлетворяют полученной зависимости, система приводится к равнодействующей.

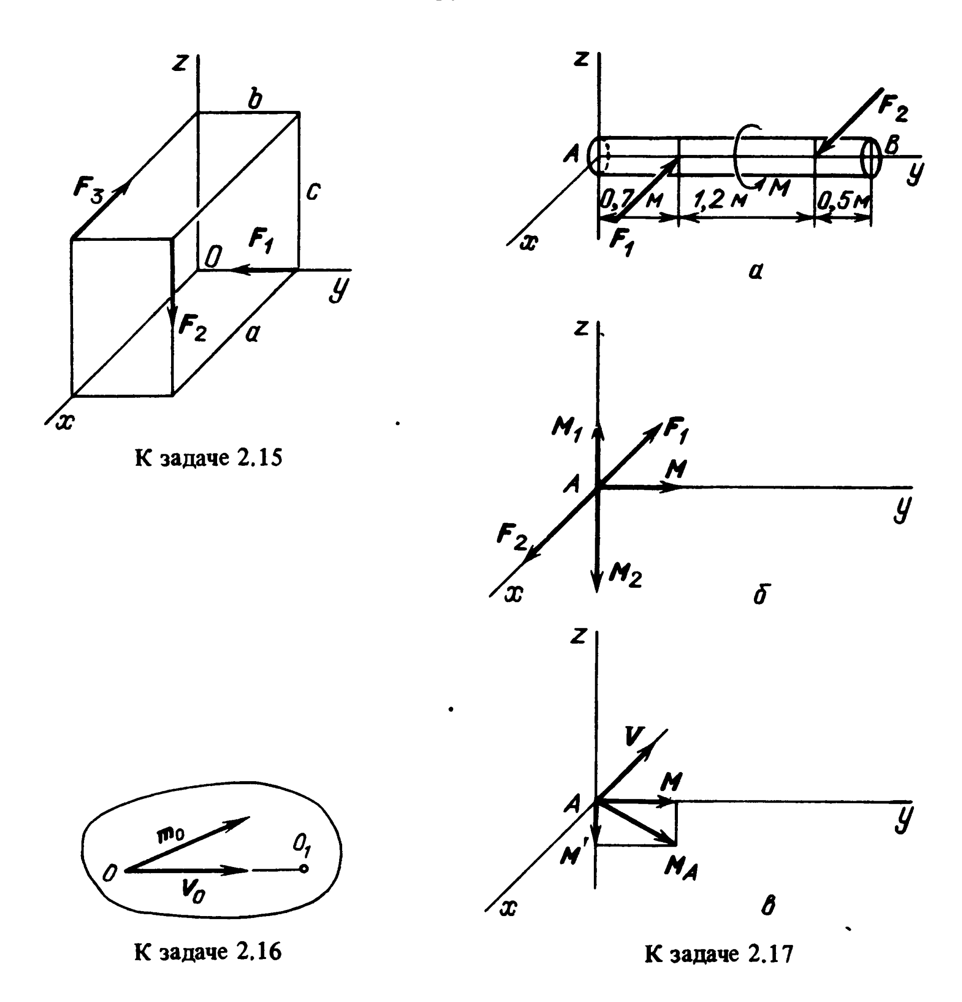
Задача 2.16. Пространственная система сил, приведенная к точке O, оказалась эквивалентной силе V_O, приложенной в центре O, и паре сил с моментом m_O, равным главному моменту системы сил (см. рис.). Как известно, при перемене центра приведения сила V, приложенная в новом центре O_1, остается неизменной, а главный момент m_{O_1}, вообще говоря, меняется.

Найти геометрическое место точек приведения системы сил, в которых m_{O_1} остается неизменным.

Р е ш е н и е. При переходе от старого центра O к новому центру O_1 главный момент меняется по формуле $m_{O_1} = m_O + m_{O_1}(V_O)$. Для того чтобы удовлетворялось равенство $m_{O_1} = m_O$, должно быть выполнено $m_{O_1}(V_O) = 0$.

Нетрудно видеть, что точка O_1 должна лежать на линии действия силы V_O. При этом момент силы V_O относительно центра O_1 оказывается равным нулю и, значит, $m_{O_1} = m_O$.

Итак, геометрическим местом точек приведения пространственной системы сил, для которых главный момент остается неизменным, является линия действия силы V_O.



К задаче 2.15

К задаче 2.16

К задаче 2.17

Задача 2.17. На балку *AB* действуют силы F_1 и F_2, параллельные оси x, и пара сил с моментом $\boldsymbol{M}$, направленным по оси y (рис. *а*).

Привести эту систему сил к простейшему виду, выбрав за центр приведения точку A; $F_1 = 50$ Н, $F_2 = 40$ Н, $M = 30$ Н · м.

Р е ш е н и е. Приведение заданной системы сил к точке A может быть сделано двумя способами.

Способ 1. На балку действуют две сосредоточенные силы F_1 и F_2. Переносим силу $\boldsymbol{F}_1$ в точку A, добавляя присоединенную пару $(\boldsymbol{F}_1, -\boldsymbol{F}_1)$, момент которой равен $M_1 = F_1 \cdot 0{,}7 = 50$ Н $\cdot$ 0,7 м $= 35$ Н $\cdot$ м. Вектор момента присоединенной пары направлен по оси z вверх. Такую же операцию проделываем с силой F_2. Сила F_2 оказывается перенесенной в точку A. Соответствующая присоединенная пара имеет момент $M_2 = F_2(0{,}7 + 1{,}2) =$ $= 40$ Н $\cdot$ 1,9 м $= 76$ Н $\cdot$ м. Вектор этого момента направлен по оси z вниз.

Заданный момент M, равный 30 Н · м, вращает вокруг оси y, направление вектора M совпадает с положительным направлением оси y.

На рис. *б* показана система сил и моментов, приведенная к точке A. Складывая силы F_1 и F_2, направленные вдоль оси x в противоположные стороны, получаем главный вектор V, равный по модулю разности F_1 и F_2, т.е. 10 Н, и направленный в сторону большей силы F_1, вдоль отрицательной оси абсцисс.

Найдем главный момент системы. Сначала сложим моменты M_1 и M_2, направленные по оси z. Получаем суммарный момент M', численно равный разности M_1 и M_2, т.е. 41 Н · м, и направленный по оси z в сторону большего момента M_2 – вниз.

Сложим теперь момент M' с заданным моментом M. Векторы их взаимно перпендикулярны. Главный момент M_A как их геометрическая сумма направлен по диагонали прямоугольника со сторонами M' и M и равен

$$M_A = \sqrt{M'^2 + M^2} = \sqrt{41^2 + 30^2} \approx 50{,}8 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Из хода построения и из рис. *в* очевидно, что главный вектор и главный момент перпендикулярны друг другу. В этом случае система может быть приведена к равнодействующей.

Отметим, что описанный графический способ приведения прост и нагляден, но практически применим лишь к самым несложным системам. В случае, когда сил и векторов много и они составляют с осями различные углы, непосредственное построение геометрических сумм – долгая и трудная работа.

Ниже решим эту же задачу аналитически. Аналитический способ приведения никак не ограничен сложностью системы сил и моментов пар.

Способ 2. Вычислим проекции главного вектора и главного момента заданной системы сил на координатные оси:

$$V_x = \Sigma F_{kx} = -F_1 + F_2 = -10 \text{ Н},$$

$$V_y = \Sigma F_{ky} = 0,$$

$$V_z = \Sigma F_{kz} = 0,$$

$$M_{Ax} = \Sigma m_x(F_k) = 0,$$

$$M_{Ay} = \Sigma m_y(F_k) = M = 30 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_{Az} = \Sigma m_z(F_k) = F_1 \cdot 0{,}7 - F_2 \cdot 1{,}9 = 50 \cdot 0{,}7 - 40 \cdot 1{,}9 =$$
$$= 35 - 76 = -41 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

По проекциям находим модули главного вектора и главного момента

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = 10 \text{ Н},$$

$$M_A = \sqrt{M_{Ax}^2 + M_{Ay}^2 + M_{Az}^2} = \sqrt{30^2 + 41^2} \approx 50{,}8 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Проверим, может ли система быть приведена к равнодействующей. Условие перпендикулярности главного вектора и главного момента выполняется – их скалярное произведение равно нулю:

$$M_A \cdot V = M_{Ax} \cdot V_x + M_{Ay} \cdot V_y + M_{Az} \cdot V_z =$$
$$= 0 \cdot (-10) + 30 \cdot 0 - 41 \cdot 0 = 0.$$

Аналитический способ полностью подтвердил результаты, полученные графически.

Задача 2.18. На рисунке изображена пирамида $AOBC$, две боковые грани которой расположены в координатных плоскостях xz и yz, а основание лежит в плоскости xy. Ребра AB и AC образуют с ребром – высотой AO – углы 30°. К пирамиде приложена система пяти сил. Силы F_1 и F_2 направлены по ребрам AB и AC, силы F_3 и F_4 – вертикальны, а линия действия силы F_5 совмещена с высотой OD основания BOC.

Определить модули сил F_3, F_4 и F_5, если пирамида находится в равновесии. Дано: $F_1 = F_2 = F$.

Р е ш е н и е. Примем за центр приведения начало координат O. При равновесии пирамиды главный вектор V и главный момент m_O системы сил, приложенных к пирамиде, равны нулю: $V = 0$, $m_O = 0$. Так как по модулю

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2},$$
$$m_O = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2},$$

то

$$V_x = V_y = V_z = 0, \quad m_x = m_y = m_z = 0. \qquad (1)$$

Вычислим проекции V_x, V_y, V_z главного вектора V по формулам

$$V_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \quad V_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}, \quad V_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}.$$

В данном случае получим

$$V_x = -F_1 \cos 60° + F_5 \cos 45°, \qquad (2)$$
$$V_y = -F_2 \cos 60° + F_5 \cos 45°, \qquad (3)$$
$$V_z = F_1 \cos 30° + F_2 \cos 30° - F_3 - F_4. \qquad (4)$$

Вычислим главные моменты m_x, m_y, m_z относительно осей x, y, z по формулам

$$m_x = \sum_{k=1}^{n} m_x(F_k), \quad m_y = \sum_{k=1}^{n} m_y(F_k), \quad m_z = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k).$$

Введя обозначения: $OB = OC = a$, для данной системы сил имеем

$$m_x = -F_4 a + F_2 a\sqrt{3}/2, \quad (5)$$

$$m_y = F_3 a - F_1 a\sqrt{3}/2, \quad (6)$$

$$m_z = 0. \quad (7)$$

Приняв во внимание условия (1), запишем (2)–(6) в виде

$$-F_1 \cos 60^\circ + F_5 \cos 45^\circ = 0, \quad (8)$$

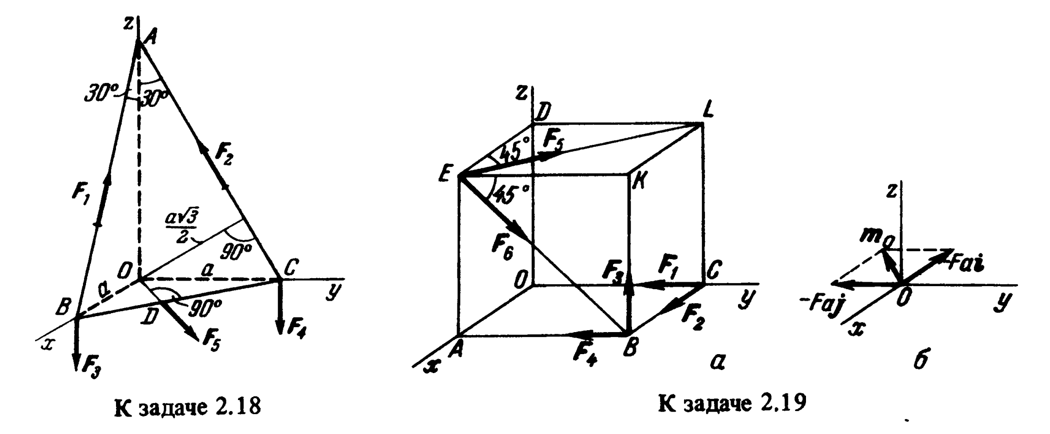
$$-F_2 \cos 60^\circ + F_5 \cos 45^\circ = 0, \quad (9)$$

$$F_1 \cos 30^\circ + F_2 \cos 30^\circ - F_3 - F_4 = 0, \quad (10)$$

$$-F_4 a + F_2 a\sqrt{3}/2 = 0, \quad (11)$$

$$F_3 a - F_1 a\sqrt{3}/2 = 0. \quad (12)$$

Так как по условию $F_1 = F_2 = F$, то из уравнений (11) и (12) находим $F_3 = F_4 = F\sqrt{3}/2$, а из уравнения (8) получим $F_5 = F\sqrt{2}/2$. При этих



К задаче 2.18

К задаче 2.19

значениях F_3, F_4 и F_5 уравнения (9) и (10) тождественно обращаются в нуль.

Итак, пирамида $AOBC$ находится в равновесии под действием данной системы пяти сил при условии

$$F_3 = F_4 = F\sqrt{3}/2, \quad F_5 = F\sqrt{2}/2.$$

Способ, примененный в этой задаче, позволяет вычислить силы, которые необходимо добавить к действующей пространственной системе сил, чтобы ее уравновесить.

Задача 2.19. Привести к простейшему виду систему сил F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 и F_6, приложенных к вершинам C, B и E куба, ребро которого

равно a; $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F$; $F_5 = F_6 = F\sqrt{2}$. Направления сил указаны на рис. *а*.

Решение. Принимаем за центр приведения точку O. Направляем оси x, y, z вдоль ребер куба (рис. *а*). Определим проекции V_x, V_y, V_z главного вектора V на оси x, y, z:

$$V_x = \Sigma F_{kx} = F_2 - F_5 \cos 45°,$$
$$V_y = \Sigma F_{ky} = -F_1 - F_4 + F_5 \cos 45° + F_6 \cos 45°,$$
$$V_z = \Sigma F_{kz} = F_3 - F_6 \cos 45°.$$

Подставив значения модулей данных сил, имеем

$$V_x = V_y = V_z = 0.$$

Следовательно, главный вектор V системы сил равен нулю.

Переходим к определению главного момента $\boldsymbol{m}_O$. Находим сначала главные моменты m_x, m_y, m_z системы сил относительно осей x, y, z:

$$m_x = \Sigma m_x(\boldsymbol{F}_k) = F_3 a - F_5 a \cos 45° - F_6 a \cos 45°,$$
$$m_y = \Sigma m_y(\boldsymbol{F}_k) = -F_3 a - F_5 a \cos 45° + F_6 a \cos 45°,$$
$$m_z = \Sigma m_z(\boldsymbol{F}_k) = -F_2 a - F_4 a + F_6 a \cos 45° + F_5 a \cos 45°.$$

Подставив значения модулей данных сил, имеем

$$m_x = -Fa, \quad m_y = -Fa, \quad m_z = 0.$$

Таким образом, главный момент $\boldsymbol{m}_O = -Fa\boldsymbol{i} - Fa\boldsymbol{j}$, а его модуль $m_O = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} = Fa\sqrt{2}$.

Итак, данная система сил оказалась приведенной к силе $V = 0$ и паре сил с моментом $\boldsymbol{m}_O = -Fa\boldsymbol{i} - Fa\boldsymbol{j}$, изображенным на рис. *б* (пара сил расположена в плоскости, перпендикулярной к $\boldsymbol{m}_O$, так, что пара с конца $\boldsymbol{m}_O$ к его началу видна направленной против хода часовой стрелки).

Задача 2.20. Привести к простейшему виду систему сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$, $\boldsymbol{F}_4$ и $\boldsymbol{F}_5$, приложенных в вершинах A, K и C прямоугольного параллелепипеда $OABCDEKL$;

$$F_1 = F_3 = F_4 = F_5 = F,$$
$$F_2 = 2F, \quad OC = a, \quad OA = a/2.$$

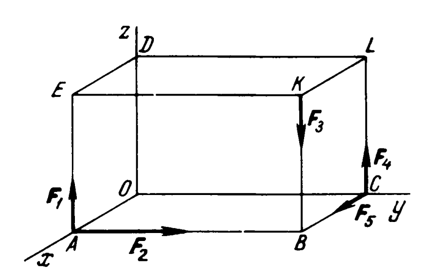
Решение. Принимаем за центр приведения точку O. Определяем проекции V_x, V_y, V_z главного вектора V на оси x, y, z:

$$V_x = \Sigma F_{kx} = F_5, \quad V_y = \Sigma F_{ky} = F_2,$$
$$V_z = \Sigma F_{kz} = F_1 - F_3 + F_4.$$

Подставив значения модулей сил, получим

$$V_x = F, \quad V_y = 2F, \quad V_z = F. \qquad (1)$$

Таким образом, главный вектор $V = Fi + 2Fj + Fk$, а его модуль $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{6}F$.



К задаче 2.20

Найдем теперь главные моменты m_x, m_y, m_z данной системы сил относительно осей x, y, z:

$$m_x = -F_3 a + F_4 a, \quad m_y = F_3 \frac{a}{2} - F_1 \frac{a}{2}, \quad m_z = F_2 \frac{a}{2} - F_5 a,$$

или, подставив значения модулей сил, имеем

$$m_x = 0, \quad m_y = 0, \quad m_z = 0.$$

Следовательно, главный момент m_O относительно центра O равен нулю.

Так как главный момент системы оказался равным нулю, то сила V является равнодействующей R, т.е. система сил приводится к равнодействующей, линия действия которой проходит через точку O, причем $R = V = \sqrt{6}F$.

Теперь найдем уравнения линии действия равнодействующей по формуле (15*). Воспользовавшись формулами (1), получим уравнение линии действия равнодействующей в виде

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}.$$

Задача 2.21. Привести к простейшему виду систему сил, изображенных на рис. *а*. Силы приложены к вершинам куба, ребро которого равно a; $F_1 = F_2 = F_3 = F, F_4 = F_5 = 2F$.

Р е ш е н и е. Принимаем за центр приведения точку O. Оси декартовых координат x, y, z изображены на рис. *а*. Определяем проекции V_x, V_y, V_z

главного вектора V на оси x, y, z:

$$V_x = \Sigma F_{kx} = F_1 - F_2, \quad V_y = \Sigma F_{ky} = 0,$$
$$V_z = \Sigma F_{kz} = -F_3 - F_4 + F_5.$$

Подставив значения модулей данных сил, имеем

$$V_x = 0, \quad V_y = 0, \quad V_z = -F, \tag{1}$$

откуда главный вектор

$$V = -Fk, \tag{2}$$

а его модуль

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = F. \tag{3}$$

Определяем главные моменты m_x, m_y, m_z системы сил относительно осей x, y, z:

$$m_x = \Sigma m_x(F_k) = -F_4 a + F_5 a,$$
$$m_y = \Sigma m_y(F_k) = -F_2 a + F_4 a, \quad m_z = \Sigma m_z(F_k) = 0.$$

Подставив значения модулей данных сил, получим

$$m_x = 0, \quad m_y = Fa, \quad m_z = 0. \tag{4}$$

Следовательно, главный момент относительно центра O

$$m_O = Faj, \tag{5}$$

а его модуль

$$m_O = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} = Fa. \tag{6}$$

В соответствии с формулами (2) и (5) на рис. *б* изображены главный вектор – сила V и главный момент m_O системы сил.

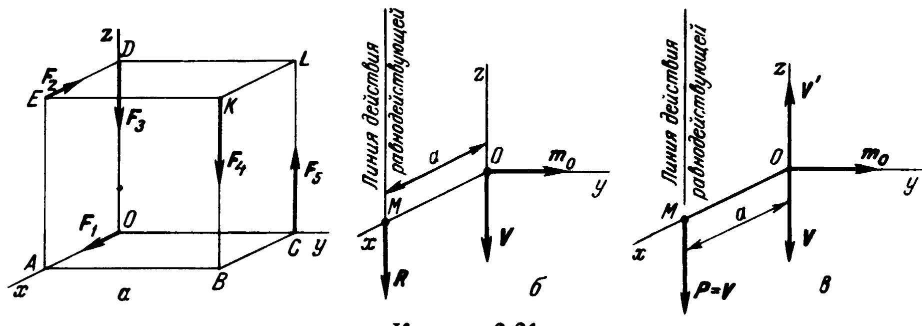
Так как V и m_O оказались взаимно перпендикулярными, то систему сил можно привести к равнодействующей R, причем $R = V$. Найдем уравнения линии действия равнодействующей по формулам (16*). Воспользовавшись формулами (1) и (4), запишем (16*) в виде

$$\frac{y}{0} = \frac{a-x}{0} = \frac{0}{F}, \tag{7}$$

откуда $x = a$, $y = 0$, т.е. линия действия равнодействующей $R = -Fk$ лежит в плоскости xz, параллельна оси z и отстоит от нее на расстояние $x = a$ (рис. *б*).

Положение линии действия равнодействующей R можно было определить, не пользуясь уравнением (7). На рис. *в* изображены сила V и главный момент m_O, приложенные в точке O. Так как главный момент m_O

лежит на оси y, то пара сил, соответствующая главному моменту m_O, расположена в плоскости, перпендикулярной к m_O, т.е. в плоскости xz так, что с конца m_O к его началу пара видна направленной против хода часовой стрелки. Одну из сил V', входящих в состав пары, изображаем противоположно V, причем $V' = -V$. Тогда линия действия второй силы V, входящей в состав пары сил, должна отстоять от линии действия первой силы



К задаче 2.21

на расстояние $OM = m_0/V$. Так как $m_O = Fa$, а $V = F$, то $OM = a$. Итак, система сил оказалась приведенной к трем силам: силам V и V', приложенным в точке O, и силе V, приложенной в точке M. Первые две силы уравновешиваются, и их можно отбросить. Поэтому система сил приводится к одной силе V, приложенной в точке M, которая, следовательно, является равнодействующей R. Линия действия равнодействующей R параллельна оси z и отстоит от нее на расстояние $OM = a$ (рис. *в*).

Следует иметь в виду, что общим приемом определения уравнений линии действия равнодействующей R является применение формулы (7).

Задача 2.22. Привести к простейшему виду систему, состоящую из двух непересекающихся и непараллельных сил F_1 и F_2, изображенных на рис. *а*; $F_1 = F_2 = F$, $OA = a$. Сила F_2 параллельна оси Ox.

Решение. Принимаем за центр приведения точку O. Подобно решению предыдущих задач, определяем проекции V_x, V_y, V_z главного вектора V на оси x, y, z:

$$V_x = \Sigma F_{kx} = F_2, \quad V_y = \Sigma F_{ky} = 0, \quad V_z = \Sigma F_{kz} = -F_1. \tag{1}$$

Учитывая, что $|F_1| = |F_2| = |F|$, имеем

$$V_x = F, \quad V_y = 0, \quad V_z = -F. \tag{2}$$

Таким образом, главный вектор

$$V = Fi - Fk, \tag{3}$$

а его модуль

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = F\sqrt{2}. \tag{4}$$

Найдем теперь главные моменты m_x, m_y, m_z системы сил относительно осей x, y, z:

$$m_x = \Sigma m_x(F_k) = 0,$$
$$m_y = \Sigma m_y(F_k) = 0, \tag{5}$$
$$m_z = \Sigma m_z(F_k) = -F_2 a.$$

Так как $|F_2| = F$, то

$$m_x = 0, \quad m_y = 0, \quad m_z = -Fa. \tag{6}$$

Таким образом, главный момент

$$\boldsymbol{m}_O = -Fa\boldsymbol{k}, \tag{7}$$

а его модуль

$$m_O = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} = Fa. \tag{8}$$

Итак, система непересекающихся и непараллельных сил приведена к изображенным на рис. *б* силе $V = F\boldsymbol{i} - F\boldsymbol{k}$ и паре сил, момент которой равен главному моменту относительно центра O, т.е. $\boldsymbol{m}_O = -Fa\boldsymbol{k}$.

В данном случае отсутствие перпендикулярности векторов V и $\boldsymbol{m}_O$ очевидно. В более сложных задачах можно воспользоваться скалярным произведением $V \cdot \boldsymbol{m}_O = V_x m_x + V_y m_y + V_z m_z$, которое в случае взаимной перпендикулярности векторов V и $\boldsymbol{m}_O$ должно обратиться в нуль. В нашей задаче, воспользовавшись формулами (2) и (6), получим $V \cdot \boldsymbol{m}_O = F^2 a$. Итак, векторы V и $\boldsymbol{m}_O$ не взаимно перпендикулярны. Это значит, что система сил приводится к динаме.

Найдем уравнения центральной оси по формуле (16*). Эти уравнения в данном случае, если принять во внимание формулы (2) и (6), имеют вид

$$\frac{y}{1} = \frac{-z - x}{0} = \frac{a - y}{1}, \quad \text{или} \quad y = \frac{a}{2} \ \text{и} \ z = -x. \tag{9}$$

Таким образом, центральная ось лежит в плоскости, параллельной координатной плоскости xz, отстоит от нее на расстояние $a/2$ и параллельна биссектрисе MN.

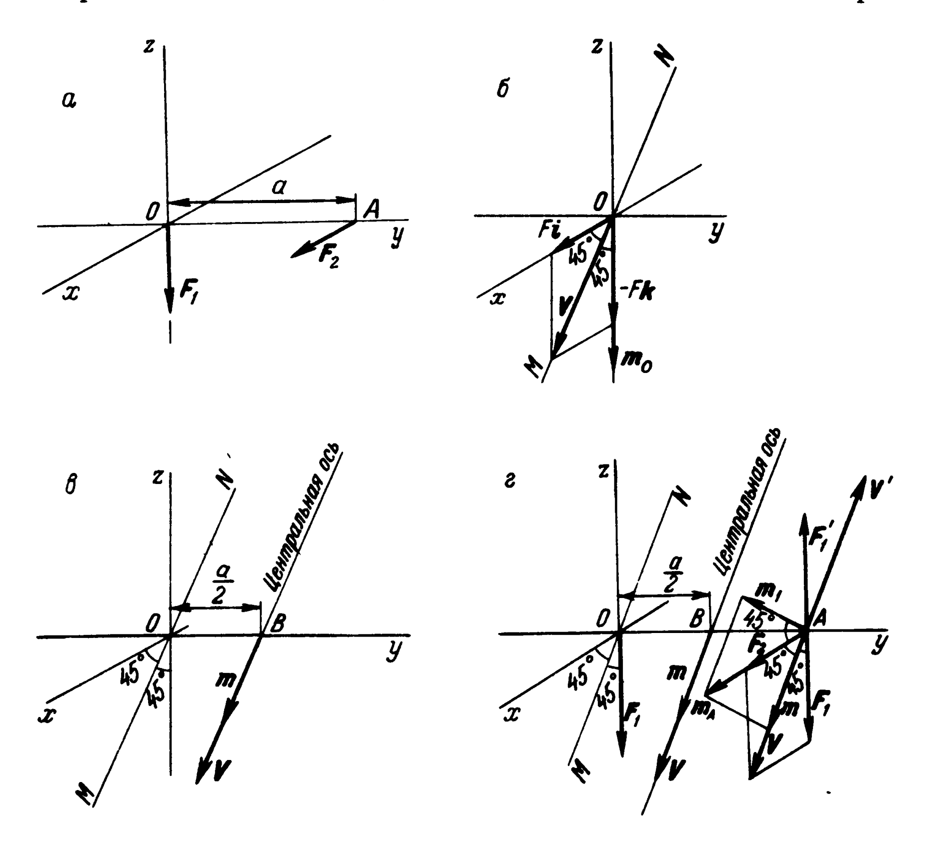
Остается определить главный момент $\boldsymbol{m}$ относительно центров приведения, лежащих на центральной оси. Как известно, вектор $\boldsymbol{m}$ лежит на центральной оси. Его проекция на направление главного вектора определяется по формуле (17*).

Использовав равенства (2), (4) и (6), получим

$$\text{пр}_V \boldsymbol{m} = Fa\sqrt{2}/2. \tag{10}$$

Главный момент $\boldsymbol{m}$ изображен на рис. *в*.

Итак, данная система непересекающихся и непараллельных сил оказалась приведенной к динаме, т.е. к силе $V = Fi - Fk$ и паре сил,



К задаче 2.22

расположенной в плоскости, перпендикулярной к V. Проекция момента $\boldsymbol{m}$ этой пары на направление главного вектора V (минимальный момент) определяется формулой (10).

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 7.1, 7.3, 7.5, 7.6, 7.9, 7.10.

§ 3. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Дана система параллельных сил $F_1, F_2, \ldots, F_n$, которые приводятся к равнодействующей. Будем считать точки приложения сил фиксированными.

Центром параллельных сил называется точка приложения равнодействующей силы, обладающая тем свойством, что при повороте всех параллельных сил на один угол, с сохранением их параллельности, равнодействующая поворачивается вокруг центра параллельных сил C на тот же угол.

Координаты центра параллельных сил даются формулами

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} (\pm F_k x_k)}{\sum_{k=1}^{n} (\pm F_k)}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} (\pm F_k y_k)}{\sum_{k=1}^{n} (\pm F_k)}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} (\pm F_k z_k)}{\sum_{k=1}^{n} (\pm F_k)},$$

здесь x_k, y_k, z_k — координаты точки приложения силы F_k, где $k = 1, 2, \ldots, n$. В этих формулах F_k — модуль силы, а $\pm F_k$ — проекция силы F_k на ось, параллельную силам. При этом проекция силы считается положительной, если направления силы F_k и параллельной оси совпадают, и отрицательной, если направления силы F_k и параллельной оси противоположны.

Если твердое тело находится вблизи поверхности земли, то к каждой материальной частице этого тела приложена сила тяжести (считаем, что материальные частицы распределены в твердом теле непрерывно). Эти силы тяжести приближенно образуют систему параллельных сил (линии действия сил тяжести двух материальных частиц, лежащих на земной поверхности и отстоящих друг от друга на расстояние 31 м, образуют угол, равный одной секунде).

Центр параллельных сил тяжести $P_1, P_2, \ldots, P_n$ называется *центром тяжести C* твердого тела, а сумма сил тяжести всех его материальных частиц называется *весом P* твердого тела:

$$P = \sum_{k=1}^{n} P_k.$$

Координаты x_C, y_C, z_C центра тяжести C твердого тела даются приближенными формулами:

$$x_C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^{n} P_k x_k, \quad y_C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^{n} P_k y_k, \quad z_C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^{n} P_k z_k.$$

Эти формулы являются приближенными, так как координаты x_k, y_k, z_k точки приложения силы тяжести P_k k-й материальной частицы определяются с точностью до размеров этой частицы.

Положение центра тяжести C твердого тела по отношению к его материальным частицам не зависит от положения твердого тела.

1. Центр тяжести однородного твердого тела. Рассмотрим сначала однородные твердые тела, для которых удельный вес всех их материальных частиц постоянен.

Координаты x_C, y_C, z_C центра тяжести C однородного тела приближенно имеют вид

$$x_C = \frac{1}{V}\sum_{k=1}^{n} x_k \Delta v_k, \quad y_C = \frac{1}{V}\sum_{k=1}^{n} y_k \Delta v_k, \quad z_C = \frac{1}{V}\sum_{k=1}^{n} z_k \Delta v_k. \qquad (1^*)$$

Здесь Δv_k — объем k-й материальной частицы, x_k, y_k, z_k — координаты точки приложения силы тяжести этой частицы, V — объем твердого тела: $V = \sum_{k=1}^{n} \Delta v_k$. Для повышения точности результата подсчета следует разбивать твердое тело на материальные частицы возможно меньшего объема.

Координаты x_C, y_C, z_C центра тяжести C однородной поверхности приближенно даются формулами

$$x_C = \frac{1}{S}\sum_{k=1}^{n} x_k \Delta s_k, \quad y_C = \frac{1}{S}\sum_{k=1}^{n} y_k \Delta s_k, \quad z_C = \frac{1}{S}\sum_{k=1}^{n} z_k \Delta s_k. \qquad (2^*)$$

Здесь Δs_k — площадь поверхности k-й материальной частицы, x_k, y_k, z_k —

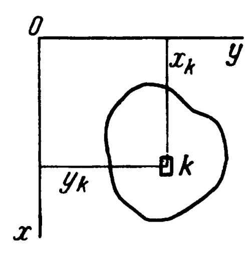


Рис. 2.14

координаты точки приложения силы тяжести этой частицы, S — площадь поверхности твердого тела:

$$S = \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k.$$

В случае однородной пластинки, расположенной в плоскости xy (рис. 2.14), формулы (2*) принимают вид

$$x_C = \frac{1}{S}\sum_{k=1}^{n} x_k \Delta s_k, \quad y_C = \frac{1}{S}\sum_{k=1}^{n} y_k \Delta s_k, \quad z_C = 0. \qquad (3^*)$$

Здесь суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \Delta s_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} y_k \Delta s_k$ называются *статическими моментами площади*: $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \Delta s_k = Ms_y$ — статический момент площади однородной плоской фигуры относительно оси y, $\sum\limits_{k=1}^{n} y_k \Delta s_k = Ms_x$ — статический момент площади однородной плоской фигуры относительно оси x.

Если центр тяжести C однородной плоской фигуры лежит на некоторой оси, то статический момент площади относительно этой оси равен нулю. Например, если центр тяжести C лежит на оси x, то

$$Ms_x = \sum_{k=1}^{n} y_k \Delta s_k = 0.$$

Координаты x_C, y_C, z_C центра тяжести C однородной линии приближенно имеют вид

$$x_C = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{n} x_k \Delta l_k, \quad y_C = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{n} y_k \Delta l_k, \quad z_C = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{n} z_k \Delta l_k. \qquad (4^*)$$

Здесь Δl_k — длина k-й материальной частицы, x_k, y_k, z_k — координаты точки приложения силы тяжести этой частицы, L — длина тела (например, проволоки): $L = \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta l_k$; в случае плоской кривой, лежащей в плоскости xy, координата $z_C = 0$.

В тех случаях, когда объемы, площади или длины каждой частицы, а также их центры тяжести могут быть определены точно, формулы (1*), (2*), (3*) дают не приближенные, а точные значения координат центра тяжести всего тела. Если же упомянутые выше величины не могут быть определены точно, то читатель, владеющий методами интегрального исчисления, может вместо приближенных формул (1*), (2*), (3*) и (4*) пользоваться точными формулами:

а) в случае однородного твердого тела

$$x_C = \frac{1}{V} \int\limits_{(V)} x\, dv, \quad y_C = \frac{1}{V} \int\limits_{(V)} y\, dv, \quad z_C = \frac{1}{V} \int\limits_{(V)} z\, dv, \qquad (5^*)$$

где $V = \int\limits_{(V)} dv$ (интегрирование распространено по всему объему твердого тела);

б) в случае однородной поверхности

$$x_C = \frac{1}{S} \int\limits_{(S)} x\, ds, \quad y_C = \frac{1}{S} \int\limits_{(S)} y\, ds, \quad z_C = \frac{1}{S} \int\limits_{(S)} z\, ds, \qquad (6^*)$$

где $S = \int\limits_{(S)} ds$ (интегрирование распространено по всей поверхности твердого тела);

в) в случае однородной плоской фигуры, лежащей в плоскости xy,

$$x_C = \frac{1}{S} \int\limits_{(S)} x\,ds, \quad y_C = \frac{1}{S} \int\limits_{(S)} y\,ds, \quad z_C = 0; \tag{7*}$$

г) в случае однородной линии

$$x_C = \frac{1}{L} \int\limits_{(L)} x\,dl, \quad y_C = \frac{1}{L} \int\limits_{(L)} y\,dl, \quad z_C = \frac{1}{L} \int\limits_{(L)} z\,dl, \tag{8*}$$

где $L = \int\limits_{(L)} dl$ (интегрирование распространено по всей длине тела).

Если линия является плоской и лежит в плоскости xy, то $z_C = 0$.

Если в однородном твердом теле имеется плоскость симметрии, то центр тяжести C лежит в этой плоскости. Если же в теле имеется ось симметрии, то центр тяжести C лежит на этой оси.

Иногда для определения положений центров тяжести линий и площадей плоских фигур пользуются *теоремами Гульдина.*

Первая теорема Гульдина. Площадь боковой поверхности тела вращения (рис. 2.15), описанной плоской кривой (AB), вращающейся вокруг оси (y), расположенной в плоскости кривой и ее не пересекающей, равна

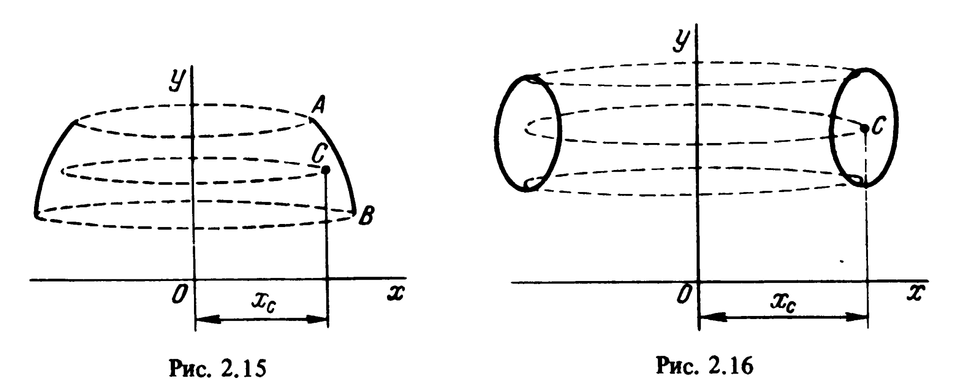


Рис. 2.15 Рис. 2.16

произведению длины кривой L на длину окружности $2\pi x_C$, описываемой центром тяжести C кривой: $S = 2\pi x_C L$.

Вторая теорема Гульдина. Объем тела вращения (рис. 2.16), описанного плоской фигурой, вращающейся вокруг оси (y), расположенной в плоскости этой фигуры и не пересекающей ее контура, равен произведению площади фигуры S на длину окружности $2\pi x_C$, описанной ее центром тяжести C, т.е. $V = 2\pi x_C S$.

Указание. Теоремами Гульдина удобно пользоваться в тех случаях, когда в число данных и неизвестных входят:

а) длина вращаемой кривой, расстояние от центра тяжести этой кривой до оси вращения и площадь поверхности вращения, описанной кривой (первая теорема Гульдина);

б) площадь вращаемой плоской фигуры, расстояние от центра тяжести плоской фигуры до оси вращения и объем тела вращения, описанного этой плоской фигурой (вторая теорема Гульдина).

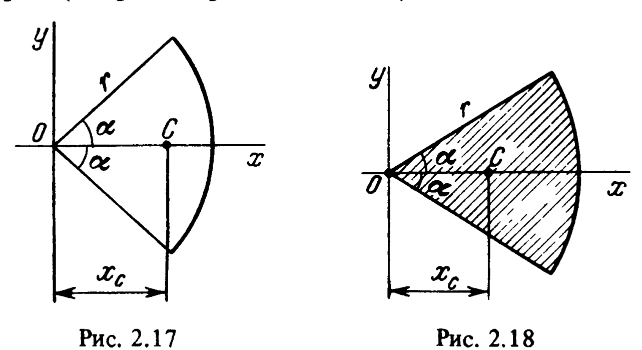


Рис. 2.17 Рис. 2.18

Сочинение Гульдина (1577–1643) "De centro gravitatis" ("О центре тяжести") было опубликовано в 1635 г. Однако эти теоремы были сформулированы еще в III веке нашей эры Паппом Александрийским. Поэтому их иногда называют теоремами Паппа.

Положения центров тяжести некоторых твердых тел простейшей геометрической формы:

а) центр тяжести площади однородного прямоугольника расположен в точке пересечения его диагоналей;

б) центр тяжести площади однородного треугольника находится в точке пересечения его медиан;

в) центр тяжести дуги однородной окружности (рис. 2.17) находится на оси симметрии, и его положение определяется координатами: $x_C = r\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$, $y_C = 0$, где r – радиус окружности, α – половина центрального угла;

г) центр тяжести площади однородного кругового сектора (рис. 2.18) расположен на оси симметрии и имеет координаты: $x_C = \dfrac{2}{3}r\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$, $y_C = 0$, где r – радиус окружности, α – половина центрального угла;

д) центр тяжести C однородной призмы находится в середине отрезка, соединяющего центры тяжести C_1 и C_2 верхнего и нижнего оснований этой призмы (рис. 2.19), т.е. $C_1C = CC_2$;

е) центр тяжести однородной пирамиды лежит на отрезке, соединяющем вершину O пирамиды с центром тяжести C_1 ее основания, на расстоянии 1/4 этого отрезка OC_1 от центра тяжести C_1 основания пирамиды (рис. 2.20), т.е. $CC_1 = ¼\, OC_1$;

ж) центр тяжести однородного кругового конуса лежит на его высоте и отстоит на расстояние 1/4 высоты от основания конуса (рис. 2.21), т.е. $AC = ¼OA$.

При решении задач на определение положения центра тяжести однородного твердого тела существенную роль играет удачный выбор осей координат.

Если в твердом теле имеется плоскость симметрии, то одну из осей координат, например z, следует направить перпендикулярно к этой плоскости. Так как центр тяжести лежит в плоскости симметрии, т.е. в плоскости xy, то $z_C = 0$ и остается определить только две координаты: x_C и y_C.

Если в твердом теле имеется ось симметрии, то одну из координатных осей, например x, следует совместить с осью симметрии. Так как центр тяжести лежит на оси симметрии, т.е. на оси x, то $y_C = z_C = 0$ и остается определить только одну координату x_C.

Наиболее распространенным приемом использования формул (1*), (2*), (3*) или (4*) является мысленная *разбивка однородного твердого тела на такие части, положение центра тяжести каждой из которых известно либо легко может быть определено.*

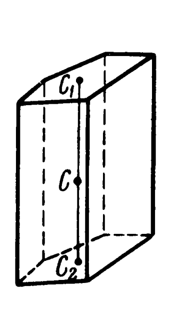




Рис. 2.19

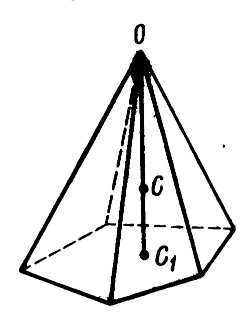


Рис. 2.20

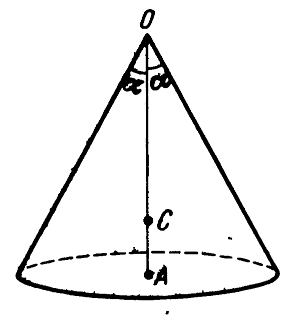


Рис. 2.21

Так, например, при разбивке площади однородной плоской фигуры, изображенной на рис. 2.22, на три части положение ее центра тяжести $C(x_C, y_C, z_C)$ определяется по формулам (3*)

$$x_C = \frac{x_1 \Delta s_1 + x_2 \Delta s_2 + x_3 \Delta s_3}{\Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3}, \quad y_C = \frac{y_1 \Delta s_1 + y_2 \Delta s_2 + y_3 \Delta s_3}{\Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3}, \quad z_C = 0;$$

здесь x_1, y_1, z_1 – координаты центра тяжести C_1 первой части плоской фигуры; Δs_1 – площадь первой части и т.д.

В некоторых случаях целесообразно заменить твердое тело не суммой, а разностью отдельных его частей. Так, например, в случае пластинки с двумя вырезами, изображенной на рис. 2.23, ее площадь можно записать в виде разности площадей сплошной плоской фигуры *1* и двух вырезов *2* и *3*, т.е. $S = \Delta s_1 - \Delta s_2 - \Delta s_3$. В этом случае положение центра

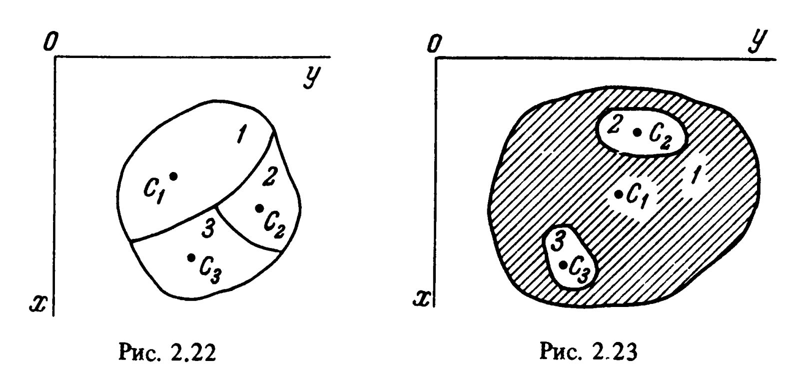


Рис. 2.22 Рис. 2.23

тяжести $C(x_C, y_C, z_C)$ однородной плоской фигуры определяется по формулам

$$x_C = \frac{x_1 \Delta s_1 - x_2 \Delta s_2 - x_3 \Delta s_3}{\Delta s_1 - \Delta s_2 - \Delta s_3}, \quad y_C = \frac{y_1 \Delta s_1 - y_2 \Delta s_2 - y_3 \Delta s_3}{\Delta s_1 - \Delta s_2 - \Delta s_3}, \quad z_C = 0;$$

здесь x_1, y_1, z_1 — координаты центра тяжести C_1 сплошной плоской фигуры *1*, площадь которой равна Δs_1; x_2, y_2, z_2 — координаты центра тяжести C_2 выреза *2*, площадь которого равна Δs_2, и т.д.

Следует иметь в виду, что прием разбивки однородного твердого тела на отдельные части приводит при использовании формул (1*), (2*), (3*) или (4*) к точному результату только в том случае, когда координаты центров тяжести отдельных частей, а также их площади (либо объемы, либо длины) могут быть точно определены. Поэтому в случаях твердых фигур с криволинейными контурами или твердых тел с поверхностями сложной формы точность результатов оказывается недостаточной (для повышения точности результата приходится разбивать тело на большее число частей, что усложняет решение задачи) и рекомендуется применять точные формулы (5*), (6*), (7*) или (8*).

Задача 2.23. Определить положение центра тяжести C однородного проволочного контура $OABD$, состоящего из двух прямолинейных отрезков $OA = OD = a$, расположенных под углом 60° друг к другу ($\angle AOD = 60°$), и полуокружности ABD диаметром AD (рис. *а*).

Решение. Проволочный контур имеет ось симметрии, вдоль которой мы проводим ось x. Взяв начало координат в точке O, направляем ось y по вертикали вверх.

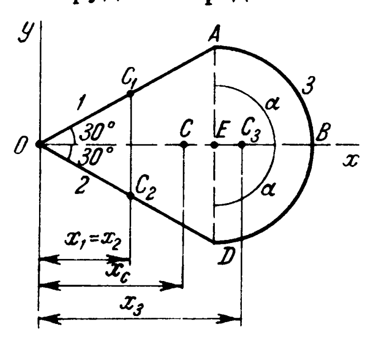
Так как центр тяжести C контура лежит на оси симметрии x, то $y_C = 0$. Для определения координаты x_C воспользуемся формулой (4*):

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k \Delta l_k}{L}. \qquad (1)$$

В данном случае целесообразно разбить весь проволочный контур на три части: два прямолинейных отрезка OA и OD длиной a каждый и полуокружность ABD радиусом

$r = AE = OA \sin 30^\circ = a \cdot 0{,}5 = a/2.$

Такая разбивка является удобной, так как положения центров тяжести каждой из этих частей нетрудно определить. Обозначим отрезок OA



К задаче 2.23

номером *1*, отрезок OD – номером *2*, полуокружность ABD – номером *3*. Тогда формулу (1) можно записать в виде

$$x_C = \frac{x_1 \Delta l_1 + x_2 \Delta l_2 + x_3 \Delta l_3}{\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3}, \qquad (2)$$

где x_1, x_2 – абсциссы центров тяжести C_1 и C_2 отрезков OA и OD, x_3 – абсцисса центра тяжести C_3 полуокружности ABD, а Δl_1, Δl_2, Δl_3 – длины этих частей проволочного контура. Как видно из рисунка,

$$x_1 = x_2 = \frac{OA}{2} \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}. \qquad (3)$$

Для определения x_3 воспользуемся тем, что расстояние EC_3 от центра окружности до центра тяжести дуги C_3 определяется формулой

$$EC_3 = r\frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

В данном случае $\alpha = \pi/2$ и, следовательно, так как $r = a/2$, имеем $EC_3 = a/\pi$. Поэтому

$$x_3 = OE + EC_3 = OA\cos 30^\circ + \frac{a}{\pi} = \frac{2 + \pi\sqrt{3}}{2\pi}a. \tag{4}$$

Кроме того, имеем

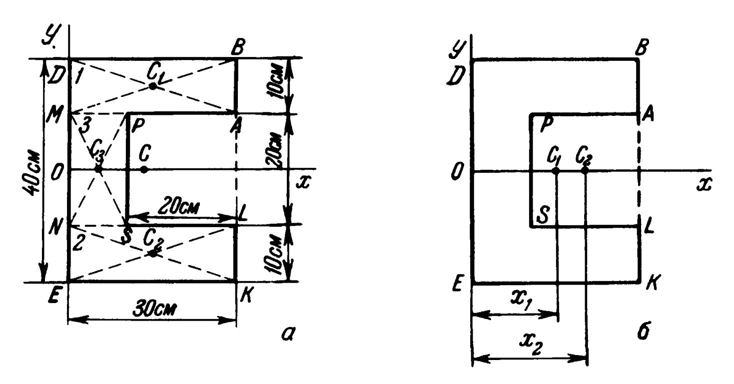
$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = a, \quad \Delta l_3 = \frac{\pi a}{2}. \tag{5}$$

Подставив (3), (4) и (5) в формулу (2), получим

$$x_C = \frac{\dfrac{a\sqrt{3}}{4}a + \dfrac{a\sqrt{3}}{4}a + \dfrac{2+\pi\sqrt{3}}{2\pi}a\,\dfrac{\pi a}{2}}{a + a + \dfrac{\pi a}{2}} = \frac{2\sqrt{3} + 2 + \pi\sqrt{3}}{2(4+\pi)}a = 0{,}76a.$$

Итак, центр тяжести проволочного контура $OABD$ находится в точке C с координатами: $x_C = 0{,}76a$, $y_C = 0$.

Задача 2.24. Определить положение центра тяжести C площади поперечного сечения однородного штампа, изображенного на рис. *а*.



К задаче 2.24

Р е ш е н и е. Заметив, что сечение имеет ось симметрии, проведем вдоль оси симметрии ось x и перпендикулярно к ней, по вертикали вверх, ось y. Так как центр тяжести C сечения лежит на оси симметрии, т.е. на оси x, то необходимо определить лишь координату x_C.

Проведя вспомогательные линии MP и NS, разобьем площадь сечения на сумму площадей трех прямоугольников. Обозначим прямоугольник $MDBA$ номером *1*, прямоугольник $ENLK$ – номером *2* и прямоугольник

NMPS – номером *3*. Тогда формулу (3*) можно записать в виде

$$x_C = \frac{x_1 \Delta s_1 + x_2 \Delta s_2 + x_3 \Delta s_3}{\Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3}. \tag{1}$$

Так как центры тяжести C_1, C_2 и C_3 прямоугольников лежат в точках пересечения их диагоналей, то имеем

$$x_1 = x_2 = 15 \text{ см}, \quad x_3 = 5 \text{ см}. \tag{2}$$

Площади прямоугольников равны

$$\Delta s_1 = \Delta s_2 = 300 \text{ см}^2, \quad \Delta s_3 = 200 \text{ см}^2. \tag{3}$$

Воспользовавшись (2) и (3), запишем формулу (1) в виде

$$x_C = \frac{15 \cdot 300 + 15 \cdot 300 + 5 \cdot 200}{300 + 300 + 200} \text{ см, т.е. } x_C = 12{,}5 \text{ см.}$$

Итак, центр тяжести площади сечения штампа находится в точке C с координатами: $x_C = 12{,}5$ см, $y_C = 0$.

Эту задачу можно решить несколько иначе, проведя вспомогательную прямую *AL* (рис. *б*) и представив площадь данного сечения в виде разности площадей прямоугольников *EDBK* и *SPAL*. Обозначив прямоугольник *EDBK* номером *1*, а прямоугольник *SPAL* номером *2*, запишем формулу (3*) в виде

$$x_C = \frac{x_1 \Delta s_1 - x_2 \Delta s_2}{\Delta s_1 - \Delta s_2}, \tag{4}$$

где x_1 – абсцисса центра тяжести C_1 прямоугольника *EDBK*, x_2 – абсцисса центра тяжести C_2 прямоугольника *SPAL*, а Δs_1 и Δs_2 – соответственно площади этих прямоугольников. Находим

$$x_1 = 15 \text{ см}, \quad x_2 = 20 \text{ см}, \quad \Delta s_1 = 1200 \text{ см}^2, \quad \Delta s_2 = 400 \text{ см}^2. \tag{5}$$

Подставив (5) в формулу (4), получим

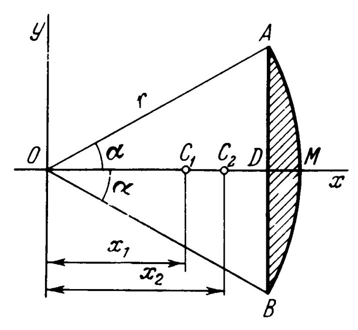
$$x_C = \frac{15 \cdot 1200 - 20 \cdot 400}{1200 - 400} \text{ см, откуда } x_C = 12{,}5 \text{ см.}$$

Второй прием решения задачи оказался более коротким. Этот прием замены площади данной плоской фигуры разностью двух площадей удобно также применить при решении следующей задачи.

Второй способ решения этой задачи иногда называют *методом отрицательных площадей.*

Задача 2.25. Определить положение центра тяжести площади однородного кругового сегмента *AMB*, если радиус окружности равен r, а центральный угол равен 2α.

Решение. Выберем оси координат: направим ось x вдоль оси симметрии, начало координат возьмем в центре окружности O, а ось y направим по вертикали вверх. Так как центр тяжести кругового сегмента AMB лежит на оси симметрии, т.е. на оси x, то $y_C = 0$. Остается определить абсциссу x_C центра тяжести C. Для этого представим площадь S сегмента



К задаче 2.25

AMB как разность двух площадей: площади Δs_1 кругового сектора $OAMB$ и площади Δs_2 равнобедренного треугольника OAB, т.е. $S = \Delta s_1 - \Delta s_2$.

Теперь формулу (3*) можно записать в виде

$$x_C = \frac{x_1 \Delta s_1 - x_2 \Delta s_2}{\Delta s_1 - \Delta s_2}, \tag{1}$$

где x_1 и x_2 – соответственно абсциссы центров тяжести C_1 и C_2 кругового сектора $OAMB$ и треугольника OAB. Находим

$$\Delta s_1 = r^2 \alpha, \quad \Delta s_2 = r^2 \sin\alpha \cos\alpha, \quad x_1 = \frac{2}{3} r \frac{\sin\alpha}{\alpha}, \quad x_2 = \frac{2}{3} r \cos\alpha \tag{2}$$

(положения центров тяжести треугольника и кругового сектора указаны выше, в обзоре теории). Подставив (2) в формулу (1), получим

$$x_C = \frac{\frac{2}{3} r \frac{\sin\alpha}{\alpha} r^2 \alpha - \frac{2}{3} r \cos\alpha r^2 \sin\alpha \cos\alpha}{r^2 \alpha - r^2 \sin\alpha \cos\alpha} = \frac{2}{3} r \frac{\sin^3\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}.$$

Итак, координаты центра тяжести C кругового сегмента имеют вид

$$x_C = \frac{2}{3} r \frac{\sin^3\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}, \quad y_C = 0. \tag{3}$$

Задача 2.26. Решить задачу 1.38, пользуясь понятием центра тяжести.

Решение. Пусть центр тяжести системы, состоящей из двух роликов весом P_1 и P_2, находится в точке C_1. В точке C_1 приложена сила веса

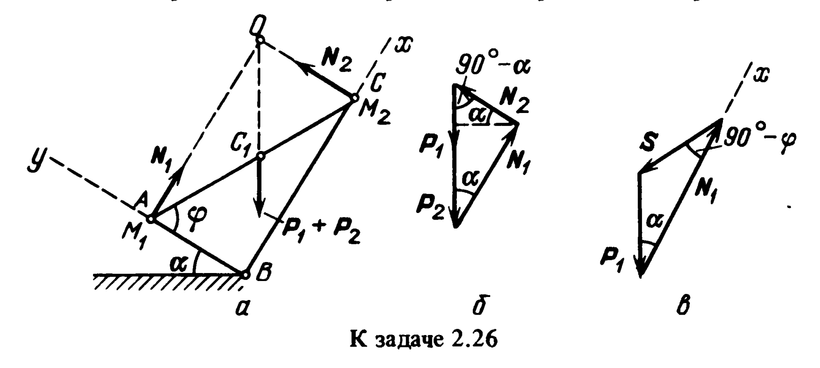
системы, равная $P_1 + P_2$. Стержень M_1M_2 находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости: силы веса $P_1 + P_2$ и реакций гладких стен N_1 и N_2 (рис. *а*). Согласно теореме о трех непараллельных силах линии действия этих сил, находящихся в равновесии, должны пересекаться в одной точке (рис. *а*). Назовем эту точку O. Строим для трех сил, находящихся в равновесии, непараллельных и приложенных в одной точке O, замкнутый треугольник (рис. *б*). Откладываем известную по модулю и направлению силу $P_1 + P_2$. Из ее концов проводим направления сил N_1 и N_2, неизвестных по модулю. Эти силы направлены соответственно перпендикулярно наклонным стенкам AB и BC. Угол между силами $P_1 + P_2$ и N_1 равен α как образованный перпендикулярами к горизонтальной оси и оси y. Силовой треугольник (рис. *б*) – прямоугольный, так как N_1 и N_2 взаимно перпендикулярны. Из силового прямоугольного треугольника непосредственно находим

$$N_1 = (P_1 + P_2)\cos\alpha, \tag{1}$$

$$N_2 = (P_1 + P_2)\sin\alpha. \tag{2}$$

Для определения усилия в стержне S рассмотрим равновесие сил, приложенных к ролику A. Это – известные силы P_1 и N_1, а также искомая сила S.

Строим на этих силах замкнутый треугольник, откладывая известные по модулю и направлению силы P_1 и N_1. Соединяя их прямой, находим искомую силу S по модулю и направлению. Угол между силами P_1 и N_1 равен α, как образованный сторонами, перпендикулярными сторонам



К задаче 2.26

первоначального угла α. Угол между силами S и N_1 равен $(90° - \varphi)$. Из треугольника (рис. *в*) находим по теореме косинусов

$$S = \sqrt{P_1^2 + (P_1 + P_2)^2\cos^2\alpha - 2P_1(P_1 + P_2)\cos^2\alpha} = \sqrt{P_1^2\sin^2\alpha + P_2^2\cos^2\alpha}. \tag{3}$$

Далее, из треугольника (рис. *в*), проецируя силы S и P_1 на направление силы N_1, находим

$$S\cos(90° - \varphi) + P_1\cos\alpha = (P_1 + P_2)\cos\alpha, \tag{4}$$

откуда

$$S \sin\varphi = P_2 \cos\alpha, \tag{5}$$

или

$$\sin\varphi = \frac{P_2 \cos\alpha}{\sqrt{P_1^2 \sin^2\alpha + P_2^2 \cos^2\alpha}}. \tag{6}$$

Далее находим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} = \frac{P_2}{P_1} \operatorname{ctg}\alpha, \tag{7}$$

что совпадает с ответом задачи 1.38. Сопоставляя методы решения этих задач, заключаем, что быстрее ведет к цели способ, использованный в настоящей задаче.

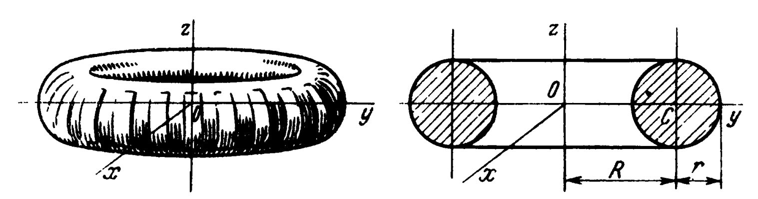
Задача 2.27. Однородный тор образован вращением круга радиусом r около оси, лежащей в плоскости этого круга. Расстояние от центра тяжести круга до оси вращения равно R.

Определить площадь поверхности и объем тора.

Решение. Направим ось z вдоль оси вращения и, следовательно, оси симметрии тора.

Так как расстояние R от центра тяжести C круга до оси вращения дано, а также известны длина окружности и площадь круга радиусом r, то, применив обе теоремы Гульдина, можно легко определить площадь поверхности и объем тора.

Действительно, согласно первой теореме Гульдина $S = 2\pi y_C L$, где y_C – расстояние от центра тяжести C линии, описывающей данную



К задаче 2.27

поверхность, до оси вращения, L – длина этой линии, S – площадь поверхности тела вращения.

В данном случае $y_C = R$, $L = 2\pi r$ и, следовательно, искомая площадь S поверхности тора равна

$$S = 2\pi R \cdot 2\pi r = 4\pi^2 Rr.$$

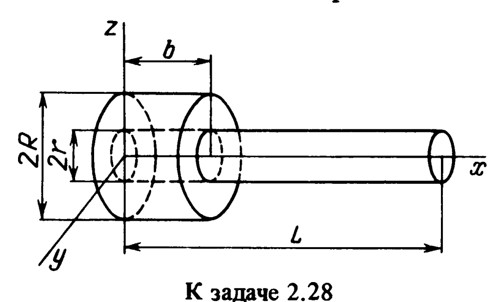
Для определения объема тела вращения применим вторую теорему Гульдина: $V = 2\pi y_C S$, где y_C – расстояние от центра тяжести C плоской

фигуры, описывающей данный объем, до оси вращения, S – площадь этой плоской фигуры, V – объем тела вращения.

В данном случае $y_C = R$, $S = \pi r^2$ и, следовательно, искомый объем V тора равен

$$V = 2\pi R \pi r^2 = 2\pi^2 R r^2.$$

Применение обеих теорем Гульдина оказалось весьма эффективным. Использование других приемов решения этой задачи, например формул интегрального исчисления, является более громоздким.



К задаче 2.28

Задача 2.28. Со стальной шпильки свинчивается гайка. Размеры шпильки и гайки, а также система координат показаны на рисунке. Задан также шаг h резьбы.

Считая шпильку сплошным цилиндром, а гайку – полым цилиндром, найти, как меняется положение центра тяжести в зависимости от числа N оборотов гайки. За начальное положение принять крайнее левое положение гайки.

Решение. Однородное тело состоит из двух тел простой формы – однородного сплошного цилиндра радиусом r и длиной L и однородного полого цилиндра с внешним радиусом R, внутренним радиусом r и длиной b.

Из соображений симметрии очевидно, что $y_C = 0$ и $z_C = 0$. Определению подлежит лишь координата x_C. Для однородного тела, состоящего из двух тел,

$$x_C = \frac{V_1 x_1 + V_2 x_2}{V_1 + V_2}, \qquad (1)$$

где x_1 и x_2 – координаты центров тяжести, а V_1 и V_2 – объемы составляющих тел.

Рассмотрим шпильку и гайку отдельно. Шпилька имеет объем, равный

$$V_1 = \pi r^2 L. \qquad (2)$$

Центр тяжести шпильки расположен в середине ее продольной оси. Так как шпилька не изменяет своего положения в пространстве, то координата x_1

ее центра тяжести постоянна и равна

$$x_1 = L/2. \tag{3}$$

Гайка представляет собой полый цилиндр. Объем гайки равен

$$V_2 = \pi R^2 b - \pi r^2 b = \pi(R^2 - r^2)b. \tag{4}$$

Координата центра тяжести гайки в ее крайнем левом положении равна $x_{20} = b/2$. С каждым оборотом гайка передвигается по шпильке вправо на величину шага резьбы h. За N оборотов гайка сместится на расстояние, равное $\Delta x_2 = hN$. Координата центра тяжести гайки после N оборотов станет равной

$$x_2 = x_{20} + \Delta x_2 = \frac{b}{2} + hN. \tag{5}$$

Подставим в формулу (1) вычисленные значения (2), (3), (4) и (5) входящих в нее величин. Получаем

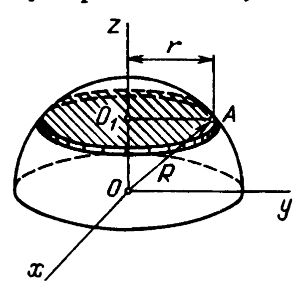
$$x_C = \frac{\pi r^2 L^2/2 + \pi(R^2 - r^2)b(b/2 + hN)}{\pi r^2 L + \pi(R^2 - r^2)b},$$

или, после сокращения на π:

$$x_C = \frac{r^2 L^2/2 + (R^2 - r^2)b(b/2 + hN)}{r^2 L + (R^2 - r^2)b}.$$

Задача 2.29. Найти центр тяжести однородного полушара радиусом R.

Решение. Выберем центр шара за начало координат и направим ось z по оси симметрии полушара. Оси x и y направим по двум любым



К задаче 2.29

взаимно перпендикулярным радиусам круга, лежащего в основании полушара (см. рисунок).

Из соображений симметрии можем сразу указать две координаты центра тяжести полушара:

$$x_C = 0, \quad y_C = 0.$$

Для нахождения z_C воспользуемся формулой

$$z_C = \frac{\iiint\limits_V z\,dV}{V}. \qquad (1)$$

Выделим тонкий шаровой слой на произвольном расстоянии $OO_1 = z$ от горизонтальной координатной плоскости. Приближенно находим объем этого слоя как объем цилиндра малой высоты dz. Радиус основания шарового слоя определяем из прямоугольного треугольника OO_1A:

$$r = O_1A = \sqrt{OA^2 - OO_1^2} = \sqrt{R^2 - z^2}.$$

Объем элементарного цилиндра равен

$$dV = \pi r^2\,dz = \pi(R^2 - z^2)\,dz.$$

Видим, что dV зависит только от координаты z. Следовательно, интегрирование по объему сводится к интегрированию только по координате z, которая изменяется в пределах от $z = 0$ до $z = R$.

Стоящий в числителе формулы (1) интеграл равен

$$\iiint\limits_V z\,dV = \int\limits_0^R z\pi(R^2 - z^2)\,dz = \left(\frac{\pi R^2 z^2}{2} - \frac{\pi z^4}{4}\right)\Bigg|_0^R = \frac{\pi R^4}{4}.$$

Разделив его на объем полушара

$$V = \frac{2}{3}\pi R^3,$$

получаем искомую координату центра тяжести полушара по оси z:

$$z_C = \frac{3}{8}R.$$

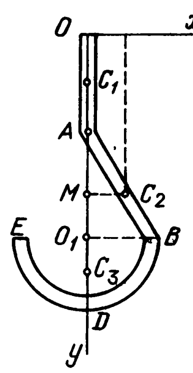
Задача 2.30. Проволочный контур имеет форму крюка (рис.). Найти положение центра тяжести контура по отношению к его верхней точке. Заданы размеры: радиус полуокружности R, длина отрезка AB равна $2R$, длина отрезка OA равна $1{,}5R$.

Решение. Представим крюк как однородную линию, состоящую из прямолинейных отрезков OA и AB и дуги полуокружности BDE. Запишем формулы (4*) для координат центра тяжести однородной линии

$$x_C = \frac{x_{C_1}l_1 + x_{C_2}l_2 + x_{C_3}l_3}{l_1 + l_2 + l_3}, \quad y_C = \frac{y_{C_1}l_1 + y_{C_2}l_2 + y_{C_3}l_3}{l_1 + l_2 + l_3}, \qquad (1)$$

где x_{C_i}, y_{C_i} – координаты центров тяжести отдельных отрезков, а l_i ($i = 1, 2, 3$) – длины этих отрезков.

Третью координату центра тяжести z_C в этой задаче можно не находить, так как однородный контур расположен в одной плоскости.



К задаче 2.30

Длины отрезков OA и AB заданы условием задачи, длина полуокружности $l_3 = \pi R$.

Согласно условию задачи принимаем за начало координат верхнюю точку O крюка. Направляем ось ординат y вниз вдоль отрезка OA, а ось абсцисс x – вправо.

Отметим на оси y центр O_1 полуокружности. В получившемся прямоугольном треугольнике AO_1B гипотенуза AB равна $2R$, а катет $O_1B = R$, из этого заключаем, что угол, составленный отрезком AB с осью y, равен 30°. Обозначим на рисунке центры тяжести составных частей однородного контура: точка C_1 – центр тяжести отрезка OA лежит на его середине, аналогично точка C_2 – центр тяжести делит пополам отрезок AB. Центр тяжести C_3 дуги полуокружности лежит на оси симметрии, которая совпадает с осью y. Расстояние точки C_3 от центра O_1 полуокружности находим по формуле для центра тяжести однородной дуги:

$$O_1C_3 = \frac{R\sin\alpha}{\alpha},$$

где α – половина центрального угла дуги.

Для полуокружности $\alpha = \pi/2$ и, следовательно, $O_1C_3 = 2R/\pi$.

По рисунку определяем координаты точек C_1, C_2 и C_3:

$$x_{C_1} = 0,\ \ y_{C_1} = \frac{1}{2}OA = 0{,}75R,\ \ x_{C_2} = MC_2 = AC_2\cdot\sin 30^\circ = 0{,}5R,$$

$$y_{C_2} = OM = OA + AM = OA + AC_2\cdot\cos 30^\circ = 1{,}5R + 0{,}866R \approx 1{,}366R,$$

$$x_{C_3} = 0,$$

$$y_{C_3} = OA + AO_1 + O_1C_3 = OA + AB\cdot\cos 30^\circ + O_1C_3 = 3{,}869R.$$

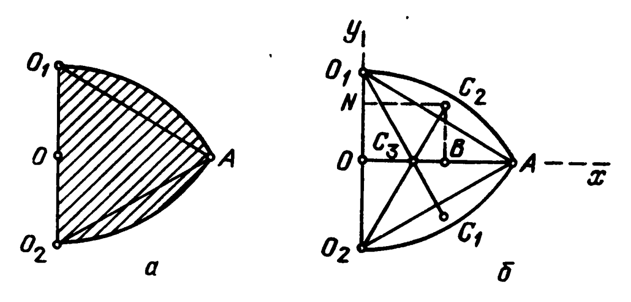
Подставляем в (1) значения длин отрезков и координат их центров тяжести, находим координаты центра тяжести всего контура

$$x_C = 0{,}15R,\quad y_C = 2{,}7R.$$

Задача 2.31. Найти положение центра тяжести однородной плоской фигуры (рис. *а*). Фигура ограничена радиусом $O_1O_2 = R$ и дугами окружностей O_1A (с центром в точке O_2) и O_2A (с центром в точке O_1), проведенными радиусом R соответственно из центров O_1 и O_2.

Решение. Заштрихованную на рисунке фигуру можно представить как составленную из нескольких частей, причем получить эту фигуру можно разными способами, например, соединить сектор и сегмент либо треугольник и два сегмента.

Так как сегмент является разностью сектора и треугольника, то удобно заштрихованную фигуру представить как комбинацию двух секторов,



К задаче 2.31

из которой вычитается треугольник. При выборе координатной системы используем симметрию фигуры. Начало координат O поместим между центрами дуг окружностей в середине отрезка O_1O_2. Ось абсцисс направляем в точку A пересечения дуг окружностей и продолжаем ее вправо. Ось ординат направляем из O вверх. Из симметрии фигуры заключаем, что центр тяжести лежит на оси абсцисс, следовательно, одна из координат $y_C = 0$.

Треугольник O_1O_2A – равносторонний, так как образован тремя одинаковыми радиусами O_1A, O_1O_2 и O_2A. Следовательно, каждый его угол равен $60°$ и оба сектора имеют одинаковые центральные углы по $60°$. Центр тяжести каждого из секторов лежит на биссектрисе центрального угла на расстоянии, равном $\frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ от центра соответствующего круга. Здесь α – половина центрального угла сектора, для обоих секторов $\alpha = 30°$.

Изобразим на рис. *б* обе биссектрисы центральных углов секторов и отметим на них точки C_1 и C_2 – центры тяжести секторов, причем

$$O_1C_1 = \frac{2}{3}R\frac{0{,}5}{\pi/6} = \frac{2R}{\pi}.$$

Аналогично

$$O_2C_2 = \frac{2R}{\pi}.$$

В равностороннем треугольнике O_1O_2A биссектрисы углов совпадают с медианами. Центр тяжести C_3 треугольника, лежащий на пересечении медиан, отстоит на 1/3 медианы OA от стороны O_1O_2. Медиана (она же высота треугольника) OA легко определяется из прямоугольного треугольника O_1OA по теореме Пифагора:

$$OA = \frac{R}{2}\sqrt{3}$$

или с помощью тригонометрических функций:

$$OA = O_1A \cdot \sin 60^\circ = R\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Расстояние

$$OC_3 = \frac{1}{3}OA = \frac{R\sqrt{3}}{6} \approx 0{,}289R.$$

Воспользуемся методом отрицательных площадей и запишем формулу для абсциссы центра тяжести заштрихованной фигуры:

$$x_C = \frac{x_{C_1}S_1 + x_{C_2}S_2 - x_{C_3}S_3}{S_1 + S_2 - S_3}. \qquad (1)$$

В этой формуле S_1 и S_2 — площади секторов, а S_3 — площадь треугольника O_1O_2A. Площадь каждого из секторов составляет шестую часть площади круга

$$S_1 = S_2 = \pi R^2/6.$$

Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту:

$$S_3 = \frac{1}{2}OA \cdot O_1O_2 = \frac{1}{2}\,\frac{R\sqrt{3}}{2}R = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}.$$

Центры тяжести обоих секторов проектируются на ось x в одну точку B. Проведем из C_2 дополнительно горизонтальную линию до пересечения с осью ординат. Отрезок C_2N равен отрезку OB, а длина C_2N легко находится из прямоугольного треугольника O_2C_2N:

$$C_2N = O_2C_2 \cdot \sin(\angle NO_2C_2) = O_2C_2 \cdot \sin 30^\circ = \frac{2R}{\pi} \cdot \frac{1}{2} = \frac{R}{\pi}.$$

Значит,

$$x_{C_1} = OB = R/\pi, \quad x_{C_2} = OB = R/\pi,$$

$$x_{C_3} = OC_3 = \frac{R\sqrt{3}}{6} \approx 0,289R.$$

Подставим в формулу (1) значения координат центров тяжести и площадей составляющих фигур. Получаем

$$x_C \approx 0,338R.$$

2. Центр тяжести неоднородного твердого тела. Твердые тела могут быть и неоднородными. Удельный вес частиц неоднородного твердого тела не является постоянным. Нетрудно привести примеры подобных тел. Это детали из слоистых пластиков, композитных материалов. Многие конструкции подшипников содержат одновременно металл и керамику, пластмассу, резину. Современная технология позволяет изготовлять строительные блоки, однородные по химическому составу, но переменной структуры — более плотные вблизи поверхности и пористые, вспененные внутри. Таким образом, может возникнуть задача об определении центра тяжести неоднородного твердого тела.

Координаты x_C, y_C, z_C центра тяжести неоднородного твердого тела определяются формулами:

$$x_C = \frac{\int\limits_V \gamma x\,dv}{\int\limits_{(V)} \gamma\,dv},$$

$$y_C = \frac{\int\limits_V \gamma y\,dv}{\int\limits_{(V)} \gamma\,dv}, \qquad (9^*)$$

$$z_C = \frac{\int\limits_V \gamma z\,dv}{\int\limits_{(V)} \gamma\,dv}.$$

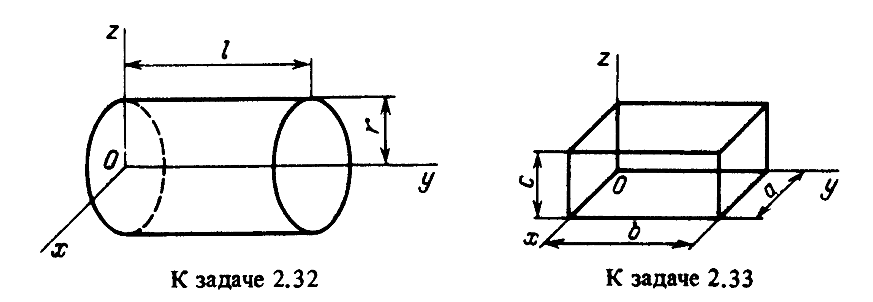
В этих формулах: γ — удельный вес тела в данной точке, меняющийся от точки к точке, так что $\gamma = \gamma(x, y, z)$; x, y, z — текущие координаты точки; dv — элемент объема. Интегрирование проводится по всему объему тела V.

Задача 2.32. Найти центр тяжести цилиндра радиусом r и длиной l (см. рис.), изготовленного из неоднородного материала, удельный вес которого изменяется по длине цилиндра согласно формуле $\gamma = a + by^2$, где a и b — постояннные коэффициенты.

10 Заказ № 899

Вычислить координаты центра тяжести при заданных числовых значениях: $r = 4$см, $l = 60$ см, $a = 4{,}8$ г/см^3, $b = 0{,}002$ г/см^5.

Решение. Изменение удельного веса происходит только по длине цилиндра, относительно оси цилиндра масса распределяется симметрично, поэтому можно сразу сказать, что центр тяжести размещается на оси цилиндра и в указанной на рисунке системе координат $x_C = 0$, $z_C = 0$.



К задаче 2.32 К задаче 2.33

Положение центра тяжести цилиндра на оси y определяется второй формулой из (9*)

$$y_C = \frac{\int\limits_V \gamma y\, dV}{\int\limits_V \gamma\, dV}.$$

В качестве элемента объема возьмем тонкий диск – сечение цилиндра малой толщины dy. Малый объем элемента $dV = \pi r^2\, dy$. Подставим γ и dV в формулу для y_C:

$$y_C = \frac{\int\limits_V (a + by^2)\, y \cdot \pi r^2\, dy}{\int\limits_V (a + by^2) \cdot \pi r^2\, dy}.$$

Интегрирование по объему свелось к интегрированию по одной координате y от 0 до l. Вынесем за знак интеграла постоянные множители πr^2 и сократим на них дробь:

$$y_C = \frac{\int\limits_0^l (a + by^2)\, y\, dy}{\int\limits_0^l (a + by^2)\, dy}.$$

Вычисляем интегралы в числителе и знаменателе дроби:

$$\int_0^l (a + by^2)y\,dy = \left(\frac{ay^2}{2} + \frac{by^4}{4}\right)\Bigg|_0^l = \frac{al^2}{2} + \frac{bl^4}{4},$$

$$\int_0^l (a + by^2)\,dy = \left(ay + \frac{by^3}{3}\right)\Bigg|_0^l = al + \frac{bl^3}{3}.$$

Получаем выражение для ординаты центра тяжести

$$y_C = \frac{3}{4}\frac{(2al + bl^3)}{(3a + bl^2)}.$$

Подставляя в эту формулу числовые значения a, b и l, получим $y_C =$ $= 35$ см.

Задача 2.33. Найти положение центра тяжести прямоугольного параллелепипеда (см. рис.) из пористого материала, плотность которого ρ меняется с высотой по формуле

$$\rho = \rho_0(c - z).$$

Решение. Так как материал, из которого изготовлен параллелепипед, неоднороден только по высоте, т.е. по координате z, то абсциссу и ординату центра тяжести C легко указать из соображений симметрии:

$$x_C = a/2, \quad y_C = b/2.$$

Воспользуемся последней формулой из (9*)

$$z_C = \frac{\int_V \gamma z\,dV}{\int_V \gamma\,dV}.$$

Выделим в качестве элемента объема тонкий горизонтальный слой на произвольной (текущей) высоте z. Малая толщина такого слоя dz. Элементарный объем $dV = ab\,dz$.

Удельный вес связан с плотностью формулой

$$\gamma = \rho g,$$

где g — ускорение силы тяжести. В данной задаче

$$\gamma = \rho_0(c - z)g.$$

Подставим γ и dV в формулу для вычисления z_C:

$$z_C = \frac{\int_V \rho_0(c - z)gz\,ab\,dz}{\int_V \rho_0(c - z)g\,ab\,dz}.$$

Мы видим, что интегрирование по объему свелось к интегрированию по высоте z от $z = 0$ до $z = c$. Вынося из-под знака интеграла постоянные величины и сокращая дробь, запишем

$$z_C = \frac{\int_0^c (c - z) z\, dz}{\int_0^c (c - z)\, dz}.$$

Интеграл, стоящий в числителе, равен

$$\int_0^c (c - z) z\, dz = \int_0^c (cz - z^2)\, dz = \left(\frac{cz^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^c = \frac{c^3}{2} - \frac{c^3}{3} = \frac{c^3}{6}.$$

Интеграл, стоящий в знаменателе, равен

$$\int_0^c (c - z)\, dz = \left(cz - \frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^c = c^2 - \frac{c^2}{2} = \frac{c^2}{2}.$$

Высота, на которой находится центр тяжести параллелепипеда, равна

$$z_C = \frac{c^3/6}{c^2/2} = \frac{c}{3}.$$

Указание. Рекомендуется решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 9.1, 9.2, 9.4, 9.10, 9.11, 9.12, 9.14, 9.18, 9.20.

Раздел второй

КИНЕМАТИКА

ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ

Кинематика является разделом теоретической механики, в котором изучаются движения тела безотносительно к причинам, их вызывающим.

Все движения материальных тел происходят в пространстве и во времени.

Кинематику иногда называют "геометрией движения". Действительно, к основным понятиям геометрии – точка, линия, поверхность, объем, в кинематике добавляется только одна новая, независимая переменная – время.

При движении тел относительно друг друга расстояния между точками этих тел могут изменяться. Эти изменения обычно определяются по отношению к некоторой системе отсчета, системе координат, которая и заменяет при изучении движений одно из тел. Если выбранная система координат условно принята за неподвижную, то движение других тел по отношению к этой системе отсчета называют *абсолютным движением*.

В классической механике время считают одинаковым для любых систем отсчета, что является приближением к истине, достаточно точным, если скорости рассматриваемых движений малы по сравнению со скоростью света.

За единицу времени принята секунда. Начало отсчета времени выбирается произвольно.

В ряде случаев движение материальных тел изучается по отношению к движущейся системе координат. Такое движение называют *относительным движением*.

Разнообразие изучаемых в кинематике движений отражает разнообразие движений в природе и технике.

Орбитальное движение небесных тел, движение ракет, самолетов и искусственных спутников, колебательные движения в машинах и строениях, качка судов на волнении, движение тел в силовых полях, – вот далеко не полный перечень наблюдаемых и изучаемых в кинематике движений.

В отличие от статики и динамики, зародившихся еще в античные времена в связи со строительством различных сооружений (статика)

и в связи с полетом снарядов (динамика), кинематика выделилась в самостоятельный раздел теоретической механики довольно поздно, в начале XIX века.

Причиной послужило бурное развитие машиностроения, широкое применение многих механизмов, среди которых – кривошипно-ползунный механизм, различные конструкции регуляторов и т.п.

Французский ученый физик Ампер (1775–1836), сделавший важный вклад в открытие законов электродинамики, впервые предложил в 1834 г. выделить раздел механики, изучающий законы движения точки и твердого тела безотносительно к причинам, его вызывающим, в отдельный раздел теоретической механики. Этот раздел Ампер предложил назвать кинематикой.

В развитии кинематики, тесно связанной с теорией механизмов и машин, на первой стадии приняли участие французские ученые: Понселе (1788–1876), Шаль (1793–1880).

Основы кинематики твердого тела были развиты Леонардом Эйлером. Ускорение точки, совершающей сложное движение, было корректно исследовано французским ученым Гюставом Гаспаром Кориолисом (1792–1843). Классическую теорему о сложении ускорений он доказал в 1837 г. Кинематика механизмов получила теоретическую базу в работах выдающегося русского математика П.Л. Чебышева (1821–1894), разработавшего теорию функций, наименее отличающихся от нуля, лежащую в основе синтеза механизмов с заданными кинематическими свойствами.

Глава 3
ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

§ 1. ТРАЕКТОРИЯ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

1. Основные определения. *Траекторией* точки называется линия, описываемая движущейся точкой в пространстве. Траектория может быть плоской или пространственной кривой. Движение точки определяется заданием *закона движения*. Закон (уравнение) движения точки устанавливает зависимость положения точки в пространстве от времени.

Движение точки M в неподвижной системе координат xyz определяется заданием трех функций (рис. 3.1)

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t), \tag{1*}$$

которые называются *уравнениями движения точки*. Подставив в уравнения (1*) значение времени $t = t_1$, можно определить координаты и, следовательно, положение точки в пространстве в этот момент времени. Уравнения (1*) представляют одновременно *параметрические уравнения траектории точки*. Для нахождения уравнений траектории точки в координатной форме необходимо из уравнений (1*) исключить время и получить зависимости вида

$$\varphi_1(x, y) = 0, \quad \varphi_2(y, z) = 0.$$

Эти уравнения определяют поверхности, линия пересечения которых является траекторией точки. Траектория точки может быть определена пересечением и других поверхностей, например:

$$f_1(x, z) = 0, \quad f_2(y, z) = 0.$$

Существуют и другие способы задания движения точки. При *векторном способе* задания закона движения радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ движущейся точки M (рис. 3.1) дается как функция времени $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$. Связь между радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$ и декартовыми координатами точки выражается равенством

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \tag{2*}$$

Здесь $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ – орты (единичные векторы) осей координат. Если в (2*) при-

нять за x, y, z текущие координаты точки M, определяемые уравнениями (1*), то (2*) дает закон движения точки в векторной форме.

Третий способ задания движения точки называется *естественным*. В этом случае движение точки определяется уравнением

$$\sigma = f(t), \qquad (3^*)$$

где σ – криволинейная координата, отсчитываемая вдоль дуги от

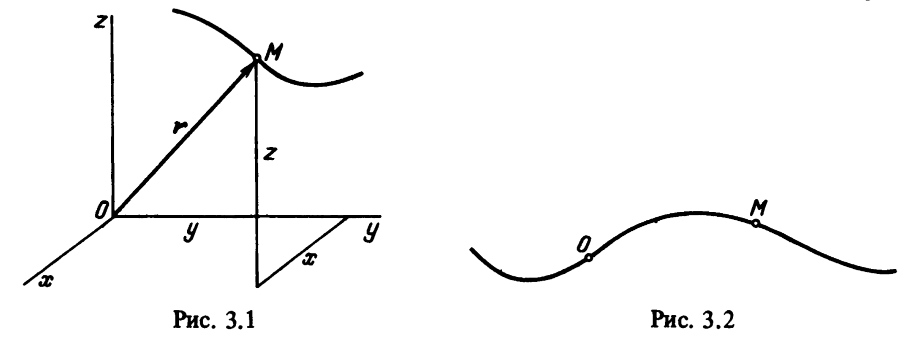


Рис. 3.1 Рис. 3.2

некоторой начальной точки O на траектории (рис. 3.2). При этом способе предполагается, что траектория движущейся точки M известна. *Криволинейная координата* равна длине дуги, отсчитываемой от начальной точки O. При отсчете в одну сторону от точки O координата положительна, при отсчете в другую сторону – отрицательна (направление положительного отсчета должно быть задано). Уравнение (3*) называется *естественным уравнением движения точки*.

При естественном способе задания движения также имеется три уравнения: первое уравнение – это закон движения точки (3*), два других

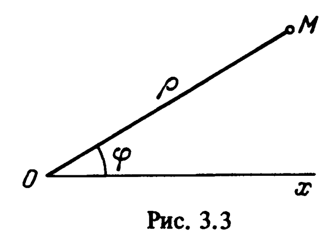


Рис. 3.3

уравнения определяют траекторию точки, ибо кривая в пространстве выражается уравнениями двух поверхностей, пересечение которых и является траекторией точки. Среди других систем координат, применяемых при изучении движений, отметим полярную систему координат, широко используемую при описании движений, происходящих в плоскости. *В полярной системе* координат (рис. 3.3) положение точки в плоскости определяется радиусом ρ – длиной отрезка, соединяющего неподвижный

центр O с движущейся точкой M, и углом φ между неподвижной прямой Ox (полярной осью) и отрезком $\overline{OM}$. В этом случае уравнения плоского движения точки M будут:

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t). \tag{4*}$$

Формулы перехода от полярных координат к декартовым имеют вид

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi.$$

При исследовании движения точки в пространстве часто пользуются сферическими и цилиндрическими координатами.

Цилиндрическими координатами точки M являются полярные координаты ρ и φ проекции M_1 точки M на неподвижную плоскость xOy и высота z точки M над этой плоскостью (рис. 3.4).

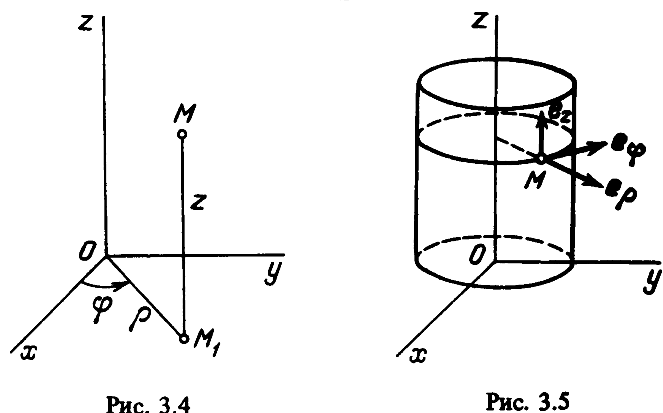


Рис. 3.4 Рис. 3.5

Для перехода от цилиндрических координат точки к прямоугольным декартовым координатам служат формулы, легко получающиеся из рис. 3.4:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z. \tag{5*}$$

Обратный переход – от декартовых координат точки к ее цилиндрическим координатам – осуществляется по формулам:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad z = z. \tag{6*}$$

Уравнения движения точки в цилиндрических координатах:

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad z = z(t). \tag{7*}$$

Цилиндрические координаты – криволинейные, так как не все координатные линии прямые. Координатными линиями цилиндрической системы координат являются: прямые, проходящие через ось z параллельно плос-

кости xOy; окружности с центрами на оси z, параллельные плоскости xOy; прямые, параллельные оси z.

В каждой точке пространства пересекаются три координатные линии. Каждой точке соответствуют три единичных вектора e_ρ, e_φ, e_z, направленные по касательным к координатным линиям. На рис. 3.5 показаны орты цилиндрических координат. Орты e_ρ, e_φ, e_z изменяются от точки к точке.

Любой вектор p, соответствующий точке M, может быть разложен по векторам e_ρ, e_φ, e_z. В данной точке:

$$p = p_\rho e_\rho + p_\varphi e_\varphi + p_z e_z. \qquad (8^*)$$

Составляющие вектора p в цилиндрической системе координат выражаются через проекции вектора p на оси координат формулами:

$$\begin{aligned} p_\rho &= p_x \cos\varphi + p_y \sin\varphi, \\ p_\varphi &= -p_x \sin\varphi + p_y \cos\varphi, \\ p_z &= p_z. \end{aligned} \qquad (9^*)$$

Выражение проекций вектора на оси декартовой системы координат через проекции на координатные линии цилиндрических координат:

$$\begin{aligned} p_x &= p_\rho \cos\varphi - p_\varphi \sin\varphi, \\ p_y &= p_\rho \sin\varphi - p_\varphi \cos\varphi, \\ p_z &= p_z. \end{aligned} \qquad (10^*)$$

Сферическими координатами точки M являются (рис. 3.6): расстояние $\rho = OM$ от центра сферической системы координат; угол φ между полуплоскостью нулевого меридиана (на рисунке совпадает с полуплоскостью xOz) и полуплоскостью zOM, называемый *географической долготой*; угол θ между осью z и радиусом-вектором $\overline{OM}$, отсчитываемый от оси z, называемый *географической широтой*.

Для перехода от сферических координат точки к ее декартовым координатам служат формулы (рис. 3.6)

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \quad z = \rho \cos\theta. \qquad (11^*)$$

Для обратного перехода – от декартовых координат точки к ее сферическим координатам – пользуются формулами:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \qquad (12^*)$$

Движение точки задается в сферических координатах уравнениями

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad \theta = \theta(t). \qquad (13^*)$$

Сферические координаты — криволинейные. Координатными линиями сферической системы координат являются: меридианы, параллели и прямые, проходящие через начало координат. На рис. 3.7 показаны орты сферической системы координат. Каждой точке пространства соответствует тройка единичных векторов e_ρ, e_θ, e_φ, касательных к координатным линиям в данной точке. Эти орты меняются от точки к точке.

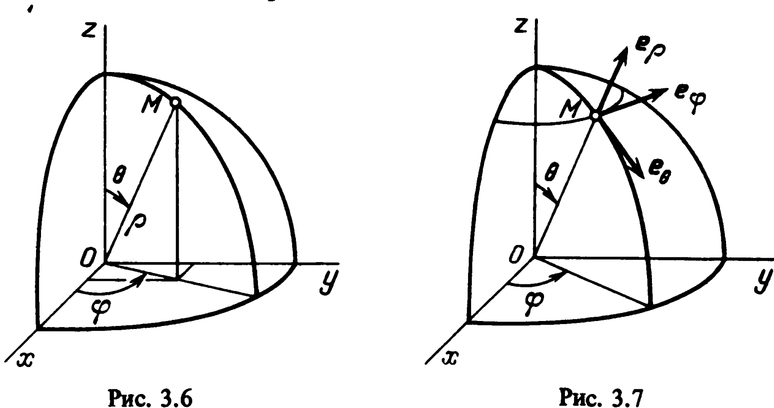


Рис. 3.6 Рис. 3.7

Любой вектор $\boldsymbol{q}$, соответствующий точке M, может быть разложен по направлениям координатных линий сферической системы координат:

$$\boldsymbol{q} = q_\rho \boldsymbol{e}_\rho + q_\theta \boldsymbol{e}_\theta + q_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi. \qquad (14^*)$$

Составляющие вектора $\boldsymbol{q}$ в сферической системе координат выражаются через проекции вектора на оси декартовых координат формулами

$$\begin{aligned} q_\rho &= q_x \sin\theta\cos\varphi + q_y \sin\theta\sin\varphi + q_z\cos\theta, \\ q_\theta &= q_x \cos\theta\cos\varphi + q_y\cos\theta\sin\varphi - q_z\sin\theta, \\ q_\varphi &= -q_x\sin\varphi + q_y\cos\varphi. \end{aligned} \qquad (15^*)$$

Проекции вектора $\boldsymbol{q}$ на оси декартовых координат связаны с составляющими вектора $\boldsymbol{q}$ в сферической системе координат следующими зависимостями:

$$\begin{aligned} q_x &= q_\rho \sin\theta\cos\varphi + q_\theta\cos\theta\cos\varphi - q_\varphi\sin\varphi, \\ q_y &= q_\rho\sin\theta\sin\varphi + q_\theta\cos\theta\sin\varphi + q_\varphi\cos\varphi, \\ q_z &= q_\rho\cos\theta - q_\theta\sin\theta. \end{aligned} \qquad (16^*)$$

Полярные, сферические, цилиндрические системы координат в отличие от декартовых называются *криволинейными координатными системами*.

Уравнения движения точки могут быть представлены графиками. Если по оси абсцисс откладывать независимую переменную t (время),

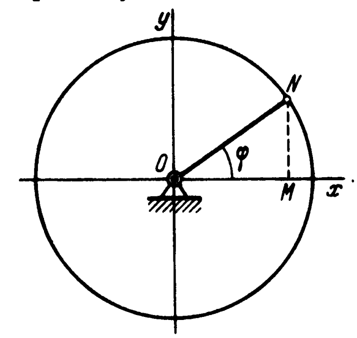
а по оси ординат – координату движущейся точки, то на графике получим кривую зависимости координаты от времени, т.е. уравнение движения. Такие графики должны быть построены для каждой из трех координат, определяющих движение точки в пространстве. Графики движения могут быть построены и при задании закона движения в виде (3*), (4*) или другим способом. Уравнения движения точки могут быть заданы таблицей, в которой каждому дискретному значению времени соответствуют определенные значения координат.

Указание. Решение задач на определение закона движения и уравнения траектории производится в такой последовательности:

1) выбирается система координат – прямоугольная, полярная или какая-либо иная; начало координат и та или иная система выбираются исходя из условий задачи так, чтобы дальнейшее решение было возможно более простым;

2) на основании условий задачи для избранной системы координат составляются уравнения движения точки, т.е. находится зависимость координат точки от времени;

3) имея уравнения движения точки, можно определить ее положение в любой момент времени, установить направление ее движения, найти траекторию и ответить на различные вопросы, касающиеся движения точки.



К задачам 3.1 и 3.2

Задача 3.1. Кривошип ON длиной a вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости рисунка и проходящей через точку O. Угол φ между неподвижной осью Ox и кривошипом изменяется пропорционально времени: $\varphi = kt$.

Составить уравнения движения точки N в декартовой системе координат. Найти уравнение ее траектории. Определить время одного полного оборота точки N и момент времени, когда обе координаты точки равны между собой.

Решение. Для составления уравнений движения точки N надо выразить ее координаты как функции времени. Из рисунка находим координаты x, y точки N:

$$x = ON\cos\varphi, \quad y = ON\sin\varphi,$$

или

$$x = a\cos kt, \tag{1}$$

$$y = a\sin kt. \tag{2}$$

Это и будут искомые уравнения движения точки N.

Чтобы найти уравнение траектории точки в явной форме, надо исключить из уравнений движения время. Для этого возведем каждое уравнение движения в квадрат:

$$x^2 = a^2 \cos^2 kt, \tag{3}$$

$$y^2 = a^2 \sin^2 kt, \tag{4}$$

и сложим уравнения (3) и (4):

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Это уравнение траектории точки N определяет окружность радиусом a с центром в начале координат.

Определим время одного полного оборота точки N. Это время T, в течение которого угол φ изменится на 2π радиан:

$$\varphi = kT = 2\pi,$$

откуда

$$T = 2\pi/k.$$

Найдем начальное положение движущейся точки. Для этого надо в уравнения движения (1) и (2) подставить значение $t = 0$. Тогда

$$x_0 = a, \quad y_0 = 0.$$

Определим момент времени, когда обе координаты точки N равны между собой:

$$x = y = a \cos kt_1 = a \sin kt_1,$$

т.е.

$$\operatorname{tg} kt_1 = 1.$$

Это равенство возможно при

$$kt_1 = \pi n + \frac{\pi}{4}, \tag{5}$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Из (5) определяются моменты времени, когда координаты точки равны между собой

$$t_1 = \frac{\pi}{k} n + \frac{\pi}{4k}.$$

Задача 3.2. Положив в предыдущей задаче угол φ равным $kt + \beta$, где k и β – постоянные величины, определить движение точки M, являющейся проекцией точки N на ось Ox.

Решение. Точка M движется прямолинейно по оси Ox, следовательно, ее движение определяется одним уравнением

$$x = ON \cdot \cos\varphi = a\cos(kt + \beta).$$

Это есть уравнение прямолинейного гармонического колебательного движения. Из него следует, что наибольшее отклонение точки M от центра колебаний O определяется координатами

$$x_1 = +a, \quad x_2 = -a.$$

Величина a называется *амплитудой колебания*, $kt + \beta$ называется *фазой колебания*, а β – *начальной фазой колебания*. Расстояние между двумя крайними положениями точки M, равное $2a$, называется *размахом колебаний*.

Определим период колебаний – промежуток времени, в течение которого точка совершает одно полное колебание, т.е. возвращается в исходное положение с той же по модулю и направлению скоростью. Обозначая период буквой T, находим его из условия того, что приращение фазы колебаний за это время равно 2π:

$$k(t + T) + \beta = kt + \beta + 2\pi,$$

т.е.

$$T = 2\pi/k.$$

Задача 3.3. Точка движется согласно уравнениям

$$x = a\cos(kt - \epsilon), \tag{1}$$

$$y = b\cos kt. \tag{2}$$

Определить уравнение траектории точки. Как меняется траектория точки при увеличении разности фаз ϵ от 0 до 2π?

Решение. Чтобы найти уравнение траектории точки в явной форме, надо из уравнений движения исключить время. Для этого преобразуем первое уравнение движения:

$$x = a\cos(kt - \epsilon) = a\,[\cos kt\cos\epsilon + \sin kt\sin\epsilon]. \tag{3}$$

Решая уравнения (2) и (3) относительно $\cos kt$ и $\sin kt$, находим

$$\cos kt = \frac{y}{b}, \quad \sin kt = \frac{\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\cos\epsilon}{\sin\epsilon}.$$

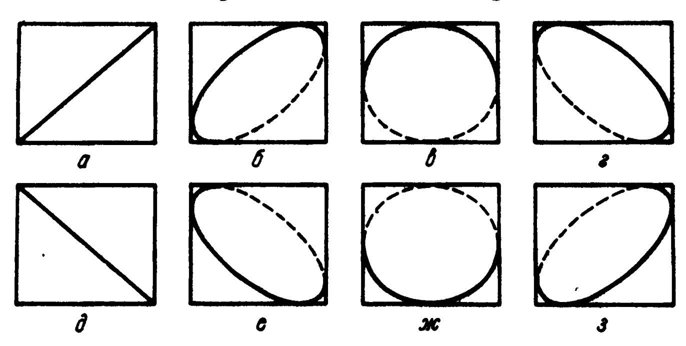
Возведем эти равенства в квадрат и сложим их:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\cos\epsilon\right)^2}{\sin^2\epsilon} = 1$$

или окончательно:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 2\frac{x \cdot y}{a \cdot b}\cos\epsilon = \sin^2\epsilon. \qquad (4)$$

Уравнение (4) при произвольном значении ϵ есть уравнение эллипса. Из этого уравнения видно, что наибольшие и наименьшие значения переменных соответственно будут $\pm a$ для x и $\pm b$ для y. Таким образом, во всех случаях эллипс вписывается в прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$.



К задаче 3.3

Будем теперь менять значения ϵ от 0 до 2π. При $\epsilon = 0$ уравнение (4) принимает следующий вид:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0.$$

Следовательно, когда фазы взаимно перпендикулярных колебаний одинаковы, эллипс вырождается в две совпадающие прямые линии, являющиеся диагональю прямоугольника (рис. *а*).

При увеличении ϵ от 0 до $\pi/2$ эллипс, одна из осей которого совпадает по направлению с диагональю прямоугольника, постепенно расширяется (рис. *б*). При $\epsilon = \pi/2$ уравнение (4) примет вид (рис. *в*)

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

т.е. уравнение эллипса принимает каноническую форму. При дальнейшем увеличении ϵ эллипс снова сужается (рис. *г*) до тех пор, пока при $\epsilon = \pi$ не выродится в другую диагональ прямоугольника (рис. *д*). При этом уравнение (4) принимает вид

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0.$$

Далее, с увеличением ϵ от π до 2π процесс повторяется, являясь зеркальным отображением первой половины процесса (рис. *е, ж, з*).

Если, как в разобранном примере, частоты обоих взаимно перпендикулярных колебаний равны, то разность фаз ϵ остается постоянной и эллиптическая траектория точки неизменна. Если же, как это бывает в большинстве технических приложений, между частотами обоих колебаний существует малая разница, то траектория колеблющейся точки может быть представлена с достаточной точностью одним эллипсом лишь для нескольких периодов. Затем этот эллипс меняется в соответствии с изменением величины ϵ, проходя разобранные выше стадии.

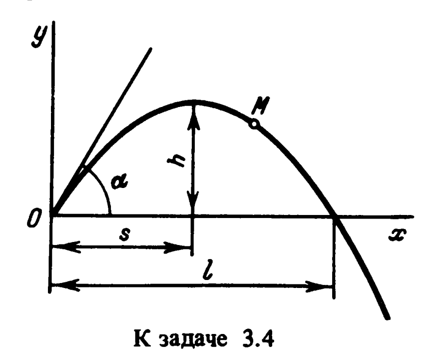
Задача 3.4. Точка *М*, брошенная под углом α к горизонту, если пренебречь сопротивлением воздуха, движется согласно уравнениям:

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t, \tag{1}$$

$$y = v_0 \sin\alpha \cdot t - gt^2/2. \tag{2}$$

В этих уравнениях v_0, α, g – постоянные величины.

Определить уравнение траектории точки, наибольшую высоту h ее подъема над уровнем начального положения, расстояние s по горизонтали, при котором точка достигнет наивысшего положения, а также дальность полета точки по горизонтали l (см. рисунок).



К задаче 3.4

Решение. Для определения уравнения траектории точки в явной форме надо исключить из уравнений движения время. Получив из первого уравнения

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \tag{3}$$

и подставив это выражение в уравнение (2), найдем искомое уравнение траектории

$$y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2. \tag{4}$$

Из аналитической геометрии известно, что это есть уравнение параболы с осью симметрии, параллельной оси y. Действительно, каждому значению y соответствуют два значения x. Эта парабола проходит через начало координат, так как значения координат $x = 0$, $y = 0$ удовлетворяют ее уравнению.

Чтобы определить наибольшую высоту подъема точки h, надо найти по правилам дифференциального исчисления экстремальные значения y. Для этого вычислим производную от y по координате x и приравняем ее нулю; так как $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$, а $\frac{dx}{dt} \neq 0$, то можно ограничиться приравниванием нулю производной

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha - g t_1 = 0. \qquad (5)$$

Следовательно, y достигает экстремального значения при

$$t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}. \qquad (6)$$

Подставляя это значение времени в уравнение (2), находим наибольшую высоту подъема

$$h = y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{g v_0^2 \sin^2\alpha}{2 \cdot g^2} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g}.$$

Это экстремальное значение y будет, действительно, максимумом, а не минимумом, так как вторая производная от y при $t = t_1$ отрицательна: $\ddot{y}\,|_{t = t_1} = -g$.

Для определения абсциссы s, при которой точка достигает наивысшего положения, надо значение времени, соответствующее этому моменту (6), подставить в уравнение (1):

$$s = x_1 = v_0 \cos\alpha \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}.$$

Дальность полета по горизонтали l определится из уравнения траектории (4), если положить в нем $y = 0$:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot x - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} = 0.$$

Отсюда находятся два значения x:

$$x_0 = 0, \quad x_2 = l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Первое значение соответствует начальному моменту (моменту вылета точки), второе значение определяет дальность по горизонтали. Сопоставляя значения l и s, заключаем, что $l = 2s$, т.е. наивысшего положения точка достигает на половине горизонтальной дальности.

Заметим, что искомые дальность и высоту полета можно было найти и не прибегая к дифференцированию. Достаточно было учесть, что траекторией служит парабола, ось которой параллельна оси ординат, причем парабола проходит через начало координат. Действительно, положив в уравнении (4) y равным нулю, находим два значения x, из которых первое равно нулю, а второе определяет дальность полета по горизонтали. Внося в уравнение (4) вместо x величину, равную половине дальности полета, находим максимальную высоту подъема h. Однако первый способ определения дальности и высоты полета путем дифференцирования является более общим.

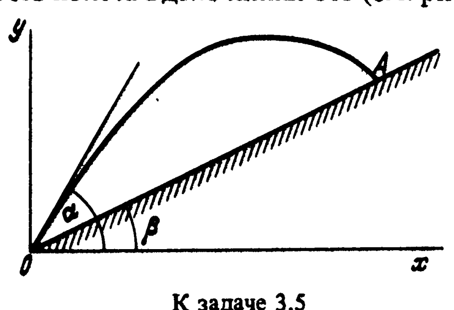
Задача 3.5. Снаряд, вылетающий из ствола орудия, стоящего у подножья возвышенности, поверхность которой наклонена под постоянным углом β к горизонту, движется согласно уравнениям (сопротивлением воздуха пренебрегаем):

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t, \tag{1}$$

$$y = v_0 \sin\alpha \cdot t - gt^2/2, \tag{2}$$

где α – угол между горизонтом и направлением вылета снаряда.

Определить, под каким углом α следует выстрелить, чтобы получить наибольшую дальность полета вдоль линии OA (см. рисунок).



К задаче 3.5

Р е ш е н и е. Исключив время t из уравнений (1) и (2), находим уравнение траектории в явной форме:

$$y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}. \tag{3}$$

Уравнение прямой OA, являющейся проекцией поверхности возвышенности на вертикальную плоскость xy, будет:

$$y = x \operatorname{tg}\beta. \tag{4}$$

Снаряд упадет на землю в точке A, при этом ординаты, определяемые уравнениями (3) и (4), станут равными, следовательно,

$$x \operatorname{tg}\beta = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha},$$

откуда

$$x = (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)\frac{2v_0^2}{g}\cos^2\alpha = \frac{v_0^2}{g}(\sin 2\alpha - 2\cos^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta).$$

Для определения наибольшей дальности в зависимости от угла вылета α вычисляем производную от x по α и приравниваем ее нулю:

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{v_0^2}{g}(2\cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta) = 0,$$

откуда

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = -\operatorname{tg}\beta,$$

или

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + \beta, \quad \alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right).$$

Таким образом, наибольшая дальность будет при угле бросания, равном половине угла между вертикалью (отрицательной осью y) и откосом OA. В этой задаче, в отличие от предыдущей, определение дальности путем дифференцирования является единственным способом, приводящим к цели.

Задача 3.6. Точка, брошенная наклонно к горизонту, движется в воздухе, сопротивление которого пропорционально скорости, согласно уравнениям

$$x = \frac{v_0\cos\alpha}{kg}(1 - e^{-kgt}), \tag{1}$$

$$y = \frac{1}{kg}\left(v_0\sin\alpha + \frac{1}{k}\right)(1 - e^{-kgt}) - \frac{t}{k}. \tag{2}$$

В этих уравнениях v_0, α, k, g – постоянные положительные величины.

Определить уравнение траектории точки, наибольшую высоту h над уровнем начального положения, а также абсциссу, при которой точка достигнет наивысшего положения.

Решение. Для определения уравнения траектории точки в явной форме надо исключить из уравнений движения время. Из (1) находим

$$(1 - e^{-kgt}) = \frac{kg}{v_0 \cos\alpha} x \quad (3)$$

и, далее, после несложных преобразований

$$t = -\frac{1}{kg} \ln\left(1 - \frac{kg}{v_0 \cos\alpha} x\right). \quad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в уравнение (2), получаем уравнение траектории точки в явной форме

$$y = \frac{kv_0 \sin\alpha + 1}{kv_0 \cos\alpha} x + \frac{1}{k^2 g} \ln\left(1 - \frac{kg}{v_0 \cos\alpha} x\right). \quad (5)$$

Для определения наибольшей высоты h над уровнем начального положения надо найти максимум величины y, рассматриваемой как функция координаты x. Для этого, по правилам дифференциального исчисления, необходимо вычислить первую производную от y по координате x и приравнять ее нулю. Так как $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$, а $\frac{dx}{dt} \neq 0$, то можно ограничиться приравниванием нулю производной от координаты y по времени. Найденное из этого уравнения значение независимой переменной – времени t_1 подставляется в уравнение (2), и тем самым находится максимальное или минимальное значение y. Если вторая производная от y по времени в этот момент отрицательна, то найденное экстремальное значение y является максимумом, в противоположном случае – минимумом.

Вычисляем, пользуясь уравнением (2), производную от y по времени и приравниваем ее нулю:

$$\dot{y} = \left(v_0 \sin\alpha + \frac{1}{k}\right) e^{-kgt_1} - \frac{1}{k} = 0.$$

Тогда

$$e^{-kgt_1} = \frac{1}{kv_0 \sin\alpha + 1},$$

или

$$t_1 = \frac{1}{kg} \ln(kv_0 \sin\alpha + 1).$$

Подставляя эти значения в уравнение (2), после несложных преобразо-

ваний находим экстремальное значение

$$y_{max} = h = \frac{v_0 \sin\alpha}{kg} - \frac{1}{k^2 g} \ln(kv_0 \sin\alpha + 1).$$

Для того чтобы убедиться в том, что найденное значение, действительно, является максимальным, вычисляем вторую производную от y по времени

$$\ddot{y} = -kg\left(v_0 \sin\alpha + \frac{1}{k}\right) e^{-kgt}.$$

Вторая производная отрицательна, так как k, g, v_0 – положительные числа, а угол α лежит в первой четверти.

Определим, далее, абсциссу, при которой точка достигнет наивысшего положения. Для этого достаточно в уравнение (1) подставить значение времени t_1, соответствующее наивысшему положению точки. Тогда имеем

$$x_1 = \frac{v_0 \cos\alpha}{kg}\left(1 - \frac{1}{kv_0 \sin\alpha + 1}\right) = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g(kv_0 \sin\alpha + 1)}.$$

Пользуясь уравнением траектории точки (5), можно получить равенство, определяющее горизонтальную дальность полета. Если положить в уравнении (5) координату $y = 0$, то одно из значений x, удовлетворяющее трансцендентному уравнению

$$\frac{kv_0 \sin\alpha + 1}{v_0 \cos\alpha} x + \frac{1}{kg} \ln\left(1 - \frac{kg}{v_0 \cos\alpha} x\right) = 0, \quad (6)$$

будет $x_1 = 0$; это значение соответствует вылету точки из начала координат в начальный момент времени. Второе значение x_2, являющееся корнем уравнения (6), определяет горизонтальную дальность полета. Это значение может быть, в частности, получено путем графического решения уравнения (6). Для этого при известных числовых значениях коэффициентов k, g, v_0, α следует построить функцию

$$f(x) = \frac{kv_0 \sin\alpha + 1}{v_0 \cos\alpha} x + \frac{1}{kg} \ln\left(1 - \frac{kg}{v_0 \cos\alpha} x\right),$$

откладывая по оси абсцисс значения x, а по оси ординат соответствующие им значения $f(x)$. Пересечение этой кривой с осью абсцисс и дает второй корень уравнения (6) – дальность полета по горизонтали. И в этой задаче определение дальности и максимальной высоты возможно только путем дифференцирования.

2. Переход от уравнений движения в декартовых координатах к естественному уравнению движения. Если уравнения движения точки даны в декартовых координатах

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t) \tag{17*}$$

и требуется найти уравнение движения в естественной форме, то необходимо сначала определить траекторию точки, а затем найти закон движения этой точки по траектории.

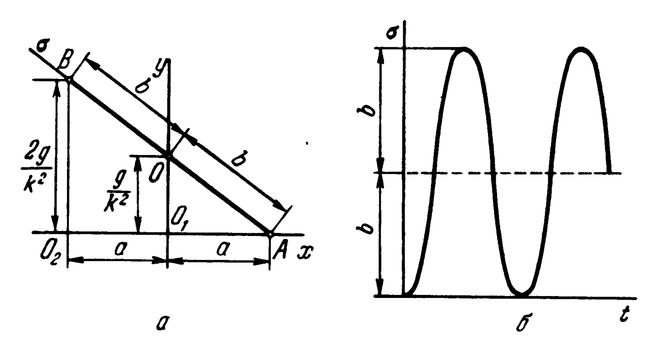
Нахождение уравнений траектории точки производится путем исключения времени из уравнений движения (17*). Для нахождения закона движения $\sigma = f(t)$ необходимо воспользоваться известным выражением для дифференциала дуги

$$\pm d\sigma = ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz^2)} = \sqrt{f_1'^2(t) + f_2'^2(t) + f_3'^2(t)}\,dt. \tag{18*}$$

Интегрируя, находим

$$\sigma = \pm\int\sqrt{f_1'^2(t) + f_2'^2(t) + f_3'^2(t)}\,dt + C. \tag{19*}$$

Произвольная постоянная интегрирования C находится из начальных условий: так, например, если отсчет координаты σ начинается от начального положения точки, то при $t = 0$ $\sigma = 0$. Подставив эти начальные условия в уравнение (19*), определяем C.



К задаче 3.7

Задача 3.7. Точка совершает плоское движение согласно уравнениям

$$x = a\cos kt, \tag{1}$$

$$y = \frac{g}{k^2}(1 - \cos kt). \tag{2}$$

Определить уравнение траектории точки и закон ее движения, отсчитывая расстояние от начального положения.

Решение. Для получения уравнения траектории точки находим из уравнения (1)

$$\cos kt = x/a \tag{3}$$

и подставляем (3) в уравнение (2)

$$y = \frac{g}{k^2}\left(1 - \frac{x}{a}\right). \tag{4}$$

Таким образом, траекторией точки является отрезок прямой линии, определяемой уравнением (4) и дополнительным условием $|x| \leqslant a$, вытекающим из (1).

Для нахождения закона движения точки по траектории имеем

$$dx = -ak \sin kt \cdot dt, \qquad dy = \frac{g}{k^2}\, k \sin kt \cdot dt.$$

Тогда

$$d\sigma = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{a^2 k^2 + \frac{g^2}{k^2}}\, \sin kt \cdot dt.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\sigma = -\sqrt{a^2 k^2 + \frac{g^2}{k^2}} \cdot \frac{1}{k} \cos kt + C. \tag{5}$$

Так как координата σ отсчитывается, по условию задачи, от начального положения точки, то при $t = 0$ $\sigma = 0$. Подставляя эти значения в (5), имеем

$$0 = -\sqrt{a^2 k^2 + \frac{g^2}{k^2}}\, \frac{1}{k} + C,$$

откуда

$$C = \frac{1}{k} \sqrt{a^2 k^2 + \frac{g^2}{k^2}}\, .$$

Внося найденное значение произвольной постоянной C в уравнение (5), находим закон движения точки по траектории

$$\sigma = \frac{1}{k} \sqrt{a^2 k^2 + \frac{g^2}{k^2}}\, (1 - \cos kt).$$

Это – уравнение гармонического колебательного движения точки.

Точка O, около которой совершаются колебания (*центр колебаний*), находится на расстоянии

$$\sigma_1 = \frac{1}{k}\sqrt{a^2k^2 + \frac{g^2}{k^2}}$$

от начального положения. Амплитуда колебаний равна

$$\frac{1}{k}\sqrt{a^2k^2 + \frac{g^2}{k^2}} = b.$$

В момент времени $t = 0$ точка находится в крайнем положении A. В момент времени $t = \pi/(2k)$, когда $\cos kt = 0$, точка находится в центре колебаний, в O. В момент времени $t = \pi/k$, когда $\cos kt = -1$, точка находится во втором крайнем положении, в точке B. Графически движение точки представлено на рисунке. На рис. *а* построена траектория AOB. На рис. *б* представлена зависимость σ от времени.

Размах колебаний равен

$$2b = \frac{2}{k}\sqrt{a^2k^2 + \frac{g^2}{k^2}}.$$

Задача 3.8. Точка M движется согласно уравнениям

$$x = a\cos kt, \qquad (1)$$

$$y = a\sin kt, \qquad (2)$$

$$z = bt, \qquad (3)$$

где a, k, b – постоянные.

Определить уравнения траектории точки и закон движения точки по траектории, отсчитывая расстояние от начального положения точки.

Р е ш е н и е. Для определения уравнений траектории точки находим из уравнения (3) время и вносим это значение в (1) и (2). Тогда

$$x = a\cos\frac{k}{b}z, \qquad y = a\sin\frac{k}{b}z.$$

Это – уравнение винтовой линии. Из уравнений (1), (2) видно, что проекция точки на плоскость xy описывает окружность за время $2\pi/k$. За это время проекция точки на ось z переместиться на величину

$$h = \frac{2\pi}{k}\cdot b,$$

называемую *шагом* винтовой линии. Винтовая линия навивается на поверхность цилиндра радиусом a (см. рисунок).

Для получения закона движения точки по траектории находим

$$dx = -ak \sin kt \cdot dt, \quad dy = ak \cos kt \cdot dt, \quad dz = b\,dt.$$

Тогда дифференциал дуги будет

$$d\sigma = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{a^2k^2 + b^2}\,dt.$$

Интегрируя это равенство, имеем

$$\sigma = \sqrt{a^2k^2 + b^2}\,t + C. \tag{4}$$

Для определения произвольной постоянной интегрирования воспользуемся начальными условиями. При $t = 0$ $\sigma = 0$, так как отсчет дуги начинается одновременно с отсчетом времени. Подставляя эти начальные условия в уравнение (4), находим

$$0 = 0 + C.$$

Таким образом, закон движения точки по винтовой линии запишется в виде

$$\sigma = \sqrt{a^2k^2 + b^2}\,t,$$

если отсчитывать положительные значения дуги против хода часовой стрелки. Движение начинается из точки $x_0 = a$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ и происходит по винтовой линии против хода часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси z.

К задаче 3.8

3. Переход от уравнений движения в полярных и цилиндрических координатах к естественному уравнению движения. Если уравнения движения точки даны в полярных координатах

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t) \tag{20*}$$

и требуется найти уравнение движения в естественной форме, то надо сначала определить траекторию точки, а затем найти закон движения этой точки по траектории.

Уравнения (20*) определяют траекторию движения точки в параметрической форме, причем роль параметра играет время t. Для того чтобы определить траекторию в координатной форме, нужно исключить из уравнений (20*) время t. Для определения закона движения $\sigma = f(t)$ воспользуемся известным выражением для дифференциала дуги:

$$\pm d\sigma = ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi, \tag{21*}$$

где ρ' – производная от радиуса-вектора точки по полярному углу. Полу-

чающаяся в результате интегрирования произвольная постоянная определяется из начальных условий движения.

После интегрирования уравнений (21*) и определения произвольной постоянной интегрирования заменяем полярный угол φ его значением через время согласно (20*) и находим окончательно закон движения точки в естественном виде.

Поскольку в задачах часто бывают заданы полярные координаты как функции времени, можно преобразовать формулу (21*) так, чтобы элемент дуги сразу выражался через параметр – время.

Если $\rho=\rho(t)$ и $\varphi=\varphi(t)$, то

$$\rho' = \frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\dot\rho}{\dot\varphi}, \tag{22*}$$

где точкой обозначены производные по времени. С другой стороны,

$$d\varphi = \dot\varphi\, dt. \tag{23*}$$

Подставив (22*) и (23*) в (21*), получаем

$$ds = \sqrt{\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2}\, dt. \tag{24*}$$

Если уравнения движения точки заданы в цилиндрических координатах (7*)

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad z = z(t),$$

воспользуемся выражением для дифференциала длины дуги пространственной кривой

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}. \tag{25*}$$

Используя зависимости

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z,$$

найдем дифференциалы dx, dy, dz:

$$dx = \frac{dx}{dt}\cdot dt = \frac{d}{dt}(\rho\cos\varphi)dt = (\dot\rho\cos\varphi - \rho\dot\varphi\sin\varphi)dt,$$

$$dy = \frac{dy}{dt}\cdot dt = \frac{d}{dt}(\rho\sin\varphi)dt = (\dot\rho\sin\varphi + \rho\dot\varphi\cos\varphi)dt,$$

$$dz = \frac{dz}{dt}\cdot dt = \dot z\, dt.$$

Подставив полученные выражения dx, dy, dz в (25*), получаем после некоторых преобразований:

$$ds = \sqrt{\dot\rho^2 + (\rho\dot\varphi)^2 + \dot z^2}\, dt. \tag{26*}$$

Задача 3.9. Уравнения движения точки даны в полярных координатах:

$$\rho = be^t, \quad \varphi = t/k. \tag{1}$$

Определить траекторию точки и закон движения точки по траектории.

Решение. Уравнение траектории в полярных координатах найдем, исключив из системы уравнений (1) время:

$$\rho = be^{k\varphi}. \tag{2}$$

Это – уравнение логарифмической спирали.

Переходим к определению уравнения движения точки по траектории. Дифференциал дуги при задании движения точки в полярных координатах определяется выражением

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi, \tag{3}$$

где ρ' – производная от радиус-вектора точки по полярному углу. Из (2) находим

$$\rho' = bke^{k\varphi}. \tag{4}$$

Тогда

$$ds = \sqrt{(be^{k\varphi})^2 + (bke^{k\varphi})^2}\, d\varphi = be^{k\varphi}\sqrt{1+k^2}\, d\varphi. \tag{5}$$

Интегрируя, получим

$$s = b\sqrt{1+k^2} \int e^{k\varphi} d\varphi + C = \frac{b}{k}\sqrt{1+k^2}\, e^{k\varphi} + C, \tag{6}$$

где C – произвольная постоянная интегрирования. Для нахождения C воспользуемся начальными условиями. Если отсчет дуги s вести от начального положения точки: $t = 0$, $s = 0$, то согласно второму уравнению системы $\varphi = 0$ и $s = 0$ при $t = 0$, и тогда, подставляя эти данные в уравнения (6), находим

$$0 = \frac{b}{k}\sqrt{1+k^2} + C, \tag{7}$$

или

$$C = -\frac{b}{k}\sqrt{1+k^2}. \tag{8}$$

Внося это значение произвольной постоянной в (6), получаем уравнение движения точки в естественной форме:

$$s = \frac{b}{k}\sqrt{1+k^2}\,(e^{k\varphi} - 1). \tag{9}$$

Но согласно второму уравнению системы (1)

$$k\varphi = t.$$

Следовательно, уравнение движения точки (9) примет окончательный вид:

$$s = \frac{b}{k}\sqrt{1+k^2}\,(e^t - 1). \tag{10}$$

Итак, точка движется по логарифмической спирали. Движение начинается из положения, определяемого координатами (1):

$$t = 0, \quad \rho_0 = b, \quad \varphi_0 = 0, \tag{11}$$

и происходит согласно закону (10).

Задача 3.10. Движение точки задано в полярных координатах уравнениями

$$r = 2a\cos(kt/2), \quad \varphi = kt/2. \tag{1}$$

Определить траекторию точки и закон движения по траектории.

Решение. Для нахождения траектории исключим из уравнений (1) время:

$$r = 2a\cos\varphi. \tag{2}$$

Это – уравнение окружности в полярных координатах. Если перейти в (2) к декартовым координатам по формулам

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

то получим уравнение

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2, \tag{3}$$

которое определяет окружность радиусом a с центром в точке $(a, 0)$.

Закон движения по траектории получаем, интегрируя выражение элемента длины дуги в полярных координатах, заданных параметрически:

$$ds = \sqrt{\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2}\,dt. \tag{4}$$

Дифференцируя (1) по времени, находим

$$\dot r = -ak\sin\frac{kt}{2}, \quad \dot\varphi = k/2. \tag{5}$$

Подставим (5) в (4):

$$ds = \sqrt{\left(-ak\sin\frac{kt}{2}\right)^2 + \left(ak\cos\frac{kt}{2}\right)^2}\,dt = ak\,dt. \tag{6}$$

Интегрируя (6), получим

$$s = akt + C. \qquad (7)$$

Полагаем, что отсчет расстояния идет от начального положения точки. Внося в уравнение (7) начальные условия: при $t = 0$ $s = 0$, находим $C = 0$ и окончательно

$$s = akt.$$

Задача 3.11. Движение точки задано ее цилиндрическими координатами как функциями времени:

$$\rho = \rho_0(1 + \beta t), \quad \varphi = \varphi_1 \ln(1 + \beta t), \quad z = z_0(1 + \beta t). \qquad (1)$$

Определить траекторию точки и закон движения по траектории.

Р е ш е н и е. Точка движется по пространственной кривой, так что ее траектория в координатной форме задается пересечением двух поверхностей. Исключая время из первого и второго, а затем из первого и третьего уравнений (1), получаем

$$\rho = \rho_0 e^{\varphi/\varphi_1}, \qquad (2)$$

$$\frac{z}{z_0} = \frac{\rho}{\rho_0}. \qquad (3)$$

Траектория – винтовая линия, проекция которой на плоскость, перпендикулярную оси z, является логарифмической спиралью (2). Все лучи наклонены к горизонтальной плоскости под одинаковым углом:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{z}{\rho} = \frac{z_0}{\rho_0} = \text{const}. \qquad (4)$$

Для определения закона движения вдоль траектории преобразуем известную из анализа формулу для элемента дуги пространственной кривой

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \qquad (5)$$

к цилиндрическим координатам. Переход от декартовых координат к цилиндрическим осуществляется равенствами

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z. \qquad (6)$$

Дифференцируем (6):

$$\begin{aligned} dx &= d\rho\cos\varphi - \rho\sin\varphi\, d\varphi, \\ dy &= d\rho\sin\varphi + \rho\cos\varphi\, d\varphi, \\ dz &= dz. \end{aligned} \qquad (7)$$

Подставляем (7) в (5):

$$ds = \sqrt{(d\rho)^2 + \rho^2(d\varphi)^2 + (dz)^2}. \tag{8}$$

При параметрическом задании ρ, φ и z

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad z = z(t) \tag{9}$$

дифференциалы (7) примут вид

$$\begin{aligned} dx &= \dot\rho\cos\varphi\, dt - \rho\sin\varphi\dot\varphi dt,\\ dy &= \dot\rho\sin\varphi\, dt + \rho\cos\varphi\dot\varphi dt,\\ dz &= \dot z\, dt, \end{aligned} \tag{10}$$

а формула (8) перейдет в

$$ds = \sqrt{\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2}\, dt. \tag{11}$$

Находим необходимые производные по времени из условия задачи:

$$\dot\rho = \beta\rho_0, \quad \dot\varphi = \frac{\varphi_1\beta}{1+\beta t}, \quad \dot z = z_0\beta. \tag{12}$$

Подставляем эти производные в (11):

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(\beta\rho_0)^2 + \frac{\rho_0^2(1+\beta t)^2\varphi_1^2\beta^2}{(1+\beta t)^2} + (z_0\beta)^2} =$$

$$= \beta\sqrt{\rho_0^2 + \rho_0^2\varphi_1^2 + z_0^2} = \text{const} = C_0. \tag{13}$$

Интегрируя, находим

$$s = C_0 t + C_1 \tag{14}$$

и окончательно

$$s = \beta t\sqrt{\rho_0^2 + \rho_0^2\varphi_1^2 + z_0^2} + C_1. \tag{15}$$

Произвольная постоянная интегрирования C_1 определяется по начальным условиям движения.

Задача 3.12. Движение точки задано в цилиндрических координатах уравнениями

$$r = a, \quad \varphi = kt, \quad z = bt. \tag{1}$$

Определить траекторию точки и закон движения по траектории.

Решение. О виде траектории можно судить по виду уравнений движения точки (1) – радиус-вектор точки сохраняет постоянную длину, угол φ равномерно увеличивается со временем, равномерно растет и координата z. Точка все время остается на поверхности цилиндра радиусом a, обходя цилиндр и одновременно поднимаясь по нему. Траекторией точки

служит винтовая линия на поверхности цилиндра. Элемент длины дуги в цилиндрических координатах имеет вид

$$ds = \sqrt{dr^2 + (r\,d\varphi)^2 + dz^2}, \tag{2}$$

или, после перехода к параметру t,

$$ds = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}\,dt. \tag{3}$$

Находим необходимые производные:

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{\varphi} = k, \quad \dot{z} = b. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3), получаем

$$ds = \sqrt{a^2k^2 + b^2}\,dt. \tag{5}$$

Интегрируя, имеем

$$s = \sqrt{a^2k^2 + b^2}\,t + C. \tag{6}$$

Произвольная постоянная интегрирования находится из начального условия

$$s|_{t=0} = 0 \tag{7}$$

и оказывается равной нулю.

Итак, окончательно

$$s = \sqrt{a^2k^2 + b^2}\,t. \tag{8}$$

Задача 3.13. Точка движется по поверхности конуса

$$r^2 - z^2 = 0 \tag{1}$$

согласно уравнениям

$$r^2 = a^2(e^{2t} + e^{-2t}), \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) = e^{2t}. \tag{2}$$

Найти траекторию точки и закон движения точки по траектории.

Р е ш е н и е. Для нахождения уравнения траектории исключаем время t из уравнений (2):

$$r^2 = a^2\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{2a^2}{\sin 2\left(\frac{\varphi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2a^2}{\cos(\varphi\sqrt{2})}. \tag{3}$$

Уравнение траектории, согласно (3) и (1), имеет вид

$$r = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\cos(\varphi\sqrt{2})}}, \quad z = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\cos(\varphi\sqrt{2})}}. \tag{4}$$

Уравнения (1) и (2) определяют две поверхности, заданные в цилиндрической системе координат. Траектория точки – линия пересечения этих поверхностей.

Чтобы определить путь как функцию времени, найдем сначала дифференциал дуги кривой ds.

В цилиндрических координатах дифференциал дуги кривой выражается формулой

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + (r\,d\varphi)^2 + (dz)^2}. \tag{5}$$

Переходя к параметру t, получим формулу

$$ds = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}\,dt, \tag{6}$$

которую и применим в данной задаче. Находим выражения для r, φ и z:

$$r = a\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}, \quad \varphi = \sqrt{2}\left(\operatorname{arctg} e^{2t} - \frac{\pi}{4}\right), \quad z = a\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}. \tag{7}$$

Находим производные этих переменных по времени:

$$\begin{gathered}\dot{r} = \frac{2e^{2t} - 2e^{-2t}}{2\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}}\,a = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}}\,a, \quad \dot{\varphi} = \frac{2\sqrt{2}\,e^{2t}}{1 + e^{4t}}, \\ \dot{z} = \frac{2e^{2t} - 2e^{-2t}}{2\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}}\,a = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}}\,a.\end{gathered} \tag{8}$$

Подставляя производные (8) в (6), получаем

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{\frac{(e^{2t} - e^{-2t})^2 \cdot a^2}{e^{2t} + e^{-2t}} \cdot 2 + a^2(e^{2t} + e^{-2t})\,\frac{8e^{4t}}{(1 + e^{4t})^2}}\,dt = \\ &= a\sqrt{\frac{2e^{-2t}(e^{4t} + 1)^3}{(e^{4t} + 1)^2}}\,dt = a\sqrt{2}\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}\,dt. \end{aligned} \tag{9}$$

Путь, пройденный точкой по траектории, выражается интегралом

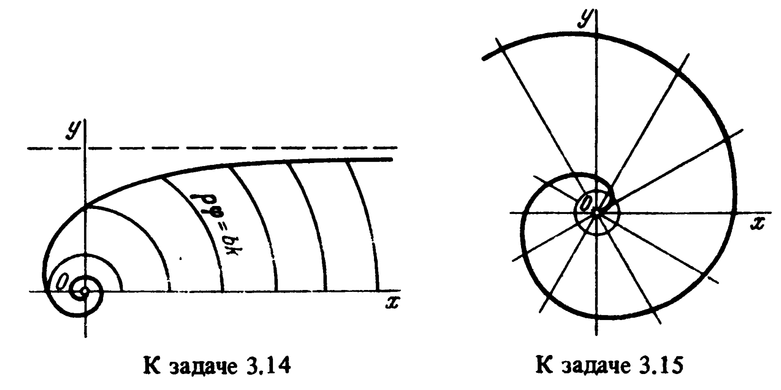
$$s = a\sqrt{2}\int_0^t \sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}\,dt. \tag{10}$$

Этот интеграл может быть вычислен на ЭВМ.

Задача 3.14. Уравнения движения точки даны в полярных координатах:

$$\rho = bt, \quad \varphi = k/t. \tag{1}$$

Определить траекторию точки и закон движения точки по траектории.



К задаче 3.14 К задаче 3.15

Решение. Уравнение траектории в полярных координатах находим, исключая из уравнений (1) время:

$$\rho = bk/\varphi. \tag{2}$$

Это – гиперболическая спираль (см. рис.). Асимптотой спирали служит прямая, параллельная оси абсцисс (оси $\varphi = 0$):

$$y = bk.$$

Дифференциал длины дуги при задании движения в полярной системе координат определяется формулой

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi, \tag{3}$$

где $\rho' = d\rho/d\varphi$ – производная радиуса-вектора по полярному углу.

Дифференцируя (2) по φ, получаем

$$\rho' = -\frac{bk}{\varphi^2}. \tag{4}$$

Подставляя в выражение (3) выражения (2) и (4), получаем

$$ds = \sqrt{\left(\frac{bk}{\varphi}\right)^2 + \left(-\frac{bk}{\varphi^2}\right)^2}\, d\varphi = \frac{bk}{\varphi^2}\sqrt{\varphi^2 + 1}\, d\varphi. \tag{5}$$

Интегрируя выражение (5), получаем

$$s = \int_0^{\varphi} \frac{bk}{\varphi^2}\sqrt{\varphi^2 + 1}\, d\varphi = bk\left[-\frac{\sqrt{\varphi^2 + 1}}{\varphi} + \ln(\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1} + C)\right]. \tag{6}$$

11 Заказ № 899

Учитывая, что $\varphi = k/t$, получаем

$$s = bk\left[-\frac{\sqrt{k^2+t^2}}{k} + \ln\frac{k+\sqrt{k^2+t^2}}{t} + C\right]. \tag{7}$$

Для нахождения произвольной постоянной интегрирования C требуется задать некоторое значение пути s_0, пройденного к моменту времени t_0 (при условии, что $t_0 \neq 0$, так как этому значению времени соответствует $\varphi = \infty$).

Задача 3.15. Уравнения движения точки даны в полярных координатах:

$$\rho = bt, \quad \varphi = kt. \tag{1}$$

Найти уравнение траектории и закон движения точки по траектории.

Решение. Исключая из уравнений (1) время, получаем связь между ρ и φ:

$$\rho = \frac{b}{k}\varphi. \tag{2}$$

Траектория представляет собой спираль Архимеда (см. рис.).

Найдем выражение для дифференциала дуги, который равен

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi. \tag{3}$$

Дифференцируя уравнение (2), получим

$$\rho' = \frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{b}{k}. \tag{4}$$

Подставим (2) и (4) в (3):

$$ds = \frac{b}{k}\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi. \tag{5}$$

Интегрируя выражение (5), получим

$$s = \frac{b}{k}\,\frac{1}{2}\left[\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + \ln(\varphi + \sqrt{\varphi^2+1})\right] + C. \tag{6}$$

Пусть отсчет расстояния s начинается с момента $t = 0$, при котором $\varphi = 0$, тогда, подставляя начальные условия в (6), имеем

$$C = 0.$$

Подставляя произвольную постоянную в выражение (6), получаем зависимость $s = s(\varphi)$:

$$s = \frac{b}{2k}\left[\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + \ln(\varphi + \sqrt{\varphi^2+1})\right]. \tag{7}$$

Учитывая, что $\varphi = kt$, получаем зависимость $s = s(t)$:

$$s = \frac{b}{2k}\,[kt\sqrt{k^2t^2+1} + \ln(kt + \sqrt{k^2t^2+1})]. \tag{8}$$

Формулу (8) можно получить, учитывая, что $\rho' = d\rho/d\varphi = \dot\rho/\dot\varphi$. В этом случае выражение для дифференциала дуги запишется в таком виде:

$$ds = \sqrt{\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2}\,dt. \tag{9}$$

Дифференцируя (1), получаем

$$\dot\rho = b, \quad \dot\varphi = k, \quad d\varphi = \dot\varphi\,dt = k\,dt. \tag{10}$$

Подставим формулы (10) в выражение (9)

$$ds = \sqrt{b^2 + (bt)^2k^2}\,dt = b\sqrt{1+k^2t^2}\,dt. \tag{11}$$

Интегрируем (11):

$$s = \int b\sqrt{1+k^2t^2}\,dt = bk\int\sqrt{\frac{1}{k^2} + t^2}\,dt =$$

$$= bk\left[\frac{t}{2}\sqrt{\frac{1}{k^2} + t^2} + \frac{1}{2k^2}\ln\left(t + \sqrt{\frac{1}{k^2} + t^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{b}{2k}\,[kt\sqrt{k^2t^2+1} + \ln(kt + \sqrt{k^2t^2+1}) - \ln k] + C_1. \tag{12}$$

При $t = 0$ пройденный путь равен нулю, т.е. $s = 0$. Подставив эти значения в уравнение (12), найдем произвольную постоянную интегрирования:

$$C_1 = \frac{b}{2k}\ln k.$$

Подставив это значение произвольной постоянной в (12), опять получаем выражение (8):

$$s = \frac{b}{2k}\,[kt\sqrt{k^2t^2+1} + \ln(kt + \sqrt{k^2t^2+1})].$$

Оба варианта решения этой задачи равноценны.

Задача 3.16. Уравнения движения точки даны в полярных координатах,

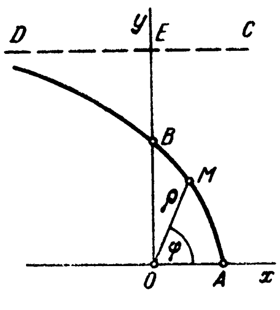
$$\rho\sin\varphi = kt, \quad \varphi = bt. \tag{1}$$

Определить траекторию точки и закон движения точки по траектории.

Решение. Исключая время из уравнений (1), получаем связь между ρ и φ в виде

$$\rho = \frac{k}{b}\,\frac{\varphi}{\sin\varphi}\,. \tag{2}$$

Это и есть уравнение траектории точки в полярной системе координат. Уравнение (2) – трансцендентное.



К задаче 3.16

Используя связь между декартовыми и полярными системами координат

$$y = \rho\sin\varphi, \qquad \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \varphi,$$

можно записать уравнение траектории точки в декартовой системе координат:

$$y = \frac{k}{b}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,. \tag{3}$$

Вид траектории, построенной по точкам, показан на рисунке. Асимптотой траектории служит прямая $y = \pi k/b$, показанная на рисунке (CD). Кривая называется квадратисой.

Найдем теперь дифференциал дуги для того, чтобы найти закон движения точки по траектории.

Дифференциал длины дуги равен:

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi, \tag{4}$$

где ρ' – производная радиуса-вектора по полярному углу.

Дифференцируем (2):

$$\rho' = \frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{k}{b}\left(\frac{\sin\varphi - \varphi\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\right). \tag{5}$$

Подставляя (5) и (2) в (4), получим

$$ds = \sqrt{\left(\frac{k\varphi}{b\sin\varphi}\right)^2 + \frac{k^2}{b^2}\left(\frac{\sin\varphi - \varphi\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\right)^2}\,d\varphi. \qquad (6)$$

Используя то, что $\varphi = bt$, и помня, что $d\varphi = \dot{\varphi}dt$, переходим в уравнении (6) к переменной t:

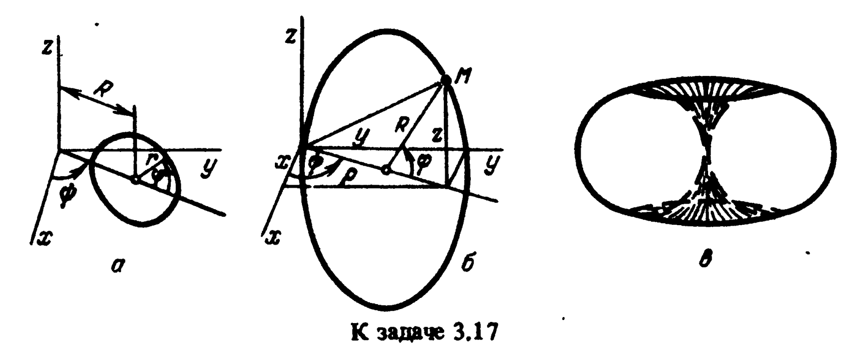
$$ds = \sqrt{\left(\frac{kbt}{b\sin bt}\right)^2 + \frac{k^2}{b^2}\left(\frac{\sin bt - bt\cos bt}{\sin^2 bt}\right)^2}\,b\,dt =$$

$$= \sqrt{\frac{k^2t^2}{\sin^2 bt} + \frac{k^2}{b^2}\left(\frac{1}{\sin^2 bt} - \frac{2bt\cos bt}{\sin^3 bt} + \frac{b^2t^2\cos^2 bt}{\sin^4 bt}\right)}\,b\,dt =$$

$$= \sqrt{t^2\sin^2 bt + \frac{\sin^2 bt}{b^2} - \frac{2t\cos bt\sin bt}{b} + t^2\cos^2 bt}\,\frac{kb}{\sin^2 bt}\,dt =$$

$$= \frac{k}{\sin^2 bt}\sqrt{t^2b^2 + \sin^2 bt - tb\sin 2bt}\,dt.$$

Вычислить интеграл (6), в котором трансцендентная функция стоит под знаком интеграла, в конечном виде не представляется возможным. Однако его вычисление может быть легко осуществлено на ЭВМ.



К задаче 3.17

Задача 3.17. Точка движется по винтовой линии, намотанной на тор, согласно уравнениям

$$r = R, \quad \varphi = kt, \quad \psi = \omega t, \qquad (1)$$

где r, φ, ψ – тороидальные координаты, показанные на рис. *а*, а R – радиус тора и одновременно радиус круговой оси тора.

Определить уравнения движения в декартовой и цилиндрической системах координат, а также найти закон движения по траектории.

Р е ш е н и е. В данной задаче тор имеет вид "бублика без дырки" (рис. *в*). Изобразим (рис. *б*) произвольное сечение тора и перейдем к цилиндрическим и декартовым координатам. Для произвольной точки по рис. *б* устанавливаются зависимости

$$\rho = R + R\cos\varphi = R(1+\cos kt), \quad \psi = \omega t, \quad z = R\sin\varphi = R\sin kt, \tag{2}$$

а также

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\psi = R(1+\cos kt)\cos\omega t,\\ y &= \rho\sin\psi = R(1+\cos kt)\sin\omega t,\\ z &= R\sin\varphi = R\sin kt. \end{aligned} \tag{3}$$

Элемент длины дуги можно вычислить в любой из систем координат:

$$ds = \sqrt{\dot\rho^2 + \rho^2\dot\psi^2 + \dot z^2}\,dt = \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2}\,dt. \tag{4}$$

Производные от (2) по времени

$$\dot\rho = Rk(-\sin kt), \quad \dot\psi = \omega, \quad \dot z = kR\cos kt.$$

Внося эти значения производных в (4), получаем

$$ds = \sqrt{R^2k^2\sin^2 kt + R^2(1+\cos kt)^2\omega^2 + R^2k^2\cos^2 kt}\,dt =$$

$$= R\sqrt{k^2 + \omega^2(1+\cos kt)^2}\,dt = R\sqrt{k^2 + \omega^2 4\cos^4\frac{kt}{2}}\,dt.$$

Интегрируя, находим уравнение движения точки по траектории:

$$s = R\int_0^t \sqrt{k^2 + 4\omega^2\cos^4\frac{kt}{2}}\,dt. \tag{5}$$

В уравнении (5) мы полагаем, что при $t = 0$ точка находилась в начале отсчета длины дуги.

4. Переход от уравнений движения в сферических координатах к естественному уравнению движения. Если движение точки задано уравнениями в сферических координатах (13*)

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad \theta = \theta(t)$$

и требуется определить уравнение движения в естественной форме, то надо сначала определить траекторию точки, а затем найти закон движения точки по траектории.

Уравнения (13*) задают траекторию точки в параметрической форме, параметром является время t. Для того чтобы определить траекторию в координатной форме, надо исключить из уравнений (13*) время t. Для определения закона движения точки по траектории $\rho = \rho(t)$ воспользуем-

ся выражением для дифференциала длины дуги

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

и формулами (11*):

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \quad z = \rho \cos\theta.$$

Вычислим dx, dy и dz:

$$dx = \frac{d}{dt}(\rho \sin\theta \cos\varphi)dt = (\dot{\rho} \sin\theta \cos\varphi + \rho\dot{\theta} \cos\theta \cos\varphi -$$

$$- \rho\dot{\varphi} \sin\theta \sin\varphi)dt,$$

$$dy = \frac{d}{dt}(\rho \sin\theta \sin\varphi)dt = (\dot{\rho} \sin\theta \sin\varphi + \rho\dot{\theta} \cos\theta \sin\varphi +$$

$$+ \rho\dot{\varphi} \sin\theta \cos\varphi)dt,$$

$$dz = \frac{d}{dt}(\rho \cos\theta)dt = (\dot{\rho} \cos\theta - \rho\dot{\theta} \sin\theta)dt.$$

Подставив найденные выражения dx, dy и dz в формулу для ds, получим после ряда преобразований:

$$ds = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\theta})^2 + (\rho\dot{\varphi} \sin\theta)^2}\,dt. \tag{27*}$$

Задача 3.18. Точка движется согласно уравнениям

$$\rho = R = \text{const}, \quad \varphi = kt/2, \quad \theta = 90^\circ - kt/2. \tag{1}$$

Определить траекторию точки и естественное уравнение движения точки по траектории.

Р е ш е н и е. Уравнение траектории найдем, исключив из уравнений движения (1) время:

$$R = \text{const}, \quad \theta = 90^\circ - \varphi. \tag{2}$$

Воспользовавшись формулой (27*), с учетом заданных величин (1) получим

$$ds = \frac{kR}{2}\sqrt{1 + \cos^2\frac{kt}{2}}\,dt. \tag{3}$$

Интеграл от (3) приводится к эллиптическому интегралу второго рода, который в конечном виде не берется. Имеются таблицы значений этого интеграла.

Задача 3.19. Движение точки задано ее сферическими координатами

$$\rho = 2t^2, \quad \varphi = \pi t/4, \quad \theta = \pi t/4. \tag{1}$$

Найти уравнение траектории точки и уравнение движения в естественной форме.

Решение. Уравнение траектории определяется подстановкой времени

$$t = 4\varphi/\pi \tag{2}$$

в первое и третье уравнения движения (1):

$$\rho = 32\varphi^2/\pi^2, \quad \varphi = \theta. \tag{3}$$

Уравнения (3) являются уравнениями траектории точки.

Переходим к определению уравнения движения в естественном виде. Для этого воспользуемся формулой (27*)

$$ds = \sqrt{\dot\rho^2 + (\rho\dot\theta)^2 + (\rho\dot\varphi\sin\theta)^2}\,dt. \tag{4}$$

Из уравнений (1) находим

$$\dot\rho = 4t, \quad \dot\theta = \pi/4, \quad \dot\varphi = \pi/4. \tag{5}$$

Тогда, внося найденные значения переменных в (27*), получим

$$ds = \sqrt{16t^2 + 4t^4\frac{\pi^2}{16} + 4t^4\frac{\pi^2}{16}\sin^2\frac{\pi t}{4}}\,dt. \tag{6}$$

Интегрирование этого уравнения может быть проведено на ЭВМ.

Указание. Для приобретения навыков в решении задач на составление и исследование уравнений движения и определение траекторий точки рекомендуется решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 10.1–10.8, 10.10, 10.13, 10.14, 10.18, 10.19, 10.22, 10.23.

§2. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ

Скорость точки есть производная по времени от радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$, определяющего ее положение в пространстве. Скорость точки характеризует изменение ее положения во времени

$$\mathbf{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}, \tag{1*}$$

где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ – орты осей x, y, z. Проекции скорости на оси неподвижных декартовых координат равны

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot x, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot y, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot z. \tag{2*}$$

Модуль скорости дается формулой

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \qquad (3^*)$$

Направление скорости определяется направляющими косинусами:

$$\cos(\widehat{\mathbf{v}, x}) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\widehat{\mathbf{v}, y}) = \frac{v_y}{v}, \quad \cos(\widehat{\mathbf{v}, z}) = \frac{v_z}{v}. \qquad (4^*)$$

Скорость направлена по касательной к траектории.

Ускорение точки есть производная от скорости по времени или вторая производная от радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ по времени. Ускорение точки является мерой, характеризующей быстроту изменения скорости:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}. \qquad (5^*)$$

Проекции ускорения на неподвижные декартовы оси координат равны

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}. \qquad (6^*)$$

Модуль ускорения вычисляется по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (7^*)$$

Направление ускорения определяется направляющими косинусами:

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, x}) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(\widehat{\boldsymbol{a}, y}) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos(\widehat{\boldsymbol{a}, z}) = \frac{a_z}{a}. \qquad (8^*)$$

Если уравнение движения задано в естественной форме, то скорость точки равна

$$\mathbf{v} = \frac{d\sigma}{dt}\vec{\tau} = v_\tau\vec{\tau}, \qquad (9^*)$$

где $\vec{\tau}$ — орт касательной, направленный в сторону увеличения σ; v_τ — проекция скорости на касательную, равная

$$v_\tau = \frac{d\sigma}{dt} = \dot{\sigma}. \qquad (10^*)$$

Если $v_\tau > 0$, то точка движется в сторону увеличивающихся значений σ. Если $v_\tau < 0$, то точка движется в противоположную сторону, в направлении уменьшающихся значений σ.

Ускорение в этом случае определяется через проекции на естественные оси координат. *Естественными осями координат*, или *натуральным триэдром траектории*, называется ортогональная (прямоугольная) система координат, состоящая из осей: а) *касательной*, направленной в сторону

возрастания дуговой координаты, б) *главной нормали*, направленной в сторону вогнутости траектории, и в) *бинормали*, направленной так, чтобы три оси составляли правую систему координат (рис. 3.8).

Плоскость, в которой расположены касательная и главная нормаль, называется соприкасающейся, или плоскостью кривизны в данной точке кривой. Плоскость, в которой лежат главная нормаль и бинормаль, называется нормальной плоскостью. Нормальная плоскость перпендикулярна к соприкасающейся плоскости. Плоскость, перпендикулярная к главной нормали, называется спрямляющей плоскостью. Если кривая плоская, то соприкасающаяся плоскость совпадает с плоскостью кривой.

При переходе от одной точки траектории к другой естественные оси, оставаясь между собой ортогональными, непрерывно поворачиваются, сопровождая движущуюся точку.

Ускорение точки лежит в соприкасающейся плоскости и определяется как векторная сумма *касательного и нормального ускорения* точки:

$$a = a_\tau + a_n. \qquad (11^*)$$

Проекция ускорения на касательную дается формулой

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}. \qquad (12^*)$$

Касательное ускорение характеризует изменение скорости по величине. Оно равно нулю, когда значение скорости остается неизменным. Кроме того, оно обращается в нуль в те моменты времени, когда скорость достигает экстремальных значений.

Модуль нормального ускорения определяется формулой

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}, \qquad (13^*)$$

где ρ — радиус кривизны траектории. Нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению. Оно равно нулю при прямолинейном движении точки, а также в точках перегиба траектории, так как в обоих случаях радиус кривизны обращается в бесконечность. Кроме того, нормальное ускорение обращается в нуль в точках, где $v = 0$. Модуль ускорения вычисляется при помощи формулы

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\dot{v}_\tau^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}. \qquad (14^*)$$

Направление ускорения определяется направляющими косинусами:

$$\cos(\widehat{a, \vec{\tau}}) = \frac{\dot{v}_\tau}{a}, \quad \cos(\widehat{a, n}) = \frac{v^2}{\rho a}. \qquad (15^*)$$

Важными частными случаями движения являются равномерное и равнопеременное движения. При равномерном движении скорость постоянна. Уравнение равномерного движения

$$\sigma = \sigma_0 + v_\tau t, \tag{16*}$$

где σ – дуговая координата точки, отсчитываемая от начала координат, а σ_0 – значение дуговой координаты при $t = 0$. При равнопеременном

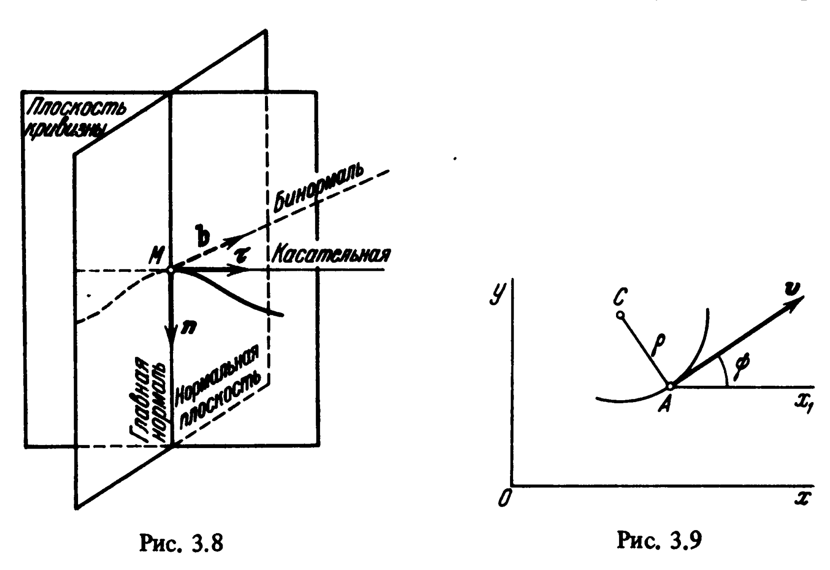


Рис. 3.8

Рис. 3.9

движении касательное ускорение точки постоянно. Уравнение равнопеременного движения будет

$$\sigma = \sigma_0 + v_0 t + a_\tau t^2/2. \tag{17*}$$

Зависимость скорости от времени в равнопеременном движении определяется уравнением

$$v_\tau = v_0 + a_\tau t. \tag{18*}$$

Если $a_\tau > 0$, то движение, определяемое уравнениями (17*) и (18*), является равноускоренным, если же $a_\tau < 0$, то это движение равнозамедленное (при $v_\tau > 0$). Вообще при ускоренном движении касательное ускорение совпадает по знаку с проекцией скорости на касательную. При замедленном движении касательное ускорение и проекция скорости на касательную имеют противоположные знаки.

Зависимость между скоростью и пройденным путем при равнопеременном движении определяется формулой Галилея (1564–1642)

$$v_\tau^2 = v_0^2 + 2a_\tau(\sigma - \sigma_0).$$

Часто в задачах требуется найти радиус кривизны траектории. Радиус кривизны траектории может быть определен из формулы (13*)

$$\rho = v^2/a_n. \tag{19*}$$

Если уравнения движения заданы в декартовых координатах, то при помощи формул (3*) и (7*) следует найти скорость и ускорение точки, затем найти значение касательного ускорения по формуле (12*). Тогда из соотношения (14*) определяются нормальное ускорение и, далее, при помощи (19*) радиус кривизны траектории.

При движении точки по плоской кривой радиус кривизны траектории и нормальное ускорение точки могут быть определены другим способом, нашедшим в последнее время широкое применение в инженерной практике.

Обозначим угол, составленный касательной к траектории (или, что то же, скоростью) с некоторым неизменным направлением, буквой ψ (рис. 3.9). Тогда радиус кривизны равен

$$\rho = \frac{v}{|\dot\psi|}, \tag{20*}$$

где $\dot\psi = \dfrac{d\psi}{dt} = \dfrac{d\psi}{d\sigma}\dfrac{d\sigma}{dt}$ и, следовательно, нормальное ускорение равно

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = v|\dot\psi|. \tag{21*}$$

В этом параграфе решаются задачи на определение скорости, ускорения точки, нахождение радиуса кривизны траектории по известным уравнениям движения точки. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям движения сводится к дифференцированию уравнений движения и может быть всегда выполнено как при аналитическом, так и при графическом задании движения точки. Одновременно могут быть получены другие данные, характеризующие движение точки: ее положение в любой момент времени, наибольшее и наименьшее значения скорости и ускорения и т.д.

Указание. При решении задач на определение скоростей и ускорений полезно придерживаться следующего порядка:

1) выбрать систему координат;

2) составить уравнения движения точки в избранной системе координат;

3) по уравнениям движения точки определить проекции скорости на оси координат и скорость по модулю и направлению;

4) зная проекции скорости, определить проекции ускорения на оси координат и ускорение по модулю и направлению.

Если траектория точки задана по условию задачи, то целесообразно применить естественную форму уравнений движения и искать ускорение точки через проекции на оси натурального триэдра.

В этом параграфе решаются также задачи на определение уравнений движения точки и ее траектории, если известно ее ускорение.

Указание. При решении задач на определение уравнений движения точки и ее траектории рекомендуется такая последовательность действий:

1) выбрать систему координат;

2) составить проекции ускорения на эти оси;

3) проинтегрировать полученные зависимости и найти проекции скорости;

4) в найденных выражениях определить произвольные постоянные интегрирования, пользуясь известными значениями проекций скорости в некоторый момент времени;

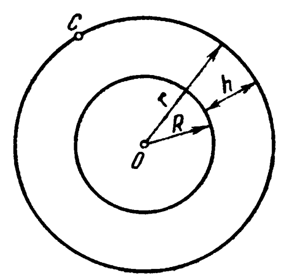
5) проинтегрировать полученные зависимости для проекций скорости и получить уравнения движения точки;

6) определить произвольные постоянные интегрирования, пользуясь значениями координат точки в некоторый момент времени;

7) исключив из уравнений движения время, получить уравнение траектории в координатной форме.

1. Скорость и ускорение точки в декартовых и естественных координатах.

Задача 3.20. Первый искусственный спутник, запущенный 4 октября 1957 г. в СССР, имел скорость v, равную 8 км/с, и период обращения T, равный 1 ч 36 мин, или 5760 с по отношению к системе координат, начало



К задаче 3.20

которой совпадает с центром Земли, а оси сохраняют свои направления в пространстве неизменными.

Определить высоту полета спутника над поверхностью Земли, полагая его орбиту круговой, а движение равномерным. Радиус Земли принять равным R = 6370 км (см. рисунок).

Решение. Обозначим буквой r радиус орбиты спутника, проведенный из центра Земли, буквой h – искомую высоту спутника над поверхностью Земли.

Путь s, проходимый спутником за один период обращения, равен произведению времени T, затраченного на один оборот, на скорость движе-

ния спутника v. С другой стороны, этот же путь равен длине окружности радиуса r. Таким образом,

$$vT = 2\pi r,$$

откуда

$$r = \frac{vT}{2\pi} \approx 7340 \text{ км}.$$

Далее, находим искомую высоту полета над поверхностью Земли:

$$h = r - R = 7340 - 6370 = 970 \text{ км}.$$

Задача 3.21. Судно для достройки на плаву спускается на воду по смазанным полозьям с постоянным ускорением. Первый метр пути судно прошло за 1 с.

Сколько времени потребовалось для спуска судна, если длина полозьев 400 м?

Решение. Уравнение движения судна по полозьям

$$s = at^2/2,$$

где s — пройденный путь, a — ускорение, t — время.

Применим эту формулу к первому участку пути, когда судно прошло 1 м за 1 с

$$s_1 = at_1^2/2;$$

здесь $s_1 = 1$ м, а $t_1 = 1$ с. Аналогично для спуска судна по полозьям в воду

$$s_2 = at_2^2/2,$$

где $s_2 = 400$ м, t_2 — искомое время.

Для определения t_2 составим отношение

$$s_2/s_1 = t_2^2/t_1^2,$$

откуда

$$t_2 = t_1\sqrt{\frac{s_2}{s_1}} = 1 \cdot \sqrt{\frac{400}{1}} = 20 \text{ с}.$$

Задача 3.22. Подводная лодка, не имевшая хода, погружается на глубину согласно уравнению

$$x = \frac{p}{ks}\left[t - \frac{m}{ks}\left(1 - e^{-\frac{ks}{m}t}\right)\right],$$

где p, k, s, m — постоянные коэффициенты, s — площадь горизонтальной проекции лодки. Ось x направлена по вертикали вниз.

Определить скорость лодки, а также начальное и максимальное значения скорости при неограниченном возрастании времени.

Решение. Для определения скорости вычисляем производную от x по времени:

$$v = \left| \frac{dx}{dt} \right| = \frac{p}{ks}\left(1 - e^{-\frac{ks}{m}t}\right). \tag{1}$$

Начальное значение модуля скорости находим, подставляя в уравнение (1) значение $t = 0$. Тогда $v_0 = 0$.

Максимальное значение скорости лодки при неограниченном возрастании времени будет $v_\infty = \lim\limits_{t \to \infty} v = \dfrac{p}{ks}$. При реальном движении лодки время ограничено, и поэтому максимальное значение скорости никогда не достигается.

Задача 3.23. Корабль движется согласно уравнению

$$\sigma = \left(1272{,}7 \ln \frac{1 + 6e^{0{,}055t}}{7} - 50t\right) \text{ м}. \tag{1}$$

Определить начальную скорость судна.

Решение. Для определения скорости вычисляем абсолютное значение производной дуговой координаты по времени:

$$v = \left| \frac{d\sigma}{dt} \right| = 1272{,}7 \frac{7}{1 + 6e^{0{,}055t}} \cdot \frac{6}{7}\, 0{,}055 e^{0{,}055t} - 50 =$$

$$= \frac{420}{1 + 6e^{0{,}055t}} e^{0{,}055t} - 50. \tag{2}$$

Начальная скорость судна определится из (2) при подстановке $t = 0$, откуда $v_0 = 10$ м/с.

Задача 3.24. Частица, несущая электрический заряд e, движется в однородном электрическом поле с переменной напряженностью $E = A \sin kt$, где A и k — постоянные коэффициенты. Уравнение движения частицы имеет вид

$$x = \frac{eA}{mk}\left(t - \frac{\sin kt}{k}\right),$$

где m — постоянная величина.

Определить скорость точки, ее начальное значение, а также наибольшее и наименьшее значения скорости.

Решение. Для нахождения скорости вычисляем производную от x по времени

$$v = \left| \frac{dx}{dt} \right| = \frac{eA}{mk} (1 - \cos kt). \qquad (1)$$

Подставляя в уравнение (1) начальное значение времени $t = 0$, получим, что

$$v_0 = 0.$$

Для определения экстремальных значений скорости находим первую производную от скорости по времени и, приравнивая ее значение нулю, определяем моменты времени, когда скорость достигает наибольших и наименьших значений:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{eA}{m} \sin kt_1 = 0.$$

Следовательно, $kt_1 = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \ldots$, откуда

$$t_1 = \pi n/k,$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Подставляя найденное значение t_1 в уравнение (1), находим при $n = 0$

$$v_{\min} = \frac{eA}{mk} (1 - \cos 0°) = 0; \qquad (2)$$

при $n = 1$

$$v_{\max} = \frac{eA}{mk} (1 - \cos\pi) = \frac{2eA}{mk}. \qquad (3)$$

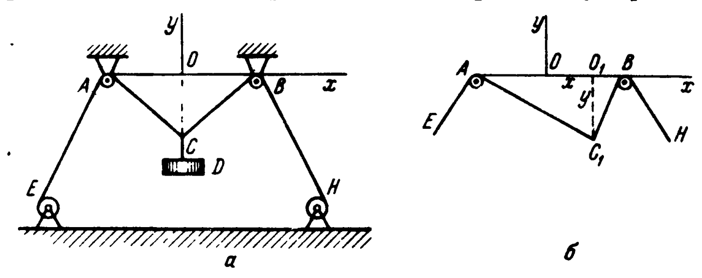
При последующих целочисленных значениях n значения скорости (2) и (3) будут периодически повторяться.

Задача 3.25. Груз D подвешен на двух тросах EAC и HBC, перекинутых через блоки A и B. В начальном положении стрела прогиба $OC = c = 10\sqrt{3}$ м и $AC = BC$. Расстояние между блоками $AB = 2a = 20$ м. Трос HBC

наматывается на барабан лебедки с постоянной скоростью $v = 1$ м/с. Трос EAC разматывается с барабана лебедки с такой же скоростью.

Определить траекторию точки C, к которой подвешен груз, а также скорость этой точки.

Решение. Выбираем оси координат: начало координат в точке O, ось x направляем по AB вправо, ось y перпендикулярно к AB вверх



К задаче 3.25

(рис. *а*). Определяем из треугольника AOC начальную длину тросов: $AC = BC = b$,

$$b^2 = AO^2 + OC^2 = a^2 + c^2 = 10^2 + 10^2 \cdot 3 = 400,$$

откуда $b = 20$ м.

Рассмотрим произвольное положение груза (рис. *б*). Длина троса $AC_1 = b + vt$, длина троса $BC_1 = b - vt$. Обозначив координаты точки $C_1(x, y)$, находим зависимость этих координат от времени:

$$(a + x)^2 + y^2 = (b + vt)^2, \tag{1}$$

$$(a - x)^2 + y^2 = (b - vt)^2. \tag{2}$$

Вычитая из (1) равенство (2), имеем

$$x = \frac{b}{a} vt = 2t \text{ м}. \tag{3}$$

Проекция скорости точки C_1 на ось x будет

$$v_x = \dot{x} = \frac{b}{a} v = 2 \text{ м/с}.$$

Внося в уравнение (1) найденное значение координаты x, определяем зависимость координаты y от времени:

$$y = -\sqrt{b^2 - a^2 + \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) v^2 t^2} = -\sqrt{300 - 3t^2}. \tag{4}$$

Проекция скорости на ось y равна производной от координаты y по времени:

$$v_y = \dot{y} = \frac{3t}{\sqrt{300 - 3t^2}} . \qquad (5)$$

Скорость точки определится формулой

$$\mathrm{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j} = 2\boldsymbol{i} + \frac{3t}{\sqrt{300 - 3t^2}} \boldsymbol{j}. \qquad (6)$$

Значение скорости

$$v = \sqrt{4 + \frac{9t^2}{300 - 3t^2}} . \qquad (7)$$

Для нахождения уравнения траектории груза следует совместно решить уравнения (1) и (3), исключив из них время. После несложных преобразований находим уравнение траектории

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2 - a^2} = 1. \qquad (8)$$

Таким образом, груз движется по дуге эллипса.

Решение этой задачи показывает многообразие приемов составления уравнений движения точки. В данной задаче уравнения (1) и (2) являются системой уравнений, определяющей зависимость координат от времени, разрешая которую относительно каждой из координат, мы находим уравнения движения груза (3) и (4).

Задача 3.26. Точка M совершает колебательное движение согласно уравнениям

$$x = a\cos(2kt - \epsilon), \qquad (1)$$

$$y = b\cos kt. \qquad (2)$$

Определить траекторию точки M. При каких значениях ϵ траектория точки обращается в параболу? Найти скорость точки в начальный момент времени.

Р е ш е н и е. Для определения траектории точки надо исключить из уравнений движения время. Для этого преобразуем первое уравнение следующим образом:

$$x = a\,[\cos 2kt \cos\epsilon + \sin 2kt \sin\epsilon] =$$

$$= a\,[\cos^2 kt \cos\epsilon - \sin^2 kt \cos\epsilon + 2\sin kt \cos kt \sin\epsilon]. \qquad (3)$$

Из второго уравнения находим

$$\cos kt = \frac{y}{b}, \quad \sin kt = \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\ .$$

Подставляя эти значения в уравнение (3), получаем уравнение траектории точки M

$$\frac{x}{a} = \left(2\frac{y^2}{b^2} - 1\right)\cos\epsilon + 2\frac{y}{b}\sin\epsilon\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\ . \quad (4)$$

Из уравнений (1), (2), следует, что при любых значениях ϵ координаты x и y не превышают соответственно значений $\pm a$ и $\pm b$. Таким образом, траектории точки M вписываются в прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$. Уравнение (4) обращается в уравнение параболы при $\epsilon_1 = 0$ и $\epsilon_2 = \pi$:

$$y^2 = \frac{b^2}{2}\left(1 \pm \frac{x}{a}\right).$$

Переходим к определению скорости точки M. Проекции этой скорости равны первым производным от координат по времени:

$$v_x = \dot{x} = -2ak\sin(2kt - \epsilon), \qquad v_y = \dot{y} = -bk\sin kt.$$

Находим значение этих проекций в начальный момент времени, полагая $t = 0$,

$$v_{x0} = -2ak\sin\epsilon, \qquad v_{y0} = 0. \quad (5)$$

Таким образом, в начальный момент времени скорость точки направлена по оси x, а ее модуль определяется по формуле (5).

Задача 3.27. Точка движется прямолинейно согласно уравнению

$$x = 3\sin 2\pi t - 4\cos 2\pi t. \quad (1)$$

Доказать, что движение точки является гармоническим колебательным движением. Определить амплитуду и период колебаний. Найти скорость и ускорение точки.

Решение. Гармоническое колебательное движение определяется уравнением

$$x = b\sin(kt - \beta), \quad (2)$$

или

$$x = b\sin kt\cos\beta - b\cos kt\sin\beta. \quad (3)$$

Сопоставляя уравнения (1) и (3), замечаем, что они совпадают, если положить

$$k = 2\pi, \quad b\cos\beta = 3, \quad b\sin\beta = 4. \quad (4)$$

Из уравнений (4) находим

$$b^2 = 25, \quad \text{или} \quad b = 5;$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{3} = 1{,}33, \quad \text{или} \quad \beta = 0{,}925.$$

Подставляя найденные значения b и β в уравнение (2), имеем

$$x = 5\sin(2\pi t - 0{,}925).$$

Период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{k} = 1 \text{ с}.$$

Находим, далее, проекцию скорости точки на ось x:

$$v_x = \dot{x} = 10\pi\cos(2\pi t - 0{,}925).$$

Проекция ускорения точки равна

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = -20\pi^2\sin(2\pi t - 0{,}925) = -4\pi^2 x.$$

Задача 3.28. Дано уравнение прямолинейного движения точки

$$x = 2\sin^2\left(3\pi t + \frac{\pi}{2}\right),$$

где x дано в метрах, а время – в секундах.

Доказать, что точка совершает гармоническое колебательное движение. Определить амплитуду, период колебаний, а также проекции скорости и ускорения точки.

Р е ш е н и е. Используя формулу тригонометрии

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha),$$

представим уравнение движения точки в виде

$$x = 1 - \cos(6\pi t + \pi) = 1 + \sin\left(6\pi t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Из этой формулы видно, что точка совершает гармоническое колебательное движение около положения A, определяемого абсциссой $x_1 = 1$.

Если перенести начало координат в точку A, то уравнение движения точки будет

$$x = \sin\left(6\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ м},$$

где x — координата, отсчитываемая от точки A. Амплитуда колебаний равна единице, период

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{1}{3} \text{ с.}$$

Размах колебаний (расстояние от x_{min} до x_{max}) равен двум метрам.

Проекция скорости точки на направление движения определится по формуле

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 6\pi \cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \frac{\text{м}}{\text{с}} .$$

Проекция ускорения точки равна

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -36\pi^2 \sin\left(6\pi t + \frac{\pi}{2}\right),$$

или

$$a_x = 36\pi^2 - 36\pi^2 x.$$

Задача 3.29. Точка M_1 брошена вертикально вверх. Уравнение движения точки при отсутствии сопротивления воздуха имеет вид (ось x направлена вверх)

$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2} , \qquad (1)$$

где v_0 и g — постоянные коэффициенты (t в секундах, x в метрах).

Определить скорости и ускорения точки, максимальную высоту подъема точки и время, когда точка достигнет наивысшего положения.

Решение. Проекция скорости точки находится как производная от координаты по времени:

$$v_x = (v_0 - gt) \text{ м/с}. \qquad (2)$$

Проекция ускорения точки при прямолинейном движении равна производной от проекции скорости по времени или второй производной от координаты по времени:

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = -g \text{ м/с}^2,$$

т.е. ускорение точки — постоянная величина. Из уравнения (2) видно, что при $t = 0$, $v_x = v_0$. Следовательно, постоянная v_0 является значением проекции скорости точки в начальный момент времени.

Чтобы определить момент времени, когда точка достигнет максимальной высоты, воспользуемся тем, что скорость точки в этом положении

равна нулю. Обозначая время подъема через T, из (2) находим

$$0 = v_0 - gT.$$

Таким образом, время, в течение которого точка достигнет наивысшего положения, равно

$$T = v_0/g \text{ с.} \qquad (3)$$

Наибольшую высоту подъема h найдем, подставив значение времени (3) в уравнение движения (1):

$$h = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2}\frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g} \text{ м.}$$

Задача 3.30. Точка M_1 брошена вертикально вверх с начальной скоростью v_0.

Через сколько секунд T надо бросить вертикально вверх из того же места с начальной скоростью $v_1 < v_0$ вторую точку M_2, чтобы обе точки встретились в наикратчайшее время от начала движения первой точки? Время дано в секундах, расстояние в метрах.

Уравнение движения точки, брошенной вертикально вверх, при отсутствии сопротивления воздуха

$$x = v_0 t - gt^2/2,$$

где v_0 — начальная скорость точки, g — ускорение свободного падения.

Решение. На первый взгляд может показаться, что вторую точку следует бросить вверх одновременно с первой. Однако скорость второй точки может оказаться достаточно малой и она поднимется на небольшую высоту и упадет на Землю раньше, чем первая точка успеет ее догнать. Поэтому выбор момента времени бросания второй точки играет существенную роль.

Так как вторая точка M_2, брошенная вверх через T секунд после первой, имеет меньшую начальную скорость, то встреча возможна только при возвратном движении первой точки вниз. Обозначим буквой t_1 время движения первой точки от ее наивысшего положения до встречи со второй точкой. Тогда путь, пройденный первой точкой вниз за время t_1, будет

$$s_1 = gt_1^2/2.$$

Обозначим буквой τ время, отсчитываемое от момента, когда первая точка находилась в наивысшем положении, до момента начала движения второй точки. Тогда путь, пройденный вверх второй точкой до встречи с первой, равен

$$s_2 = v_1(t_1 - \tau) - \frac{g(t_1 - \tau)^2}{2}.$$

Так как в момент времени t_1 точки встретились, то, следовательно,

$$s_1 + s_2 = h, \tag{1}$$

где h – наибольшая высота подъема первой точки, равная $v_0^2/2g$ (смотри предыдущую задачу). Тогда, подставляя в (1) значения всех величин, находим

$$g\frac{t_1^2}{2} + v_1(t_1 - \tau) - \frac{g(t_1 - \tau)^2}{2} = \frac{v_0^2}{2g}. \tag{2}$$

Рассматривая это уравнение как неявную зависимость $t_1 = f(\tau)$, находим производную от t_1 по τ и приравниваем ее нулю:

$$\frac{dt_1}{d\tau} = 1 - \frac{gt_1}{v_1 + g\tau} = 0,$$

откуда

$$v_1/g = t_1 - \tau. \tag{3}$$

Но v_1/g равно времени подъема второй точки на наибольшую высоту (см. задачу 3.29). Следовательно, в момент встречи вторая точка будет находиться в наивысшем положении.

Подставим найденное значение $t_1 - \tau$ из (3) в уравнение (2). Тогда, после приведения подобных членов, находим

$$\frac{v_0^2}{2g} = \frac{gt_1^2}{2} + \frac{v_1^2}{2g},$$

откуда определяется время

$$t_1 = \frac{1}{g}\sqrt{v_0^2 - v_1^2}.$$

Далее, из уравнения (3) находим

$$\tau = t_1 - \frac{v_1}{g} = \frac{-v_1 + \sqrt{v_0^2 - v_1^2}}{g}. \tag{4}$$

Чтобы найти искомое время T, по истечении которого с момента бросания первой точки следует бросить вверх вторую точку, необходимо к τ прибавить время t_0, в течение которого первая точка достигла наивысшего положения:

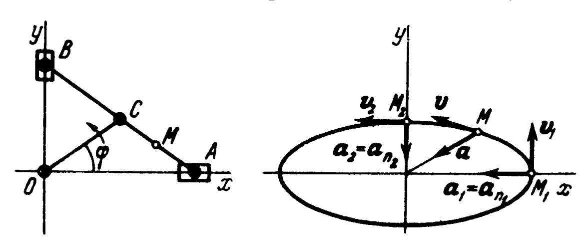
$$T = \tau + t_0 = \frac{-v_1 + \sqrt{v_0^2 - v_1^2}}{g} + \frac{v_0}{g}.$$

Из формулы (4) следует, что

$$\tau > 0 \text{ при } v_0^2 > 2v_1^2, \quad \tau = 0 \text{ при } v_0^2 = 2v_1^2, \quad \tau < 0 \text{ при } v_0^2 < 2v_1^2.$$

Таким образом, при $\tau > 0$ бросание второй точки происходит после того, как первая точка достигла наивысшего положения; при $\tau < 0$ бросание второй точки происходит до того, как первая точка оказалась в наивысшем положении; а при $\tau = 0$ бросание второй точки происходит в тот момент, когда первая точка находится в наивысшем положении.

Задача 3.31. Линейка эллипсографа $AB = l$ скользит концом A по оси абсцисс и концом B по оси ординат. Линейка приводится в движение



К задаче 3.31

кривошипом $OC = 0{,}5l$, шарнирно прикрепленным в ее середине. Расстояния $AM = d$, $BM = b$ известны. Угол φ между осью абсцисс и кривошипом изменяется пропорционально времени $\varphi = kt$ (см. рисунок).

Найти уравнения движения точки M эллипсографа и уравнение ее траектории. Определить также радиус кривизны траектории точки M, ее скорость, касательное, нормальное и полное ускорения при произвольном положении механизма и, в частности, в моменты времени $t_1 = 0$ и $t_2 = \pi/(2k)$.

Решение. Для составления уравнений движения точки M рассмотрим треугольник OAC. Он равнобедренный: $OC = AC = 0{,}5l$, следовательно, $\angle COA = \angle CAO = \varphi = kt$. Тогда координаты точки M будут

$$x = BM\cos\varphi = b\cos kt, \tag{1}$$

$$y = AM\sin\varphi = d\sin kt, \tag{2}$$

или в векторном виде

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = b\cos kt\cdot\boldsymbol{i} + d\sin kt\cdot\boldsymbol{j},$$

где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ — орты осей координат x, y. Этими равенствами определяются уравнения движения точки M.

Для нахождения траектории точки представим уравнения движения в виде

$$\frac{x}{b} = \cos kt, \quad \frac{y}{d} = \sin kt,$$

возведем эти равенства в квадрат и сложим их:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1.$$

Таким образом, траектория точки M – эллипс с полуосями b, d.

Для определения скорости точки M вычисляем первые производные от координат по времени, равные проекциям скорости точки на соответствующие оси координат:

$$v_x = \dot{x} = -bk\sin kt, \qquad v_y = \dot{y} = dk\cos kt.$$

Модуль скорости определяется формулой

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = k\sqrt{b^2\sin^2 kt + d^2\cos^2 kt}. \tag{3}$$

Направляющие косинусы вектора скорости будут

$$\cos(\widehat{\mathrm{v}, x}) = \frac{v_x}{v} = \frac{-b\sin kt}{\sqrt{b^2\sin^2 kt + d^2\cos^2 kt}},$$

$$\cos(\widehat{\mathrm{v}, y}) = \frac{v_y}{v} = \frac{d\cos kt}{\sqrt{b^2\sin^2 kt + d^2\cos^2 kt}}.$$

В векторном виде скорость может быть представлена так:

$$\mathbf{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} = -bk\sin kt\cdot\boldsymbol{i} + dk\cos kt\cdot\boldsymbol{j}.$$

Находим проекции ускорения на оси координат, вычисляя первые производные по времени от проекций скорости или вторые производные по времени от координат точки:

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = -bk^2\cos kt, \qquad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} = -dk^2\sin kt. \tag{4}$$

Модуль ускорения определится по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = k^2\sqrt{b^2\cos^2 kt + d^2\sin^2 kt}.$$

Направление ускорения может быть найдено путем сопоставления уравнений движения точки (1), (2) и формул, определяющих проекции ускорения на оси координат (4). Последние могут быть представлены в виде

$$a_x = -k^2x, \qquad a_y = -k^2y;$$

таким образом,

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} = -k^2(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = -k^2\boldsymbol{r}.$$

Следовательно, ускорение точки M направлено по радиусу-вектору, проведенному из M в O, и по модулю прямо пропорционально расстоянию точки M от начала координат. Проекция ускорения на касательную опре-

делится как производная от проекции скорости на касательную по времени (в данном случае $v_\tau = v$)

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{k^2(b^2 - d^2)\sin kt \cos kt}{\sqrt{b^2 \sin^2 kt + d^2 \cos^2 kt}}.$$

Но модуль полного ускорения связан с касательным и нормальным ускорениями зависимостью

$$a^2 = a_\tau^2 + a_n^2.$$

Теперь, после несложных преобразований, найдется модуль нормального ускорения точки M:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \frac{k^2 db}{\sqrt{d^2 \cos^2 kt + b^2 \sin^2 kt}}. \qquad (5)$$

Зная модуль нормального ускорения точки (5) и ее скорость (3), находим радиус кривизны траектории:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(d^2 \cos^2 kt + b^2 \sin^2 kt)^{3/2}}{db}.$$

Пользуясь полученными формулами, определяющими основные кинематические величины в любой момент времени, находим их значения:

	$kt_1 = 0$	$kt_2 = \pi/2$		$kt_1 = 0$	$kt_2 = \pi/2$
x	b	0	a_τ	0	0
y	0	d	a_n	$k^2 b$	$k^2 d$
				$-k^2 bi$	$-k^2 dj$
v	dkj	$-bki$	ρ	d^2/b	b^2/d

Задача 3.32. Кривошип $OA = r$ вращается равномерно вокруг точки O в плоскости чертежа: угол $\varphi = kt$. Шатун AB шарнирно соединен с концом кривошипа в точке A и проходит через цилиндрический шарнир, который может поворачиваться вокруг неподвижного центра N. Длина $AB = l > 2r$.

Определить уравнения движения точки B, проекции ее скорости и ускорения на оси координат, касательное, нормальное и полное ускорения, а также радиус кривизны траектории при произвольном положении механизма. Определить координаты, скорость, ускорение точки B и радиус кривизны ее траектории при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$.

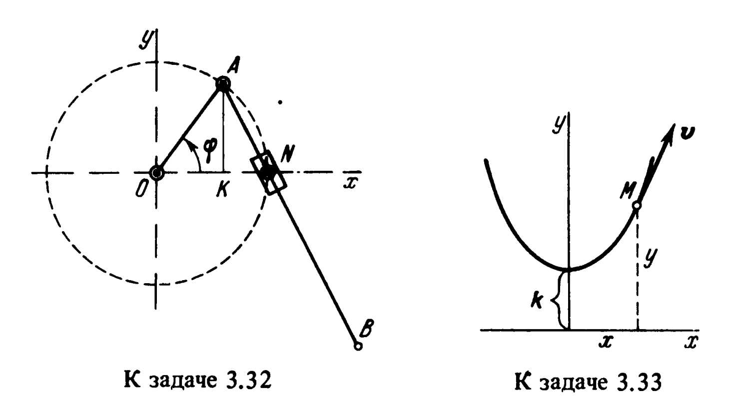
Решение. Треугольник OAN равнобедренный, так как $OA = ON = r$. Следовательно, $\angle OAN = \angle ONA = 90^\circ - \varphi/2$. Тогда координаты точки B

равны

$$x = r\cos kt + l\sin\frac{kt}{2}, \tag{1}$$

$$y = r\sin kt - l\cos\frac{kt}{2}. \tag{2}$$

Выражения (1) и (2) являются уравнениями движения точки B. Они получены проектированием ломаной линии OAB соответственно на оси



К задаче 3.32

К задаче 3.33

абсцисс и ординат. Действительно, опустим из точки A перпендикуляр на горизонтальную прямую ON. Обозначим точку пересечения прямых буквой K. Тогда из прямоугольного треугольника KAN находим угол $\angle KAN = \varphi/2$.

Проекции скорости на неподвижные декартовы оси координат находятся как производные от координат по времени:

$$v_x = \dot{x} = -rk\sin kt + l\frac{k}{2}\cos\frac{kt}{2},$$

$$v_y = \dot{y} = rk\cos kt + l\frac{k}{2}\sin\frac{kt}{2}.$$

Модуль скорости определится по формуле

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = k\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4} - rl\sin\frac{kt}{2}}.$$

Проекцию ускорения на касательную найдем как производную от проекции скорости на касательную по времени ($v_\tau = v$):

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \frac{-k^2 rl\cos\dfrac{kt}{2}}{4\sqrt{r^2 + \dfrac{l^2}{4} - rl\sin\dfrac{kt}{2}}}.$$

Если касательное ускорение a_τ и проекция скорости на касательную v_τ одного знака, то точка B движется ускоренно. Если же a_τ и v_τ противоположных знаков, то точка B движется замедленно.

Проекции ускорения точки на неподвижные декартовы оси координат равны первым производным по времени от проекций скорости на соответствующие оси или вторым производным по времени от соответствующих координат точки:

$$a_x = \ddot{x} = -rk^2\cos kt - l\frac{k^2}{4}\sin\frac{kt}{2}, \tag{3}$$

$$a_y = \ddot{y} = -rk^2\sin kt + l\frac{k^2}{4}\cos\frac{kt}{2}. \tag{4}$$

Пользуясь уравнениями (3) и (4), определяем модуль полного ускорения точки B:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = k^2\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{16} - \frac{rl}{2}\sin\frac{kt}{2}}.$$

Зная полное и касательное ускорения точки, вычисляем модуль нормального ускорения по формуле

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} =$$

$$= k^2\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{16} - \frac{rl}{2}\sin\frac{kt}{2} - \frac{r^2 l^2\cos^2\dfrac{kt}{2}}{16\left(r^2 + \dfrac{l^2}{4} - rl\sin\dfrac{kt}{2}\right)}}.$$

С другой стороны, значение нормального ускорения равно

$$a_n = v^2/\rho.$$

Отсюда можно определить радиус кривизны, так как скорость точки и

нормальное ускорение известны:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} =$$

$$= \frac{\left(4r^2 + l^2 - 4rl\sin\frac{kt}{2}\right)^{3/2}}{\sqrt{64r^4 + 16r^2l^2 + l^4 - 96r^3l\sin\frac{kt}{2} - 12rl^3\sin\frac{kt}{2} + 36r^2l^2\sin^2\frac{kt}{2}}}.$$

Перейдем к вычислению координат точки B, ее скорости и ускорения при угле $\varphi_0 = 0$. Из уравнений движения (1) и (2) находим координаты точки B при рассматриваемом положении механизма:

$$x_0 = r, \quad y_0 = -l.$$

При этом модуль скорости точки

$$v_0 = k\sqrt{r^2 + l^2/4},$$

а касательное ускорение точки будет равно

$$a_{\tau 0} = \frac{-k^2rl}{4\sqrt{r^2 + l^2/4}}.$$

Нормальное ускорение

$$a_{n0} = k^2\frac{8r^2 + l^2}{4\sqrt{4r^2 + l^2}}.$$

Полное ускорение

$$a_0 = k^2\sqrt{r^2 + l^2/16}.$$

Радиус кривизны траектории при $\varphi_0 = 0$ будет

$$\rho_0 = \frac{(4r^2 + l^2)^{3/2}}{8r^2 + l^2}.$$

Соответственно при угле $\varphi_1 = \pi$ эти величины равны

$$x_1 = -r + l, \quad y_1 = 0, \quad v_1 = k(r - l/2), \quad a_{\tau 1} = 0,$$

$$a_1 = a_{n1} = k^2(r - l/4), \quad \rho_1 = (2r - l)^3/(4r - l).$$

Задача 3.33. Точка M, движущаяся с постоянной по модулю скоростью v, описывает цепную линию, уравнение которой имеет вид

$$y = \frac{k}{2}\left(e^{x/k} + e^{-x/k}\right). \quad (1)$$

Определить проекции скорости и ускорения, а также полное ускорение точки как функции ее координат. Определить радиус кривизны цепной линии.

Примечание. Использовать выражения гиперболических функций через показательные:

$$\text{sh}z = \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z}),$$

$$\text{ch}z = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z}), \qquad \text{th}z = \frac{\text{sh}z}{\text{ch}z}.$$

Решение. Рассматривая x и y, входящие в уравнение цепной линии, как функции времени и дифференцируя уравнение цепной линии по времени, имеем

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(k\,\text{ch}\,\frac{x}{k}\right) = \dot{x}\,\text{sh}\,\frac{x}{k}. \tag{2}$$

Далее, так как сумма квадратов проекций скорости равна квадрату скорости точки, то

$$\dot{y}^2 = v^2 - \dot{x}^2. \tag{3}$$

Возводя уравнение (2) в квадрат и подставляя вместо левой части ее значение (3), находим

$$v^2 - \dot{x}^2 = \dot{x}^2\,\text{sh}^2\,\frac{x}{k} \tag{4}$$

или

$$\dot{x}^2 = \frac{v^2}{1 + \text{sh}^2(x/k)} = \frac{v^2}{\text{ch}^2(x/k)} = \frac{v^2k^2}{y^2}. \tag{5}$$

Извлекая из обеих частей равенства (5) квадратный корень, легко находим, что для движения точки по цепной линии слева направо (см. рис.)

$$\dot{x} = \frac{vk}{y}. \tag{6}$$

Это равенство определяет проекцию скорости на ось абсцисс как функцию координат точки.

Чтобы определить проекцию скорости на ось y, подставим найденное значение (6) в уравнение (2). Тогда

$$\dot{y} = \frac{vk}{y}\,\text{sh}\,\frac{x}{k}, \tag{7}$$

или, внося в это равенство значение y из (1), находим

$$\dot{y} = v \operatorname{th} \frac{x}{k}. \tag{8}$$

Для вычисления проекции ускорения на ось абсцисс продифференцируем по времени соотношение (6), помня, что $v = \text{const}$,

$$\ddot{x} = -\frac{vk}{y^2}\dot{y} = -\frac{vk}{y^2}\frac{vk}{y}\operatorname{sh}\frac{x}{k} = -\frac{v^2k^2}{y^3}\operatorname{sh}\frac{x}{k}. \tag{9}$$

Для определения проекции ускорения на ось ординат вычислим, пользуясь (8), вторую производную от ординаты по времени:

$$\ddot{y} = \frac{v}{\operatorname{ch}^2(x/k)}\frac{\dot{x}}{k}. \tag{10}$$

Учитывая (6), находим

$$\ddot{y} = \frac{v}{\operatorname{ch}^2(x/k)}\frac{vk}{y} = \frac{v^2k^2}{y^3}. \tag{11}$$

Для нахождения ускорения точки воспользуемся формулой

$$a^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2, \tag{12}$$

подставляя в которую (9) и (11), имеем, после несложных преобразований,

$$a^2 = \left(\frac{v^2k^2}{y^3}\right)^2 \left(1 + \operatorname{sh}^2\frac{x}{k}\right) = \frac{v^4k^4}{y^6}\operatorname{ch}^2\frac{x}{k}. \tag{13}$$

Используя вновь равенство (1) и извлекая из (13) квадратный корень, находим ускорение точки:

$$a = v^2k/y^2. \tag{14}$$

Так как точка по условию движется с постоянной скоростью, то ее полное ускорение будет одновременно являться и ее нормальным ускорением:

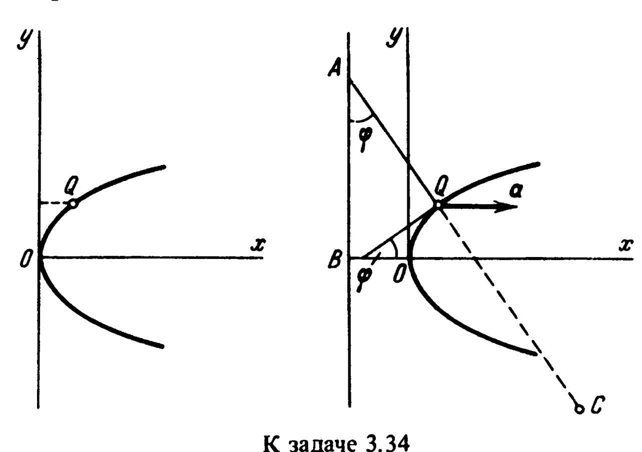
$$a = a_n = v^2/\rho. \tag{15}$$

Сопоставляя равенства (14) и (15), определяем радиус кривизны цепной линии

$$\rho = y^2/k. \tag{16}$$

Задачу можно решить непосредственным дифференцированием уравнения цепной линии, не переходя к гиперболическим функциям. Однако такой путь решения является более длинным.

Задача 3.34. Точка Q движется по параболе $y^2 = 2px$ так, что ее ордината y дается формулой $y = ct$ (см. рисунок).



К задаче 3.34

Определить скорость и ускорение точки Q, а также радиус кривизны параболы.

Р е ш е н и е. Координаты x, y движущейся точки Q, входящие в уравнение параболы, являются функциями времени. Вычисляя производную по времени от обеих частей уравнения параболы, имеем

$$2y\dot{y} = 2p\dot{x},$$

или

$$yv_y = pv_x. \tag{1}$$

С другой стороны, дифференцируя по времени $y = ct$, находим

$$\dot{y} = v_y = c.$$

Тогда из (1) имеем

$$v_x = yc/p,$$

и, следовательно, скорость точки определится соотношением

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} = \frac{yc}{p}\mathbf{i} + c\mathbf{j}.$$

Модуль скорости равен

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = c\sqrt{2x/p + 1}. \tag{2}$$

Проекции ускорения на оси координат находим по формулам

$$a_x = \dot{v}_x = \frac{c}{p}\dot{y} = \frac{c^2}{p} = \text{const}, \quad a_y = \dot{v}_y = 0.$$

Таким образом, модуль полного ускорения точки равен

$$a = |a_x| = c^2/p.$$

Обозначая угол между касательной к параболе и осью x буквой φ, находим нормальное ускорение точки Q

$$a_n = a\,|\cos(90^\circ - \varphi)| = a\,|\sin\varphi|.$$

С другой стороны,

$$a_n = v^2/\rho,$$

откуда

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^2}{a\,|\sin\varphi|} = \frac{v^2 p}{c^2\,|\sin\varphi|},$$

или, учитывая (2), получаем

$$\rho = \frac{2x + p}{|\sin\varphi|}. \tag{3}$$

Восставляя в точке B, находящейся на расстоянии $OB = p/2$ от точки O, перпендикуляр к оси абсцисс (директрису параболы), находим точку A, в которой этот перпендикуляр пересекается с нормалью к траектории точки. Тогда

$$|\overline{QA}| = \frac{p/2 + x}{|\sin\varphi|}. \tag{4}$$

Сопоставляя равенства (3) и (4), находим

$$\rho = |\overline{QC}| = 2\,|\overline{QA}|,$$

где точка C – центр кривизны.

Задача 3.35. Движение точки задано уравнениями в декартовых координатах

$$x = e^t \cos t, \qquad y = e^t \sin t, \qquad z = e^t.$$

Определить радиус кривизны траектории.

Решение. Для нахождения радиуса кривизны траектории воспользуемся формулой нормального ускорения

$$a_n = v^2/\rho. \tag{1}$$

12 Заказ № 899

Вычислим скорость точки. Проекции скорости на неподвижные декартовы оси равны

$$v_x = \dot{x} = e^t(\cos t - \sin t), \qquad v_y = \dot{y} = e^t(\cos t + \sin t), \qquad v_z = \dot{z} = e^t.$$

Тогда

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_y^2} = e^t\sqrt{3}.$$

Переходим к определению проекций ускорения точки:

$$a_x = \ddot{x} = -2e^t \sin t, \qquad a_y = \ddot{y} = 2e^t \cos t, \qquad a_z = \ddot{z} = e^t.$$

Модуль ускорения будет

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = e^t\sqrt{5}.$$

Касательное ускорение находим как производную от скорости по времени:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = e^t\sqrt{3}.$$

Зная полное и касательное ускорения точки, находим ее нормальное ускорение

$$a^2 = a_\tau^2 + a_n^2,$$

откуда

$$a_n^2 = a^2 - a_\tau^2 = 5e^{2t} - 3e^{2t} = 2e^{2t}$$

и, следовательно,

$$a_n = e^t\sqrt{2}. \tag{2}$$

Внося значения скорости и нормального ускорения в формулу (1), находим радиус кривизны траектории

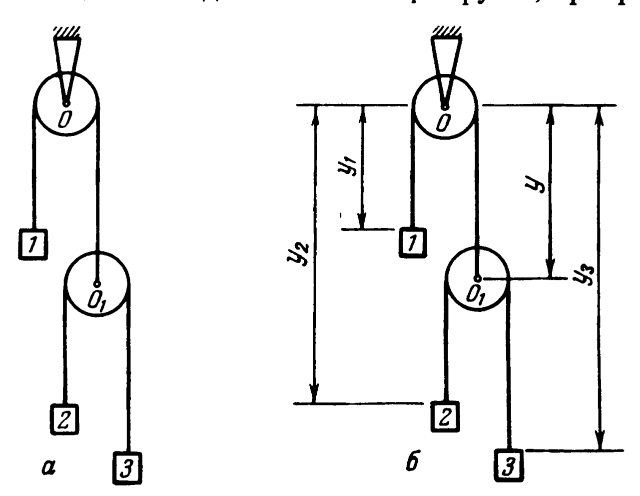
$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{3e^{2t}}{e^t\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\,e^t. \tag{3}$$

Радиус кривизны и нормальное ускорение являются важными характеристиками движения точки.

В данной задаче из уравнения (3) следует, что при неограниченном возрастании времени радиус кривизны неограниченно возрастает. Однако нормальное ускорение не стремится к нулю при неограниченном возрастании времени, как это видно из (2), а, наоборот, неограниченно возрастает. Траектория точки, заданная параметрическими уравнениями движения, представляет пространственную спираль на прямом круговом конусе $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, движение по которой начинается в точке (1, 0, 1) и про-

должается неограниченно вверх по боковой поверхности конуса. Проекция траектории на плоскость xOy будет логарифмической спиралью $r = e^{\varphi}$, где $\varphi = 2t$.

Задача 3.36. Система состоит из двух блоков (рис. *а*), один из которых может вращаться вокруг неподвижной оси O, второй может вращаться вокруг подвижной оси O_1. Через первый блок перекинут трос, прикрепленный одним концом к подвижной оси O_1. Груз *1*, прикрепленный ко



К задаче 3.36

второму концу троса, движется в данный момент вверх со скоростью 6 м/с и с замедлением 2 м/с². Груз *3*, прикрепленный к тросу, перекинутому через подвижный блок, движется вверх с замедлением 4 м/с², имея в данный момент скорость 3 м/с.

Найти скорость и ускорение центра подвижного блока (точки O_1) и груза *2* в данный момент времени.

Решение. Обозначим ординаты грузов соответственно через y_1, y_2, y_3 и ординату точки O_1 буквой y (рис. *б*). Так как длина троса между грузом *1* и центром блока O_1 неизменна, то, считая ось y направленной вниз, получим

$$y_1 + y + \pi r = \text{const},$$

где буквой r обозначен радиус блока. Точно так же неизменна и длина троса, соединяющего грузы *2* и *3*. Выражаем длину этого троса

$$y_2 - y + y_3 - y + \pi r = \text{const}.$$

Дифференцируя оба равенства по времени, находим

$$\dot{y}_1 + \dot{y} = 0, \quad \dot{y}_2 + \dot{y}_3 - 2\dot{y} = 0. \qquad (1)$$

Подставляя заданные значения скоростей $\dot{y}_1$ и $\dot{y}_3$, имеем

$$\dot{y} = -6 \text{ м/с}, \quad \dot{y}_2 = 2\dot{y} - \dot{y}_3 = -15 \text{ м/с}.$$

Дифференцируя уравнения (1) по времени, получим

$$\ddot{y}_1 + \ddot{y} = 0, \quad \ddot{y}_2 + \ddot{y}_3 - 2\ddot{y} = 0.$$

Внося в эти уравнения известные значения проекций ускорений $\ddot{y}_1$ и $\ddot{y}_3$, находим

$$\ddot{y} = 2 \text{ м/с}^2, \quad \ddot{y}_2 = 2\ddot{y} - \ddot{y}_3 = 8 \text{ м/с}^2.$$

Таким образом, скорость и ускорение точки O_1 равны скорости и ускорению груза *1*, но направлены в противоположную сторону. Скорость груза *2* направлена вниз и равна 15 м/с, ускорение этого груза направлено вверх и равно 8 м/с^2.

Задача 3.37. В течение 20 с скорость точки *C*, совершающей движение (циркуляцию) по дуге окружности радиусом 200 м, падает с 15 до 12 м/с. Предполагая, что модуль касательного ускорения пропорционален квадрату скорости, определить путь, пройденный точкой *C* за первые десять секунд, и центральный угол циркуляции, соответствующий дуге 200 м.

Решение. Касательное ускорение точки *C* пропорционально квадрату скорости, следовательно,

$$\frac{dv}{dt} = kv^2, \tag{1}$$

где k — неизвестный коэффициент пропорциональности. Отделяя переменные, находим

$$\frac{dv}{v^2} = k\,dt.$$

Воспользуемся для нахождения коэффициента k условием, что в течение 20 с скорость точки *C* падает с 15 до 12 м/с. Интегрируя в этих пределах уравнение (1), имеем

$$\int_{15}^{12} \frac{dv}{v^2} = k\int_0^{20} dt$$

или $-\left.\dfrac{1}{v}\right|_{15}^{12} = 20k$, откуда $-\left(\dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{15}\right) = 20k$ и $k = -1/1200$.

Переходим, далее, к определению пути, пройденного точкой *C* за первые десять секунд. Для этого вначале находим интегрированием из (1)

скорость как функцию времени. Имеем

$$-\frac{1}{v} + C_1 = kt. \tag{2}$$

Для определения произвольной постоянной интегрирования надо воспользоваться начальными условиями движения: при $t = 0$ скорость $v = v_0$. Внося эти значения переменных в (2), находим

$$C_1 = \frac{1}{v_0}.$$

Подставляя это значение в (2), определяем модуль скорости

$$v = \frac{v_0}{1 - v_0 kt}.$$

Для нахождения длины пути, пройденного точкой C за первые десять секунд, воспользуемся зависимостью

$$\frac{ds}{dt} = v = \frac{v_0}{1 - v_0 kt}.$$

Отделяя переменные и интегрируя, находим

$$ds = \frac{v_0\,dt}{1 - v_0 kt},$$

откуда

$$s = \int_0^{10} \frac{dv_0 t}{1 - v_0 kt} = -\frac{1}{k}\int_0^{10} \frac{d(1 - kv_0 t)}{1 - kv_0 t}.$$

Следовательно,

$$s = -\frac{1}{k}\ln(1 - kv_0 t)\Big|_0^{10}.$$

Подставляя значения всех величин, получим

$$s = 1200\ln(1 + 1/1200 \cdot 15 \cdot 10) = 1200\ln(9/8) \approx 150 \text{ м}.$$

Тогда угол циркуляции в радианах будет равен

$$\varphi = s/R = 150/200 = 0{,}75.$$

Задача 3.38. Точка движется прямолинейно с ускорением

$$a = 6\sqrt[3]{x} \text{ м/с}^2,$$

где x – координата точки. В момент времени $t_1 = 2$ с координата точки была $x_1 = 27$ м, а скорость равнялась $v_1 = 27$ м/с.

Определить уравнение движения точки, а также зависимость скорости и ускорения от времени.

Решение. Чтобы найти уравнение движения точки, представим заданную зависимость ускорения от пути в виде

$$\frac{dv}{dt} = 6\sqrt[3]{x}$$

и умножим обе части уравнения на dx, чтобы отделить переменные

$$\frac{dx \cdot dv}{dt} = 6\sqrt[3]{x}\,dx,$$

откуда

$$v\,dv = 6x^{1/3}\,dx.$$

Интегрируя, находим

$$\frac{v^2}{2} = \frac{9}{2}x^{4/3} + C_1, \qquad (1)$$

где C_1 – произвольная постоянная интегрирования. Для ее определения подставим в уравнение (1) значения $v_1 = 27$ м/с при $x_1 = 27$ м. Тогда из уравнения (1) получаем $C_1 = 0$ и, следовательно,

$$v = 3x^{2/3}. \qquad (2)$$

Используя зависимость $v = dx/dt$ и умножая уравнение (2) на dt, отделяем переменные

$$\frac{dx}{x^{2/3}} = 3\,dt.$$

Интегрируя, находим

$$3x^{1/3} = 3t + C_2. \qquad (3)$$

Произвольную постоянную интегрирования определяем, используя условие задачи: при $t_1 = 2$ с $x_1 = 27$ м. Подставляя эти значения в уравнение (3), находим $C_2 = 3$. Уравнение движения точки получим, подставив значение произвольной постоянной в (3):

$$x = (t+1)^3.$$

Зависимость скорости от времени найдем, вычисляя производную по времени от x:

$$v = 3(t+1)^2.$$

При прямолинейном движении ускорение как функция времени определится как производная от скорости по времени:

$$a = 6(t + 1).$$

Задача 3.39. Точка движется равноускоренно по круговой орбите согласно уравнению

$$s = at^2 + v_0 t + s_0,$$

где s – дуговая координата, a, v_0, s_0 – постоянные величины, t – время. Определить среднюю скорость точки за промежуток времени от t_1 до t_2. Найти также среднее арифметическое значение двух скоростей в моменты t_1 и t_2.

Решение. Средняя скорость точки за промежуток времени $t_2 - t_1$ находится по формуле

$$v_1 = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}, \qquad (1)$$

где s_2 и s_1 – соответственно значения пройденного пути в моменты времени t_2 и t_1.

Среднее арифметическое значение двух скоростей точки в моменты времени t_1 и t_2 определяется формулой

$$v_2 = \frac{\dot{s}_1 + \dot{s}_2}{2}, \qquad (2)$$

где $\dot{s}_1$ и $\dot{s}_2$ – соответственно скорости точки в моменты t_1 и t_2.

Подставляя в (1) значения s_1 и s_2, находим среднюю скорость точки:

$$v_1 = \frac{at_2^2 + v_0 t_2 + s_0 - at_1^2 - v_0 t_1 - s_0}{t_2 - t_1} = a(t_2 + t_1) + v_0. \qquad (3)$$

Чтобы найти среднее арифметическое двух скоростей точки в начале и конце рассматриваемого промежутка времени, вычисляем производную от пути по времени

$$v = \dot{s} = 2at + v_0$$

и вносим это значение в формулу (2):

$$v_2 = \frac{2at_1 + v_0 + 2at_2 + v_0}{2} = a(t_2 + t_1) + v_0. \qquad (4)$$

Сопоставляя (3) и (4), замечаем, что средняя скорость точки равна среднему арифметическому скоростей точки в начальный и конечный моменты времени. В уравнении движения точки: s_0 – начальное расстояние точки от точки отсчета по круговой орбите, v_0 – начальная скорость, a – удвоенное значение касательного ускорения.

Задача 3.40. Точка движется по круговой орбите согласно уравнению

$$s = \frac{at + b}{ct + d},$$

где a, b, c, d – постоянные, s – дуговая координата, t – время.

Определить среднюю скорость точки за некоторый промежуток времени. Найти также среднее геометрическое двух скоростей в начале и конце того же промежутка времени.

Решение. Средняя скорость точки за промежуток времени находится по формуле

$$v_1 = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}, \tag{1}$$

где s_2 и s_1 – соответственно значения пройденного пути в моменты времени t_2 и t_1.

Среднее геометрическое значение двух скоростей точки в моменты времени t_1 и t_2 определяется по формуле

$$v_2 = \sqrt{\dot{s}_1 \dot{s}_2}, \tag{2}$$

где $\dot{s}_1$ и $\dot{s}_2$ – соответственно скорости точки в моменты t_1 и t_2. Подставляя в (1) значения s_1 и s_2, находим среднюю скорость точки:

$$v_1 = \left(\frac{at_2 + b}{ct_2 + d} - \frac{at_1 + b}{ct_1 + d}\right) \Big/ (t_2 - t_1) = \frac{ad - bc}{(ct_1 + d)(ct_2 + d)}. \tag{3}$$

Чтобы найти среднее геометрическое двух скоростей точки в начале и конце рассматриваемого промежутка времени, вычисляем производную от пути по времени:

$$v = \dot{s} = \frac{(ct + d)a - (at + b)c}{(ct + d)^2}. \tag{4}$$

Найденное значение скорости вносим в формулу (2)

$$v_2 = \sqrt{\frac{(ct_1 + d)a - (at_1 + b)c}{(ct_1 + d)^2} \; \frac{(ct_2 + d)a - (at_2 + b)c}{(ct_2 + d)^2}} =$$

$$= \frac{ad - bc}{(ct_1 + d)(ct_2 + d)}. \tag{5}$$

Сопоставляя (3) и (5), замечаем, что средняя скорость точки равна среднему геометрическому скоростей точки в начальный и конечный моменты времени.

Задача 3.41. Частица движется по плоской кривой по закону

$$s = b(e^{kt} - 1),$$

где b и k – постоянные.

Ускорение частицы во время движения составляет угол 60° с касательной к траектории.

Найти скорость и ускорение частицы и радиус кривизны траектории, как функции пройденного пути.

Решение. Для нахождения скорости и тангенциального ускорения точки вычисляем первую и вторую производную от пути по времени:

$$s = b(e^{kt} - 1), \tag{1}$$

$$v = \dot{s} = bke^{kt}, \tag{2}$$

$$a_\tau = \ddot{s} = bk^2 e^{kt}. \tag{3}$$

Зная скорость точки, можем получить выражение нормального ускорения точки:

$$a_n = v^2/\rho = b^2k^2e^{2kt}/\rho. \tag{4}$$

Для нахождения ρ воспользуемся постоянством угла между ускорением и его касательной компонентой:

$$\frac{a_n}{a_\tau} = \operatorname{tg} 60^\circ. \tag{5}$$

Подставим вместо a_n и a_τ соответствующие им значения из выражений (3) и (4), получим

$$be^{kt}/\rho = \sqrt{3}. \tag{6}$$

Следовательно,

$$\rho = be^{kt}/\sqrt{3}. \tag{7}$$

Полное ускорение

$$a = a_\tau/\cos 60^\circ = 2bk^2 e^{kt}. \tag{8}$$

Перейдем к переменной s. Для этого уравнение (1) перепишем в следующем виде:

$$be^{kt} = s + b. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (2), (7) и (8), получаем зависимость скорости, радиуса кривизны траектории и ускорения точки от пройденного пути

$$v = k(s + b), \quad \rho = \frac{s + b}{\sqrt{3}}, \quad a = 2k^2(s + b).$$

Задача 3.42. Задан вектор скорости частицы

$$\mathbf{v} = 6\cos 3t\,\boldsymbol{i} + 4t^3\boldsymbol{j} - \sin 3t\,\boldsymbol{k}.$$

Известно, что при $t = 0$ частица занимает положение (1, 1, 1).

Определить радиус-вектор частицы и ее ускорение.

Решение. Радиус-вектор движущейся частицы находим, интегрируя вектор скорости по времени. Проекции скорости

$$v_x = \dot{x} = 6\cos 3t, \quad v_y = \dot{y} = 4t^3, \quad v_z = \dot{z} = -\sin 3t.$$

Интегрируя, получаем

$$x = 2\sin 3t + C_1, \quad y = t^4 + C_2, \quad z = (1/3)\cos 3t + C_3.$$

Постоянные C_1, C_2. C_3 определяем из начального положения частицы: $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, $C_3 = 2/3$.

Итак, уравнение движения точки имеет вид

$$x = 2\sin 3t + 1, \quad y = t^4 + 1, \quad z = (1/3)(\cos 3t + 2).$$

Радиус-вектор точки определится равенством

$$\boldsymbol{r} = (2\sin 3t + 1)\boldsymbol{i} + (t^4 + 1)\boldsymbol{j} + \frac{1}{3}(\cos 3t + 2)\boldsymbol{k}.$$

Вектор ускорения получаем, дифференцируя вектор скорости

$$\boldsymbol{a} = -18\sin 3t\,\boldsymbol{i} + 12t^2\boldsymbol{j} - 3\cos 3t\,\boldsymbol{k}.$$

Задача 3.43. Точка движется прямолинейно согласно уравнению

$$t = \frac{b}{k\sqrt{2}}\left[\sqrt{x\left(1 - \frac{x}{b}\right)} + \sqrt{b}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{b}{x} - 1}\right]. \qquad (1)$$

Определить начальное положение точки, промежуток времени, в течение которого точка пройдет половину пути, и весь путь до начала координат и ее скорость в эти моменты, а также ускорение точки.

Решение. Из уравнения (1) начальное положение точки можно определить, положив $t = 0$. Тогда находим начальное значение координаты

$$x_0 = b. \qquad (2)$$

Действительно, только при этом единственном значении x правая часть уравнения (1) обращается в нуль. Промежуток времени, в течение которого точка пройдет расстояние, равное $b/2$, найдем из (1), подставив вмес-

то x величину $b/2$:

$$t_1 = \frac{b^{3/2}}{2\sqrt{2}\,k}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right). \tag{3}$$

Промежуток времени, в течение которого точка достигнет начала координат, находим, положив в уравнении (1) x, равным нулю. Тогда

$$t_2 = \frac{b^{3/2}}{2\sqrt{2}\,k}\pi. \tag{4}$$

Чтобы найти скорость точки, дифференцируем уравнение (1):

$$dt = -\frac{dx}{k\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{b}}},$$

откуда скорость точки

$$v = \frac{dx}{dt} = -k\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{b}}. \tag{5}$$

В момент, когда $x = b/2$, скорость точки

$$v_1 = -k\sqrt{\frac{2}{b}}. \tag{6}$$

Когда точка достигнет начала координат, $x = 0$ и ее скорость

$$v_2 = -\infty.$$

Ускорение точки найдем (для случая прямолинейного движения), вычисляя производную от скорости по времени:

$$a = \dot{v} = \ddot{x} = -\frac{k^2}{x^2}. \tag{7}$$

Ускорение точки обратно пропорционально квадрату расстояния точки от начала координат.

Задача 3.44. Судно, идущее с тралом, изменило курс на 90°. Найти скорость, ускорение и радиус кривизны трала через 1 минуту после поворота, если скорость судна $v = 4$ узла, а длина троса трала $L = 500$ м.

Решение. Составим уравнение движения точки T трала. Пусть траектория движения судна описывается уравнением

$$y_c = f(x_c), \tag{1}$$

где x_c, y_c — координаты судна, рассматриваемого как точка.

Из рис. *а* следует, что

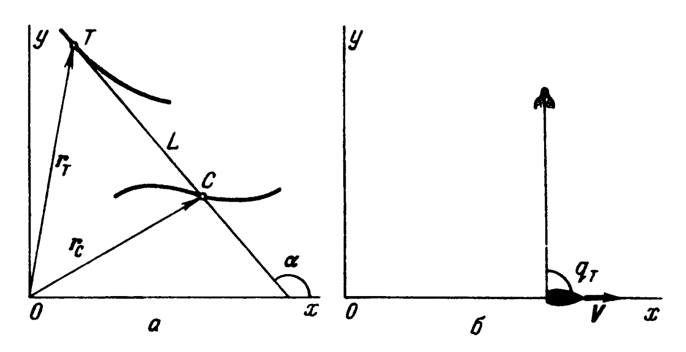
$$r_т = r_с + \overline{CT},$$

где $r_т$ – радиус-вектор точки T трала.

Спроектировав это равенство на оси x и y, получим

$$x_т = x_с + L\cos\alpha, \quad y_т = y_с + L\sin\alpha, \tag{2}$$

где α – угол, образованный касательной к траектории точки T трала и осью Ox.



К задаче 3 44

Подставляя (2) в (1) и учитывая, что $\operatorname{tg}\alpha = dy_т/dx_т$, получим

$$y_т = f\left|x_т - \frac{L}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy_т}{dx_т}\right)^2}}\right| + \frac{L\dfrac{dy_т}{dx_т}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy_т}{dx_т}\right)^2}}. \tag{3}$$

Это – дифференциальное уравнение обобщенной трактрисы. Пусть наше судно движется по прямой (рис. *б*), уравнение которой

$$y_с = 0,$$

т.е. по оси x.

Тогда уравнение движения точки T трала будет

$$y_т = \frac{Ly'_т}{\sqrt{1+(y'_т)^2}}.$$

Решение его в параметрическом виде

$$x_т = L\sin q_т, \quad y_т = L\ln\operatorname{tg}\frac{q_т}{2} + L\cos q_т + C_1. \tag{4}$$

При начальных условиях $x_{т0} = 0$ и $q_{т0} = \pi/2$, постоянная интегрирования $C_1 = 0$.

Имея в виду, что $x_c = x_{т0} + vt$, $y_c = 0$, где $x_{т0}$ – значение $x_т$ при $t = 0$, уравнение (2) можно переписать в виде

$$x_т = x_{т0} + vt + L\cos q_т, \qquad y_т = L\sin q_т. \tag{5}$$

Исключая из (4) и (5) x и y, получим уравнение движения точки T трала в полярной относительной системе координат, где за начало координат принято положение движущегося судна, рассматриваемого как точка (угол $q_т$ отсчитывается от направления скорости судна до направления на точку T трала):

$$\operatorname{tg}\frac{q_т}{2} = \operatorname{tg}\frac{q_{т0}}{2}\exp\left[\frac{v}{L}(t - t_0)\right]. \tag{6}$$

При начальных условиях $t_0 = 0$ и $q_{т0} = \pi/2$ уравнение (6) принимает вид

$$\operatorname{tg}\frac{q_т}{2} = \exp\left[\frac{vt}{L}\right].$$

Отсюда с помощью известных тригонометрических формул найдем

$$\sin q_т = \operatorname{sch}\frac{vt}{L}, \qquad \cos q_т = -\operatorname{th}\frac{vt}{L}. \tag{7}$$

Подставим (7) в (5) с учетом начальных условий

$$x_т = vt - L\operatorname{th}\frac{vt}{L}, \qquad y_т = L\operatorname{sch}\frac{vt}{L}. \tag{8}$$

Эти выражения представляют собой уравнения движения точки T трала в декартовой системе координат. Продифференцируем эти уравнения по времени и получим выражения для проекций скорости

$$v_{тx} = \dot{x}_т = v\operatorname{th}^2\frac{vt}{L}, \qquad v_{тy} = \dot{y}_т = v\frac{\operatorname{th}(vt/L)}{\operatorname{ch}(vt/L)}. \tag{9}$$

Подставив сюда заданные значения, получим, учитывая, что 4 узла = = 2,06 м/с,

$$v_{тx} = 0{,}12 \text{ м/с}, \quad v_{тy} = 0{,}49 \text{ м/с}.$$

Модуль скорости равен

$$v_т = \sqrt{v_{тx}^2 + v_{тy}^2} = v\operatorname{th}\frac{vt}{L} = 0{,}51 \text{ м/с}.$$

Используя (9), определим проекции ускорения точки T трала на оси Ox и Oy:

$$a_{\text{т}x} = \ddot{x}_{\text{т}} = 2\frac{v^2}{L}\operatorname{sch}^2\frac{vt}{L}\operatorname{th}\frac{vt}{L}, \quad a_{\text{т}y} = \ddot{y}_{\text{т}} = \frac{v^2}{L}\operatorname{sch}\frac{vt}{L}\left(2\operatorname{th}^2\frac{vt}{L} - 1\right)$$

Подставив числовые значения, получим

$$a_{\text{т}x} = 0{,}0042 \text{ м/с}^2, \quad a_{\text{т}y} = 0{,}0075 \text{ м/с}^2.$$

Модуль ускорения точки T трала равен

$$a_{\text{т}} = \sqrt{a_{\text{т}x}^2 + a_{\text{т}y}^2} = \frac{v^2}{L}\operatorname{sch}\frac{vt}{L} = 0{,}0085 \text{ м/с}^2.$$

Найдем касательное и нормальное ускорения точки T трала:

$$a_{\text{т}}^{\tau} = \frac{dv_{\text{т}}}{dt} = \frac{v^2}{L}\operatorname{sch}^2\frac{vt}{L} = 0{,}079 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{\text{т}}^{n} = \sqrt{a_{\text{т}}^2 - a_{\text{т}}^{\tau 2}} = \frac{v^2}{L}\operatorname{sch}\frac{vt}{L}\operatorname{th}\frac{vt}{L} = 0{,}0021 \text{ м/с}^2.$$

Радиус кривизны находится по формуле

$$R = \frac{v_{\text{т}}^2}{a_{\text{т}}^n}.$$

Подставив значения, найдем

$$R = 124 \text{ м}.$$

2. Скорость и ускорение точки в полярных и цилиндрических координатах. Скорость точки при задании движения в полярных координатах

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t) \tag{22*}$$

определяется формулой

$$\mathbf{v} = \dot{\rho}\vec{\rho}^{\,\circ} + \rho\dot{\varphi}\mathbf{p}^{\circ}, \tag{23*}$$

где $\vec{\rho}^{\,\circ}$ — единичный вектор (орт), направленный по радиусу-вектору точки, $\mathbf{p}^{\circ}$ — единичный вектор, направленный перпендикулярно радиусу-вектору в сторону увеличения угла φ.

Проекции скорости: на радиальное направление

$$v_{\rho} = \dot{\rho}, \tag{24*}$$

на трансверсальное направление

$$v_{\varphi} = \rho\dot{\varphi}. \tag{25*}$$

Модуль скорости равен

$$v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{\dot\rho^2 + (\rho\dot\varphi)^2}. \tag{26*}$$

Ускорение точки при задании движения в полярных координатах

$$\boldsymbol{a} = (\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2)\vec\rho^{\,\circ} + (2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi)\boldsymbol{p}^\circ, \tag{27*}$$

где проекция ускорения на радиальное направление

$$a_\rho = \ddot\rho - \rho\dot\varphi^2 \tag{28*}$$

и проекция ускорения на трансверсальное направление

$$a_\varphi = 2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot\varphi). \tag{29*}$$

Угол, образованный ускорением с положительным радиальным направлением, определяется формулой

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a_\varphi}{a_\rho} = \frac{2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi}{\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2}. \tag{30*}$$

Если уравнения движения точки заданы в *цилиндрических координатах*

$$\rho = \rho(t), \quad \psi = \psi(t), \quad z = z(t), \tag{31*}$$

то скорость точки определяется формулой

$$\mathbf{v} = \dot\rho\vec\rho^{\,\circ} + \rho\dot\psi\boldsymbol{p}^\circ + \dot z\boldsymbol{k}, \tag{32*}$$

где по сравнению с (2*) добавляется последнее слагаемое. Ускорение точки дается формулой

$$\boldsymbol{a} = (\ddot\rho - \rho\dot\psi^2)\vec\rho^{\,\circ} + (2\dot\rho\dot\psi + \rho\ddot\psi)\boldsymbol{p}^\circ + \ddot z\boldsymbol{k}, \tag{33*}$$

где $\boldsymbol{k}$ – орт оси z.

Задача 3.45. Уравнения движения точки заданы в полярных координатах

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t). \tag{1}$$

Определить скорость и ускорение точки.

Решение. Чтобы найти скорость точки в полярной системе координат выразим декартовы координаты точки через ее полярные координаты

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi. \tag{2}$$

Вычисляя производные по времени от (2), находим проекции скорости на оси декартовой системы координат

$$v_x = \dot x = \dot\rho\cos\varphi - \rho\dot\varphi\sin\varphi, \quad v_y = \dot y = \dot\rho\sin\varphi + \rho\dot\varphi\cos\varphi. \tag{3}$$

Модуль скорости равен

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dot\rho^2 + \rho^2 \dot\varphi^2}. \qquad (4)$$

Направляющие косинусы определяются формулами

$$\cos(\widehat{\rho, \mathbf{v}}) = \frac{\dot\rho}{v}, \qquad \cos(\widehat{\varphi, \mathbf{v}}) = \frac{\rho\dot\varphi}{v}. \qquad (5)$$

Проекции скорости на полярные оси координат равны

$$v_\rho = \dot\rho, \quad v_\varphi = \rho\dot\varphi. \qquad (6)$$

Первая называется *радиальной* скоростью, вторая — *трансверсальной* скоростью.

Переходим к определению ускорения. Находим проекции ускорения на декартовы оси координат, вычисляя производные по времени от (3):

$$\begin{aligned} \ddot x &= (\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2)\cos\varphi - (2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi)\sin\varphi, \\ \ddot y &= (\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2)\sin\varphi + (2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi)\cos\varphi. \end{aligned} \qquad (7)$$

Следовательно, проекция ускорения на радиальное направление

$$a_\rho = \ddot\rho - \rho\dot\varphi^2, \qquad (8)$$

а проекция ускорения на трансверсальное направление

$$a_\varphi = 2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot\varphi). \qquad (9)$$

Модуль ускорения точки

$$a = \sqrt{a_\rho^2 + a_\varphi^2} = \sqrt{(\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2)^2 + (2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi)^2}. \qquad (10)$$

Направляющие косинусы

$$\cos(\widehat{\rho, \mathbf{a}}) = \frac{\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2}{a}, \qquad \cos(\widehat{\varphi, \mathbf{a}}) = \frac{2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi}{a}. \qquad (11)$$

Задача 3.46. Точка M движется согласно уравнениям

$$\rho = bt, \quad \varphi = kt,$$

где b, k — постоянные.

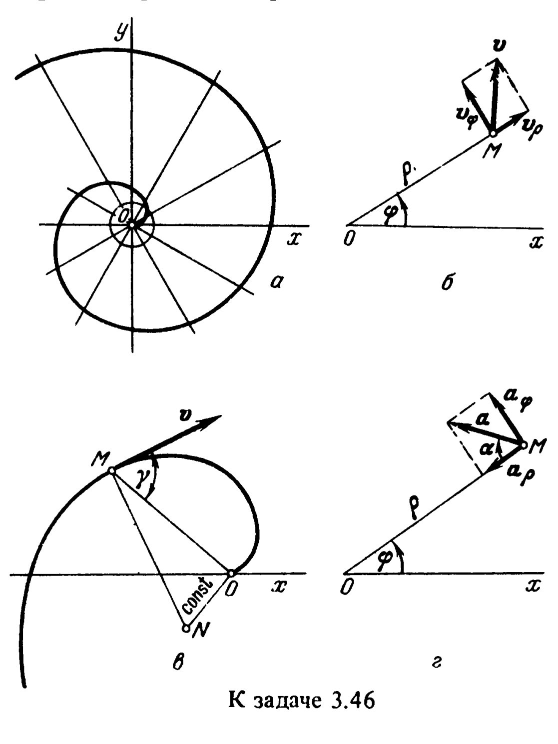
Определить траекторию точки, ее скорость и ускорение, а также радиус кривизны траектории.

Решение. Уравнения движения точки, заданные в полярной системе координат, можно рассматривать как параметрические уравнения траектории точки. Параметром является время.

Чтобы получить уравнение траектории в явном виде, исключим из заданных уравнений движения время. Тогда получим

$$\rho = \frac{b}{k}\varphi. \qquad (1)$$

Это уравнение плоской кривой, называемой архимедовой спиралью (рис. *а*). Кривая начинается в центре полярных координат, так как при угле $\varphi = 0$ радиус-вектор $\rho = 0$. При неограниченном возрастании угла неограниченно возрастает и радиус-вектор. Замечая, что радиусы-векторы точки пропорциональны углу φ, можно построить траекторию следующим простым способом. Окружность радиусом b/k с центром в начале полярных координат делим на какое-либо число равных частей, каждая из которых равна l, и соединяем полученные на окружности точки с началом координат O. Далее откладываем последовательно по соответствующим радиусам величины l, $2l$, $3l$, $4l$ и т.д. Полученные точки и являются геометрическим местом точек, удовлетворяющих уравнению (1), следовательно, это и будет архимедова спираль.



К задаче 3.46

С другой стороны, дифференцируя уравнения движения точки, находим

$$\dot\rho = v_\rho = b = \text{const}, \quad \dot\varphi = k = \text{const}. \qquad (2)$$

Пользуясь этими равенствами, можно дать следующее определение архимедовой спирали: это – кривая, которую опишет точка, движущаяся с постоянной скоростью b по лучу, вращающемуся вокруг точки O с постоянной угловой скоростью k.

Находим, далее, трансверсальную скорость (рис. *б*):

$$v_\varphi = \rho\dot\varphi = \rho k. \qquad (3)$$

Трансверсальная скорость перпендикулярна к радиусу-вектору. Так как радиальная и трансверсальная скорости взаимно перпендикулярны, то

модуль абсолютной скорости

$$v = \sqrt{v_\varphi^2 + v_\rho^2} = \sqrt{\rho^2 k^2 + b^2}, \tag{4}$$

а направляющие косинусы будут

$$\cos(\widehat{\mathbf{v}, \rho}) = \frac{v_\rho}{v} = \frac{b}{\sqrt{\rho^2 k^2 + b^2}}, \tag{5}$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{v}, \varphi}) = \frac{v_\varphi}{v} = \frac{\rho \cdot k}{\sqrt{\rho^2 k^2 + b^2}}. \tag{6}$$

Направление скорости точки, совпадающее с направлением касательной к траектории – архимедовой спирали, можно определить и следующим геометрическим построением, предложенным впервые Н.Е. Жуковским. Обозначим угол между касательной к траектории и радиусом-вектором движущейся точки M буквой γ (рис. *в*). Тогда

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\rho k}{b}. \tag{7}$$

Восставим из точки M перпендикуляр MN к скорости точки (рис. *в*) и найдем пересечение этой прямой с перпендикуляром ON, восставленным в начале полярных координат к радиусу-вектору точки $OM = \rho$. Тогда находим

$$ON = \rho \operatorname{tg}\angle NMO = \rho \operatorname{tg}(90^\circ - \gamma) = \rho/\operatorname{tg}\gamma = b/k = \text{const}. \tag{8}$$

Таким образом, отрезок ON, построенный для любого положения движущейся точки M, остается постоянным по модулю. Воспользуемся этим результатом для построения касательной к траектории, совпадающей по направлению со скоростью точки. Восставим в точке O перпендикуляр к радиусу-вектору данной точки M и откладываем на этом перпендикуляре постоянный по модулю отрезок $ON = b/k$. Соединяя точку N с движущейся точкой M, находим направление касательной к архимедовой спирали, восставив перпендикуляр к NM в точке M (рис. *в*).

Проекции ускорения на оси полярной системы координат находятся по формулам

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = -\rho k^2, \tag{9}$$

$$a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = 2bk. \tag{10}$$

Модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_\rho^2 + a_\varphi^2} = k\sqrt{\rho^2 k^2 + 4b^2}. \tag{11}$$

Ускорение образует острый угол α с отрицательным направлением радиаль-

ной оси (рис. г), определяемый из равенства

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_\varphi}{a_\rho} = \frac{2b}{\rho k}. \tag{12}$$

Переходим к определению радиуса кривизны архимедовой спирали. Из формулы для нормального ускорения точки

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

находим радиус кривизны:

$$r = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - a_\tau^2}}. \tag{13}$$

Подставляя в (13) значения скорости (4), ускорения (11) и касательного ускорения

$$|a_\tau| = \left|\frac{d\mathrm{v}}{dt}\right| = \frac{\rho k^2 b}{\sqrt{\rho^2 k^2 + b^2}}, \tag{14}$$

после несложных преобразований находим

$$r = \frac{(\rho^2 k^2 + b^2)^{3/2}}{k(\rho^2 k^2 + 2b^2)}. \tag{15}$$

Подставляя в (15) значение ρ, из (1) получим окончательно

$$r = \frac{b}{k}\,\frac{(\varphi^2 + 1)^{3/2}}{(\varphi^2 + 2)}. \tag{16}$$

Отсюда находим значение радиуса кривизны в начале координат при $\varphi = 0$:

$$r_0 = \frac{b}{2k}. \tag{17}$$

В заключение покажем как выразить скорость точки в функции времени, а ускорение в функции времени и функции скорости. Скорость как функцию времени находим, подставив в (4) значение радиуса-вектора из первого уравнения движения. Тогда имеем

$$v = b\sqrt{k^2 t^2 + 1}. \tag{18}$$

Аналогично определяем ускорение как функцию времени, внося в (11) значение радиуса-вектора:

$$a = kb\sqrt{k^2 t^2 + 4}. \tag{19}$$

Наконец, решая совместно (18) и (19) и исключая из этой системы время, находим ускорение как функцию скорости:

$$a^2 = k^2(3b^2 + v^2). \qquad (20)$$

Задача 3.47. Точка M движется согласно уравнениям

$$\rho = bt, \quad \varphi = k/t,$$

где b, k — постоянные.

Определить траекторию точки, ее скорость и ускорение, а также радиус кривизны траектории.

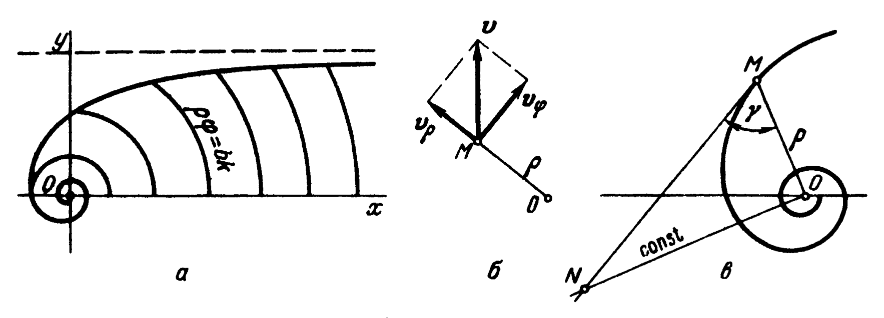
Решение. Уравнения движения точки в полярной системе координат можно рассматривать как параметрические уравнения траектории, в которых время является параметром. Для нахождения уравнения траектории в явном виде исключим из заданных уравнений движения время. Для этого помножим одно уравнение на другое:

$$\rho = bk/\varphi. \qquad (1)$$

Это — уравнение гиперболической спирали. Из уравнения следует, что произведение радиуса-вектора на угол есть величина постоянная:

$$\rho\varphi = bk = \text{const}. \qquad (2)$$

Этим свойством кривой можно воспользоваться для ее построения (рис. *а*). Действительно, произведение $\rho\varphi$ является длиной дуги окружности радиусом ρ, соответствующей углу φ. Таким образом, описывая из точки O



К задаче 3.47

окружности различными радиусами, отложим на каждой из окружностей от оси x дуги, равные bk, получим точки, удовлетворяющие уравнению кривой. Геометрическое место этих точек и является гиперболической спиралью. Одна ветвь этой кривой имеет асимптоту, параллельную оси Ox, уравнение которой $y = bk$ (при $\varphi \to 0$ и $\rho \to \infty$) (рис. *а*). Другая ветвь приближается к полюсу (при $\varphi \to \infty$ и $\rho \to 0$), совершая неограниченное число оборотов. Точка O называется *асимптотическим полюсом кривой*.

Переходим к определению скорости точки. Находим модуль радиальной скорости точки:

$$v_\rho = \dot{\rho} = b. \tag{3}$$

Модуль трансверсальной скорости

$$v_\varphi = \rho\dot{\varphi} = -\rho\frac{k}{t^2}. \tag{4}$$

Скорость точки согласно (23*) определяется формулой

$$\mathrm{v} = b\vec{\rho}^{\,\circ} - \rho\frac{k}{t^2}p^\circ. \tag{5}$$

Тогда модуль скорости точки определится формулой

$$v = \sqrt{v_\varphi^2 + v_\rho^2} = \sqrt{\rho^2\frac{k^2}{t^4} + b^2} = b\sqrt{\frac{k^2}{t^2} + 1} = \frac{b}{\rho}\sqrt{\rho^2 + b^2k^2}. \tag{6}$$

Угол, образованный скоростью с радиусом-вектором точки, обозначим γ. Тогда

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{\rho k}{t^2 b} = -\frac{bk}{\rho}. \tag{7}$$

Направление касательной к гиперболической спирали, совпадающее с направлением скорости точки, можно построить следующим образом. Восставим в начале полярных координат – точке O перпендикуляр ON к радиусу-вектору. Длина перпендикуляра

$$ON = \rho\operatorname{tg}\gamma = -\frac{bk}{\rho}\cdot\rho = -bk = \text{const}. \tag{8}$$

Следовательно, если отложить на перпендикуляре, восставленном в точке O к радиусу-вектору любой точки M, отрезок $ON = -bk$, то, соединяя полученную точку N с точкой M, найдем направление касательной к гиперболической спирали в точке M, совпадающее с направлением скорости точки M. Это построение предложено Н.Е. Жуковским (рис. *в*).

Переходим к нахождению ускорения точки. Модуль радиального ускорения согласно (28*) равен

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = -\frac{k^2b^4}{\rho^3}. \tag{9}$$

Модуль трансверсального ускорения

$$a_\varphi = 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} = \frac{2kb^3}{\rho^2} - \frac{2kb^3}{\rho^2} = 0. \tag{10}$$

Абсолютное ускорение точки M направлено по радиусу-вектору к полюсу O.

Нормальное ускорение точки M (рис. *в*) равно по модулю

$$a_n = a\sin\gamma = a_\rho \sin\gamma = \frac{k^2 b^4}{\rho^3}\frac{bk}{\sqrt{\rho^2 + b^2k^2}} = \frac{b^5k^3}{\rho^3\sqrt{\rho^2 + b^2k^2}}. \qquad (11)$$

Тогда радиус кривизны траектории точки M – гиперболической спирали – после несложных преобразований будет

$$r = \frac{v^2}{a_n} = \frac{\rho(k^2b^2 + \rho^2)^{3/2}}{k^3b^3} = \frac{bk}{\varphi}\left(\frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi}\right)^3. \qquad (12)$$

Задача 3.48. Уравнения движения точки M заданы в полярной системе координат:

$$\rho = be^t, \quad \varphi = \frac{t}{k}.$$

Определить траекторию точки, ее скорость и ускорение, а также радиус кривизны траектории.

Решение. Уравнения движения точки в полярных координатах можно рассматривать как параметрические уравнения ее траектории, в которых параметром является время. Чтобы получить уравнение траектории в явном виде, исключим из уравнений движения время. Тогда найдем

$$\rho = be^{k\varphi}. \qquad (1)$$

Это – уравнение кривой, называемой логарифмической спиралью. При $\varphi = -\infty$ радиус-вектор кривой $\rho \to 0$. Следовательно, начало координат – точка O является асимптотическим полюсом кривой. Если придавать углу φ ряд последовательных значений, изменяя его в арифметической прогрессии, то радиус-вектор будет изменяться в геометрической прогрессии. Действительно, если угол φ принимает значения

$$0,\ n,\ 2n,\ 3n, \ldots,$$

то радиус-вектор ρ будет

$$\rho_0 = b,\quad \rho_1 = be^{kn},\quad \rho_2 = be^{2kn}, \ldots$$

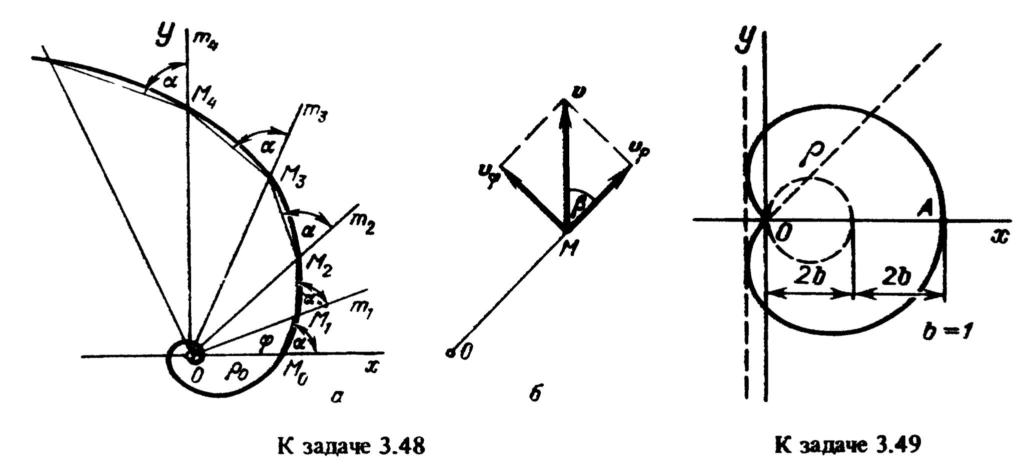
Следовательно,

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\rho_3}{\rho_2} = e^{kn}, \qquad (2)$$

где e^{kn} – знаменатель геометрической прогрессии.

На этом соотношении между углом φ и радиусом-вектором ρ основано приводимое ниже построение траектории точки – логарифмической спирали.

Отложим из начала координат точки O радиусы-векторы, образующие друг с другом равные углы. Первый радиус-вектор ρ_0 совпадает по направлению с осью Ox (рис. *а*). Соединяя концы радиусов-векторов M_0, M_1, M_2, ... прямыми M_0M_1, M_1M_2, ... получим подобные треугольники M_0OM_1, M_1OM_2, M_2OM_3, ... Действительно, согласно (2), две соответственные стороны этих треугольников пропорциональны, а углы между



К задаче 3.48 К задаче 3.49

пропорциональными сторонами равны. Следовательно, соответственно равны у треугольников и остальные два угла. На этом основании равны и внешние углы α.

Итак, чтобы построить логарифмическую спираль, достаточно провести из конца радиуса-вектора ρ_0 под углом α прямую M_0M_1 до пересечения с радиусом-вектором ρ_1. Из этой точки под тем же углом α к радиусу-вектору ρ_1 проводим прямую M_1M_2 до пересечения с радиусом-вектором ρ_2 и т.д.

Точки M_0, M_1, M_2, ... лежат на логарифмической спирали. Это построение было выполнено Н.Е. Жуковским.

Перейдем, далее, к определению скорости точки. Находим радиальную составляющую скорости

$$v_\rho = \dot{\rho} = be^t \tag{3}$$

и трансверсальную составляющую скорости

$$v_\varphi = \rho\dot{\varphi} = be^t \frac{1}{k} = \frac{b}{k} e^t. \tag{4}$$

Модуль скорости равен

$$v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2} = be^t \sqrt{1 + 1/k^2}. \tag{5}$$

Обозначая угол между радиусом-вектором и скоростью буквой β, находим (рис. б)

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v_\varphi}{v_\rho} = \frac{1}{k} = \text{const}. \qquad (6)$$

Таким образом, угол касательной с радиусом-вектором для любой точки логарифмической спирали один и тот же. Пользуясь этим свойством легко построить касательную в любой точке логарифмической спирали.

Переходим к определению ускорения точки.

Проекция ускорения на радиальную ось равна согласно (7*)

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = be^t - be^t/k^2 = be^t(1 - 1/k^2). \qquad (7)$$

Проекция ускорения на трансверсальную ось находится по формуле (8*)

$$a_\varphi = 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} = \frac{2}{k}be^t. \qquad (8)$$

Модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_\rho^2 + a_\varphi^2} = be^t\sqrt{(1 - 1/k^2)^2 + (2/k)^2} = be^t(1 + 1/k^2). \qquad (9)$$

Угол γ, образованный абсолютным ускорением с радиусом-вектором, определится формулой

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{a_\varphi}{a_\rho} = \frac{2k^2}{k(k^2 - 1)} = \frac{2k}{(k^2 - 1)} = \text{const}. \qquad (10)$$

Далее, находим касательное ускорение как производную от скорости по времени:

$$a_\tau = be^t\sqrt{1 + 1/k^2}. \qquad (11)$$

Переходим к нахождению радиуса кривизны траектории. Воспользуемся формулой нормального ускорения точки, откуда радиус кривизны

$$r = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - a_\tau^2}} = \frac{b^2e^{2t}(1 + 1/k^2)}{be^t\sqrt{(1 + 1/k^2)^2 - (1 + 1/k^2)}} =$$

$$= be^t\sqrt{1 + k^2} = \rho\sqrt{1 + k^2}. \qquad (12)$$

Таким образом, у логарифмической спирали радиус кривизны кривой прямо пропорционален радиусу-вектору.

Задача 3.49. Точка описывает на плоскости кардиоиду, уравнение которой дано в полярных координатах:

$$\rho = b(1 + \cos\varphi). \qquad (1)$$

Кардиоидой называется кривая, описываемая точкой окружности, катя-

щейся без скольжения по другой окружности вне ее, если радиусы обеих окружностей равны. Таким образом, кардиоида является эпициклоидой в случае, когда радиусы окружностей равны (см. рисунок).

Определить скорость и ускорение точки как функцию полярного угла и его производных.

Решение. Для решения воспользуемся формулами перехода от полярных координат к декартовым:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi. \tag{2}$$

Подставляя в эти уравнения значение радиуса из (1), находим

$$x = b\cos\varphi(1 + \cos\varphi), \quad y = b\sin\varphi(1 + \cos\varphi). \tag{3}$$

Проекции скорости на неподвижные декартовы оси координат равны первым производным от координат по времени:

$$\dot x = -b(\sin\varphi + \sin 2\varphi)\dot\varphi, \quad \dot y = b(\cos\varphi + \cos 2\varphi)\dot\varphi. \tag{4}$$

Скорость точки находится по формуле

$$\mathrm{v} = \dot x\boldsymbol{i} + \dot y\boldsymbol{j} = b\dot\varphi\,[-(\sin\varphi + \sin 2\varphi)\boldsymbol{i} + (\cos\varphi + \cos 2\varphi)\boldsymbol{j}]. \tag{5}$$

Для определения ускорения точки вычислим вначале его проекции на неподвижные декартовы оси координат, как вторые производные от декартовых координат по времени:

$$\begin{aligned} \ddot x &= -b(\cos\varphi + 2\cos 2\varphi)\dot\varphi^2 - b(\sin\varphi + \sin 2\varphi)\ddot\varphi, \\ \ddot y &= -b(\sin\varphi + 2\sin 2\varphi)\dot\varphi^2 + b(\cos\varphi + \cos 2\varphi)\ddot\varphi. \end{aligned} \tag{6}$$

Ускорение точки определяется по формуле

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} = \ddot x\boldsymbol{i} + \ddot y\boldsymbol{j} = [-b(\cos\varphi + 2\cos 2\varphi)\dot\varphi^2 - b(\sin\varphi + \sin 2\varphi)\ddot\varphi]\boldsymbol{i} + \\ + [-b(\sin\varphi + 2\sin 2\varphi)\dot\varphi^2 + b(\cos\varphi + \cos 2\varphi)\ddot\varphi]\boldsymbol{j}. \end{aligned} \tag{7}$$

Формулы (6) и (7) определяют ускорение точки при любой зависимости угла φ от времени. Если первая производная от полярного угла φ по времени есть величина постоянная, то формула (7) для ускорения упрощается:

$$\boldsymbol{a} = -b(\cos\varphi + 2\cos 2\varphi)\dot\varphi^2\boldsymbol{i} - b(\sin\varphi + 2\sin 2\varphi)\dot\varphi^2\boldsymbol{j}. \tag{8}$$

Кроме определения кардиоиды, данного в условиях задачи, дадим и другое ее определение. Кардиоида является конхоидой окружности, получающейся при увеличении радиуса-вектора каждой точки данной окружности на постоянный отрезок, равный радиусу этой окружности. Если уравнение кривой (в данном случае окружности) записано в полярных координатах $\rho = f(\varphi)$, то уравнение ее конхоиды $\rho = f(\varphi) \pm l$. В случае кардиоиды ее уравнение $\rho = f(\varphi) + b$, где b – радиус-первоначальной окружности.

Задача 3.50. Уравнения движения точки даны в смешанных (декартовых и полярных) координатах:

$$y = kt, \quad \varphi = bt. \qquad (1)$$

Определить траекторию точки и ее скорость.

Решение. Перейдем к полярным координатам, воспользовавшись зависимостью (рис. *а*)

$$y = \rho \sin \varphi. \qquad (2)$$

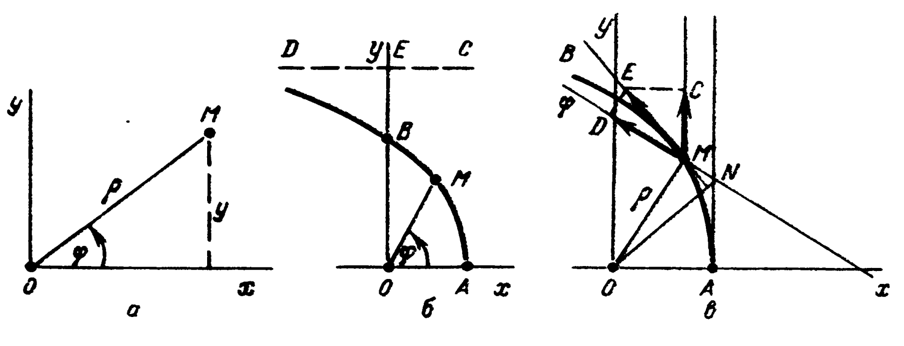
Подставляя значение ординаты в первое из уравнений (1), находим

$$\rho \sin \varphi = kt, \quad \varphi = bt. \qquad (3)$$

Исключая из системы уравнений (3) время, получаем уравнение траектории в явном виде в полярных координатах:

$$\rho = \frac{k}{b} \frac{\varphi}{\sin \varphi}. \qquad (4)$$

Эта кривая (рис. *б*) называется квадратисой. Замечаем, что при $\varphi = 0$ радиус-вектор движущейся точки $\rho = OA = k/b$ (рис. *б*), так как



К задаче 3.50

$\lim\limits_{\varphi \to 0} (\varphi/\sin \varphi) = 1$. Далее, при $\varphi = \pi/2$ радиус-вектор точки (согласно (4)) $\rho = OB = \dfrac{k}{b} \dfrac{\pi}{2}$. Наконец при $\varphi \to \pi$ радиус-вектор неограниченно возрастает, $\rho \to \infty$. При этом, как следует из формулы

$$y = \frac{k}{b} \varphi, \qquad (5)$$

получаемой из (1) исключением времени, прямая CD, уравнение которой

$$y = \frac{k}{b}\pi, \tag{6}$$

будет являться асимптотой квадратисы.

Переходим к определению скорости точки M (рис. *в*), движущейся по квадратисе.

Проводим в точке M ось φ перпендикулярно к радиусу-вектору ρ до пересечения с перпендикуляром к оси x, восставленным в точке A квадратисы. Точку пересечения этих прямых обозначим буквой N. Соединяем, далее, начало координат с точкой N прямой ON. Проведем через точку M перпендикуляр ME к прямой ON и докажем, что ME является касательной к траектории точки M. Следовательно, абсолютная скорость точки M должна быть направлена по ME.

Для доказательства отложим в точке M параллельно оси y

$$v_y = \dot{y} = k = \frac{k}{b} b = AO \cdot b. \tag{7}$$

На рисунке *в* этот отрезок обозначен MC. Далее, пользуясь равенством

$$\mathbf{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j}, \tag{8}$$

проводим перпендикулярно к MC прямую EC. Пересечение прямой EC с касательной ME, точка E определяет абсолютную скорость $\mathbf{v}$ точки M, равную отрезку ME.

Из точки E опускаем перпендикуляр ED на прямую MD. Тогда треугольник MDE можно трактовать как векторное равенство:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\rho + \mathbf{v}_\varphi, \tag{9}$$

где v_φ должно быть равно

$$v_\varphi = \rho\dot{\varphi} = \rho k. \tag{10}$$

Докажем равенство (10). Четырехугольники $MCED$ и $OANM$ подобны, так как они образованы из соответственно подобных треугольников:

$$\Delta OAN \sim \Delta CME, \quad \Delta ONM \sim \Delta MDE \tag{11}$$

(эти треугольники подобны как образованные взаимно перпендикулярными сторонами).

Из подобия четырехугольников следует, что отношения перпендикулярных сторон равны:

$$\frac{DM}{MC} = \frac{OM}{OA}, \tag{12}$$

откуда, учитывая (7), находим

$$DM = \frac{OM \cdot MC}{OA} = \frac{\rho \cdot OA \cdot k}{OA} = \rho \cdot k, \tag{13}$$

что доказывает справедливость (10).

Итак, ME действительно совпадает по направлению с касательной к траектории точки M, а отрезок ME определяет ее абсолютную скорость.

Скорость точки можно определить и исходя из общих формул.

Действительно, проекция скорости на радиальную ось согласно (24*)

$$v_\rho = \dot{\rho} = \dot{\left(\frac{kt}{\sin bt}\right)} = k\,\frac{\sin bt - bt\cos bt}{\sin^2 bt}. \tag{14}$$

Проекция скорости на трансверсальную ось согласно (25*)

$$v_\varphi = \rho\dot{\varphi} = \frac{bkt}{\sin bt}. \tag{15}$$

Модуль скорости точки

$$v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2} = \frac{k}{\sin^2 bt}\sqrt{\sin^2 bt - 2bt\sin bt\cos bt + b^2 t^2}. \tag{16}$$

3. Скорость и ускорение точки в сферических координатах. Если движение точки задано в сферических координатах уравнениями

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad \theta = \theta(t), \tag{34*}$$

то проекции скорости на оси сферических координат определятся формулами

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\theta = \rho\dot{\theta}, \quad v_\varphi = \rho\sin\theta\cdot\dot{\varphi}. \tag{35*}$$

Вектор скорости равен

$$\mathbf{v} = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \rho\sin\theta\cdot\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi. \tag{36*}$$

Проекции ускорения точки на оси сферических координат равны

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 - \rho\dot{\varphi}^2\sin^2\theta, \tag{37*}$$

$$a_\theta = \frac{1}{\rho}\left[\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) - \rho^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right] =$$

$$= \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} - \rho\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta, \tag{38*}$$

$$a_\varphi = \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}\sin^2\theta) = \rho\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\sin\theta + 2\rho\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta. \tag{39*}$$

Вектор ускорения точки равен

$$a = (\ddot\rho - \rho\dot\theta^2 - \rho\dot\varphi^2\sin^2\theta)e_\rho + (\rho\ddot\theta + 2\dot\rho\,\dot\theta - \rho\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta)e_\theta +$$
$$+ (\rho\ddot\varphi\sin\theta + 2\dot\rho\dot\varphi\sin\theta + 2\rho\dot\varphi\dot\theta\cos\theta)e_\varphi. \qquad (40^*)$$

Задача 3.51. Движение точки задано ее сферическими координатами

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad \theta = \theta(t).$$

Вычислить проекции скорости точки на оси декартовых координат и на координатные линии сферической системы координат.

Решение. Для определения проекций скорости на декартовы оси координат v_x, v_y и v_z продифференцируем по времени формулы (11*), считая ρ, θ и φ произвольными функциями времени,

$$v_x = \dot x = \frac{d}{dt}(\rho\sin\theta\cos\varphi) = \dot\rho\sin\theta\cos\varphi + \rho\cos\theta\cdot\dot\theta\cos\varphi -$$
$$- \rho\sin\theta\sin\varphi\cdot\dot\varphi,$$
$$v_y = \dot y = \frac{d}{dt}(\rho\sin\theta\sin\varphi) =$$
$$= \dot\rho\sin\theta\sin\varphi + \rho\cos\theta\cdot\dot\theta\sin\varphi + \rho\sin\theta\cos\varphi\cdot\dot\varphi, \qquad (1)$$
$$v_z = \dot z = \frac{d}{dt}(\rho\cos\theta) = \dot\rho\cos\theta - \rho\sin\theta\cdot\dot\theta.$$

Для нахождения проекций скорости на линии сферической системы координат $v_\rho, v_\theta, v_\varphi$ запишем формулы (16*) для вектора **v** :

$$v_x = v_\rho\sin\theta\cos\varphi + v_\theta\cos\theta\cos\varphi - v_\varphi\sin\varphi,$$
$$v_y = v_\rho\sin\theta\sin\varphi + v_\theta\cos\theta\sin\varphi + v_\rho\cos\varphi, \qquad (2)$$
$$v_z = v_\rho\cos\theta - v_\theta\sin\theta.$$

Сравним теперь формулы (2) с полученными прямым дифференцированием координат выражениями (1). Приравнивая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях (или одинаковых комбинациях тригонометрических функций), получаем:

$$v_\rho = \dot\rho, \quad v_\theta = \rho\dot\theta, \quad v_\varphi = \rho\sin\theta\cdot\dot\varphi. \qquad (3)$$

Задача 3.52. Движение точки задано ее сферическими координатами $\rho = 2t^2$, $\varphi = \pi t/4$, $\theta = \pi t/4$.

Найти скорость и ускорение точки в момент $t = 2$ с.

Решение. 1. Для нахождения скорости воспользуемся выражениями ее проекций на координатные линии сферической системы

координат (35*)

$$v_\rho = \dot\rho, \quad v_\theta = \rho\dot\theta, \quad v_\varphi = \rho \sin\theta \cdot \dot\varphi. \qquad (1)$$

Вычислим первые производные по времени от функций, определяющих сферические координаты:

$$\dot\rho = 4t, \quad \dot\varphi = \pi/4, \quad \dot\theta = \pi/4. \qquad (2)$$

Подставим эти производные в выражения для v_ρ, v_θ и v_φ:

$$v_\rho = 4t \text{ м/с}, \quad v_\theta = 2t^2\,\frac{\pi}{4} = \frac{\pi t^2}{2} \text{ м/с},$$

$$v_\varphi = 2t^2 \sin\frac{\pi t}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi t^2}{2} \sin\frac{\pi t}{4} \text{ м/с}.$$

Подставляя время $t = 2$ с, получаем

$$v_\rho = 8 \text{ м/с}, \quad v_\theta = 2\pi \text{ м/с}, \quad v_\varphi = 2\pi \text{ м/с}.$$

Модуль скорости равен

$$v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{8^2 + (2\pi)^2 + (2\pi)^2} \approx 12 \text{ м/с}.$$

2. Для нахождения ускорения удобнее перейти к записи движения в декартовой системе координат:

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi = 2t^2 \sin\frac{\pi t}{4} \cos\frac{\pi t}{4},$$

$$y = \rho \sin\theta \sin\varphi = 2t^2 \sin\frac{\pi t}{4} \sin\frac{\pi t}{4}, \qquad (3)$$

$$z = \rho\cos\theta = 2t^2 \cos\frac{\pi t}{4}.$$

В первом и втором уравнениях (3) воспользуемся тригонометрическими формулами двойного угла и перепишем все три уравнения:

$$x = t^2 \sin\frac{\pi t}{2}, \quad y = t^2\left(1 - \cos\frac{\pi t}{2}\right), \quad z = 2t^2 \cos\frac{\pi t}{4}. \qquad (4)$$

Найдем первые, а затем вторые производные координат x, y, z:

$$\dot{x} = 2t\sin\frac{\pi t}{2} + t^2\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{2},$$

$$\dot{y} = 2t\left(1-\cos\frac{\pi t}{2}\right) + t^2\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi t}{2}, \qquad (5)$$

$$\dot{z} = 4t\cos\frac{\pi t}{4} - 2t^2\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi t}{4};$$

$$\ddot{x} = 2\sin\frac{\pi t}{2} + 2t\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{2}\left(2t\cos\frac{\pi t}{2} - t^2\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi t}{2}\right),$$

$$\ddot{y} = 2\left(1-\cos\frac{\pi t}{2}\right) + 2t\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{2}\left(2t\sin\frac{\pi t}{2} + t^2\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{2}\right),$$

$$\ddot{z} = 4\cos\frac{\pi t}{4} - 4t\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi t}{4} - 2\frac{\pi}{4}\left(2t\sin\frac{\pi t}{4} + t^2\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi t}{4}\right). \qquad (6)$$

Подставим в (5) и (6) значение времени $t = 2$ с. В этот момент времени находим

$$\dot{x} = -2\pi, \quad \dot{y} = 8, \quad \dot{z} = -2\pi; \qquad (7)$$

$$\ddot{x} = -4\pi, \quad \ddot{y} = 4 - \pi^2, \quad \ddot{z} = -4\pi. \qquad (8)$$

Из (8) получаем модуль ускорения

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \approx 18{,}7 \text{ м/с}^2.$$

Заметим, что из проекций вектора скорости на оси декартовой системы координат получается модуль скорости

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{(-2\pi)^2 + 64 + (-2\pi)^2} \approx 12 \text{ м/с},$$

совпадающий с тем, который был найден ранее.

§ 3. ГОДОГРАФ СКОРОСТИ

Если задана траектория точки, то хотя геометрически движение и известно, но кинематически его определение не полно, так как неизвестна его характеристика во времени. Чтобы восполнить этот пробел, Гамильтон ввел понятие годографа скорости.

Будем называть *годографом вектор-функции* $A(t)$ геометрическое место концов самого вектора $A(t)$, отложенного от некоторой постоянной точки.

Так, например, траекторию движущейся точки можно рассматривать как годограф радиуса-вектора точки.

Годографом скорости называется геометрическое место концов векторов скорости движущейся точки, отложенных от некоторого постоянного полюса. Следовательно, радиус-вектор некоторой точки годографа скорости параллелен касательной в соответственной точке траектории. Если уравнения движения точки заданы в декартовой системе координат

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t), \tag{1*}$$

то проекция скорости на неподвижные декартовы оси координат

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}. \tag{2*}$$

Решая эти три уравнения совместно с целью исключить из них время, получим уравнения годографа скорости.

Вспоминая, что ускорение точки есть производная от вектора скорости по времени

$$a = \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \tag{3*}$$

можно утверждать, что скорость соответственной точки годографа равна ускорению точки, движущейся по траектории.

Аналогичным методом находятся уравнения годографа скорости, если уравнения движения точки заданы в другой форме.

Задача 3.53. Уравнения движения точки заданы в декартовой системе координат:

$$x = \frac{a}{2}\,(e^t + e^{-t}) = a\operatorname{ch} t, \qquad y = \frac{b}{2}\,(e^t - e^{-t}) = b\operatorname{sh} t. \tag{1}$$

Найти траекторию точки и годограф скорости.

Решение. Для нахождения траектории движения возведем каждое из уравнений (1) в квадрат:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{4}\,(e^t + e^{-t})^2, \quad \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{4}\,(e^t - e^{-t})^2. \tag{2}$$

Вычитая из первого уравнения (2) второе, имеем

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3}$$

Таким образом траектория точки – гипербола.

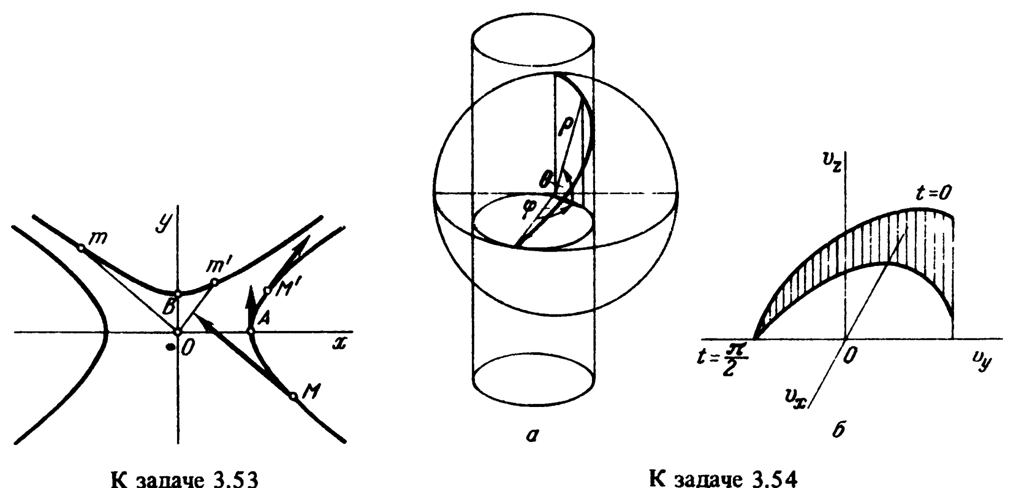
Перейдем, далее, к определению годографа скорости. Находим проекции скорости точки на неподвижные декартовы оси как первые производные от координат по времени:

$$\dot{x} = \frac{a}{2}\,(e^t - e^{-t}) = a\operatorname{sh} t, \qquad \dot{y} = \frac{b}{2}\,(e^t + e^{-t}) = b\operatorname{ch} t. \tag{4}$$

Для исключения времени из этой системы поступим так же, как и при определении траектории: возводим каждое из уравнений (4) в квадрат и вычитаем далее из первого уравнения второе. Тогда получим уравнение годографа

$$-\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

где x_1, y_1 – проекции скорости на декартовы оси координат. Это уравнение гиперболы, сопряженной с первой. Если точка M движется по ветви



К задаче 3.53

К задаче 3.54

MAM' траектории (см. рис.), то соответственная точка годографа движется по ветви mBm' годографа. Следовательно, точка, движущаяся по траектории, и соответственная точка годографа неограниченно удаляются в одном направлении.

Вектор $\overline{Om}$ равен скорости точки M, вектор $\overline{OB}$ равен скорости точки A, вектор $\overline{Om'}$ равен скорости точки M'.

Задача 3.54. Точка M движется согласно уравнениям

$$\rho = R, \tag{1}$$

$$\varphi = kt/2, \tag{2}$$

$$\theta = kt/2, \tag{3}$$

где k, R – постоянные. Отсчет угла θ идет от экваториальной плоскости. Точка движется по линии пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и цилиндра $\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2$.

Найти траекторию точки и годограф скорости. Определить закон движения по траектории.

Р е ш е н и е. Уравнения движения заданы в сферической системе координат. Сравнивая формулы (2) и (3), получим уравнения траектории (рис. *а*)

$$\rho = R, \quad \varphi = \theta.$$

Для нахождения скорости перейдем к декартовым координатам:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta\cos\varphi = R\cos^2\frac{kt}{2}, \\ y &= \rho\cos\theta\sin\varphi = R\sin\frac{kt}{2}\cos\frac{kt}{2} = \frac{1}{2}R\sin kt, \\ z &= \rho\sin\theta = R\sin\frac{kt}{2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Для нахождения годографа определим составляющие скорости в декартовых координатах:

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = \frac{d}{dt}\left(R\cos^2\frac{kt}{2}\right) = -\frac{Rk}{2}\sin kt, \\ v_y &= \dot{y} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}R\sin kt\right) = \frac{Rk}{2}\cos kt, \\ v_z &= \dot{z} = \frac{d}{dt}\left(R\sin\frac{kt}{2}\right) = \frac{Rk}{2}\cos\frac{kt}{2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Модуль скорости равен геометрической сумме ее составляющих:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \\ &= \sqrt{\left(-\frac{Rk}{2}\sin kt\right)^2 + \left(\frac{Rk}{2}\cos kt\right)^2 + \left(\frac{Rk}{2}\cos\frac{kt}{2}\right)^2} = \\ &= \frac{Rk}{2}\sqrt{1+\cos^2\frac{kt}{2}}. \end{aligned} \tag{6}$$

Годограф скорости определяется проекциями

$$v_x = -\frac{Rk}{2}\sin kt, \quad v_y = \frac{Rk}{2}\cos kt, \quad v_z = \frac{Rk}{2}\cos\frac{kt}{2}. \tag{7}$$

Это – косинусоида, намотанная на цилиндр (рис. *б*).

Переходим к определению уравнения движения точки по траектории. Выражение для элемента длины дуги кривой в декартовых координатах

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} \qquad (8)$$

нетрудно преобразовать к сферическим координатам, найдя соответствующие дифференциалы из (4). В результате получается

$$ds = \sqrt{(d\rho)^2 + \rho^2(d\theta)^2 + \rho^2\cos^2\theta(d\varphi)^2}. \qquad (9)$$

Формулу (9) преобразуем для параметрического задания функций ρ, θ, φ:

$$ds = \sqrt{\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2 + \rho^2\cos^2\theta\cdot\dot\varphi^2}\,dt. \qquad (10)$$

Вычислим производные от уравнений движения по времени

$$\dot\rho = 0, \quad \dot\theta = k/2, \quad \dot\varphi = k/2$$

и подставим их в (10). Получаем

$$ds = \sqrt{R^2\frac{k^2}{4} + R^2\cos^2\frac{kt}{2}\cdot\frac{k^2}{4}}\,dt = \frac{Rk}{2}\sqrt{1+\cos^2\frac{kt}{2}}\,dt. \qquad (11)$$

Путь, как функция времени, выражается эллиптическим интегралом 2-го рода:

$$s = \frac{Rk}{2}\int_0^1\sqrt{1+\cos^2\frac{kt}{2}}\,dt. \qquad (12)$$

Для вычисления эллиптического интеграла 2-го рода существуют готовые таблицы.

Задача 3.55. Точка M движется согласно уравнениям

$$\rho = bt, \qquad (1)$$

$$\varphi = k/t, \qquad (2)$$

где k, b – постоянные.

Найти траекторию точки и годограф скорости.

Решение. Для нахождения траектории точки исключим из уравнений движения время. Для этого выразим из (2) время:

$$t = k/\varphi. \qquad (3)$$

После подстановки (3) в (1) имеем

$$\rho = bk/\varphi.$$

Таким образом, траектория точки – гиперболическая спираль (см. рис. a).

Перейдем к определению годографа скорости. Для этого найдем радиальную и трансверсальную составляющие скорости:

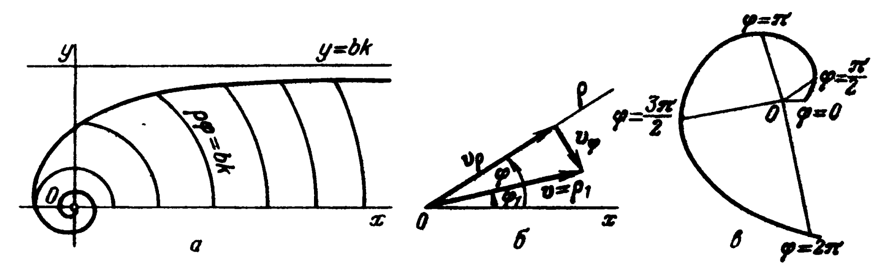
$$v_\rho = \dot\rho = \frac{d}{dt}(bt) = b,$$

$$v_\varphi = \rho\dot\varphi = bt\frac{d}{dt}\left(\frac{k}{t}\right) = bt\left(-\frac{k}{t^2}\right) = -\frac{bk}{t} = -b\varphi.$$

Модуль скорости равен геометрической сумме ее составляющих:

$$v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{b^2 + (-b\varphi)^2} = b\sqrt{1+\varphi^2}. \qquad (4)$$

Составим теперь уравнение годографа скорости в полярных



К задаче 3.55

координатах. Как видно из рис. *б*, угол наклона вектора скорости к полярной оси

$$\varphi_1 = \varphi - \operatorname{arctg}\left|\frac{v_\varphi}{v_\rho}\right| = \varphi - \operatorname{arctg}\varphi. \qquad (5)$$

Из выражения (4) находим полярный радиус годографа скорости:

$$\rho_1 = b\sqrt{1+\varphi^2}. \qquad (6)$$

Это – уравнение годографа скорости в полярных координатах. Выразим из (6) угол φ:

$$\varphi = \sqrt{\frac{\rho_1^2}{b^2} - 1}. \qquad (7)$$

Подставим значение (7) в выражение (5):

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{\rho_1^2}{b^2} - 1} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\rho_1^2}{b^2} - 1}. \qquad (8)$$

Итак, после исключения времени получено уравнение (8), которое является уравнением искомого годографа скорости (рис. *в*).

Задача 3.56. Точка M движется согласно уравнениям

$$\rho = bt, \tag{1}$$

$$\varphi = kt, \tag{2}$$

где k, b – постоянные.

Найти траекторию точки, закон движения по траектории и годограф скорости.

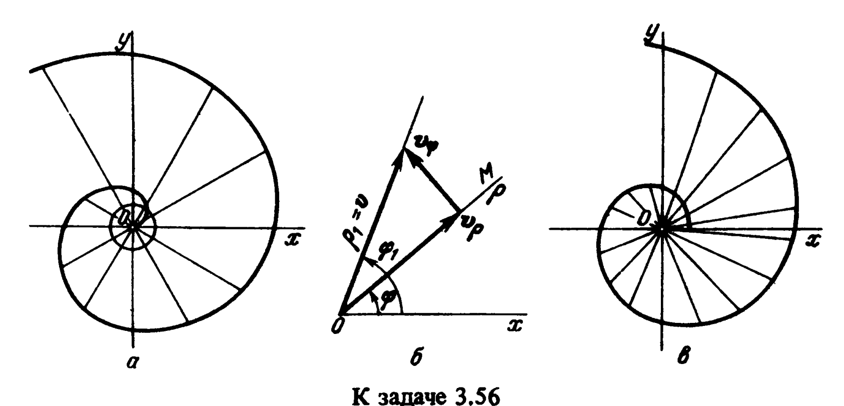
Решение. Для нахождения траектории движения выразим из (2) время t:

$$t = \varphi/k. \tag{3}$$

После подстановки (3) в (1) имеем

$$\rho = b\varphi/k.$$

Таким образом, траектории точки – спираль Архимеда (рис. *а*). Для



К задаче 3.56

нахождения закона движения определим радиальную и трансверсальную составляющие скорости:

$$v_\rho = \dot{\rho} = \frac{d}{dt}(bt) = b, \quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi} = bt\frac{d}{dt}(kt) = bkt.$$

Модуль скорости будет равен геометрической сумме ее составляющих:

$$v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{b^2 + (bkt)^2} = bk\sqrt{t^2 + \frac{1}{k^2}}.$$

Как известно, закон движения точки по траектории определяется следующим выражением:

$$s = \int_0^t v\,dt.$$

Подставляя в это выражение значение скорости, имеем

$$s = \int_0^t bk\sqrt{t^2 + \frac{1}{k^2}}\,dt. \tag{4}$$

Интегрируя (4), получим

$$s = bk\left[\frac{t}{2}\sqrt{t^2 + \frac{1}{k^2}} + \frac{1}{2k^2}\ln\left(t + \sqrt{t^2 + \frac{1}{k^2}}\right)\right]_0^t =$$

$$= \frac{bt}{2}\sqrt{k^2t^2 + 1} + \frac{b}{2k}\ln(kt + \sqrt{k^2t^2 + 1}).$$

Найдем теперь уравнение годографа скорости в полярных координатах. Как видно из рис. *б*, угол наклона вектора скорости к полярной оси

$$\varphi_1 = \varphi + \operatorname{arctg}\frac{v_\varphi}{v_\rho} = \varphi + \operatorname{arctg} kt = \varphi + \operatorname{arctg}\varphi. \tag{5}$$

Из выражения для скорости находим полярный радиус годографа:

$$\rho_1 = b\sqrt{1 + k^2t^2} = b\sqrt{1 + \varphi^2}. \tag{6}$$

Выразим из (6) угол φ:

$$\varphi = \sqrt{\frac{\rho_1^2}{b^2} - 1}. \tag{7}$$

Подставим значение (7) в уравнение (5):

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{\rho_1^2}{b^2} - 1} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\rho_1^2}{b^2} - 1}. \tag{8}$$

Итак, после исключения времени получено уравнение годографа скорости. На рис. *в* построен годограф скорости согласно уравнению (8).

Задача 3.57. Планета движется вокруг Солнца согласно законам Кеплера. Ее траектория – эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце. Секторная скорость планеты относительно фокуса F – величина постоянная. Найти годограф скорости, рассматривая планету и Солнце как точки.

Решение. Удвоенная секторная скорость планеты

$$\rho^2 \dot{\varphi} = c = \text{const}. \tag{1}$$

Уравнение эллипса в полярных координатах имеет вид

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}. \tag{2}$$

В декартовых координатах уравнения движения планеты будут

$$x = \rho\cos\varphi = \frac{p\cos\varphi}{1 - e\cos\varphi}, \quad y = \rho\sin\varphi = \frac{p\sin\varphi}{1 - e\cos\varphi}. \tag{3}$$

Дифференцируя эти уравнения по времени, находим проекции скорости на декартовы оси:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{p\cos\varphi}{1 - e\cos\varphi}\right) = -\frac{p\sin\varphi}{(1 - e\cos\varphi)^2}\dot{\varphi}, \\ v_y &= \dot{y} = \frac{d}{dt}\left(\frac{p\sin\varphi}{1 - e\cos\varphi}\right) = \frac{p(\cos\varphi - e)}{(1 - e\cos\varphi)^2}\dot{\varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Подставим в уравнения (4) значение $(1 - e\cos\varphi) = p/\rho$, полученное из (2). Тогда имеем

$$v_x = -\frac{\sin\varphi}{p}\rho^2\dot{\varphi}, \quad v_y = \frac{\cos\varphi - e}{p}\rho^2\dot{\varphi}, \tag{5}$$

или, учитывая (1), находим вместо (5)

$$v_x = -\frac{\sin\varphi}{p}c, \quad v_y = \frac{\cos\varphi - e}{p}c. \tag{6}$$

Исключим из этой системы уравнений угол φ. Для этого определим из уравнений (6) $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$; возведем каждую из этих функций в квадрат и сложим их. Получим

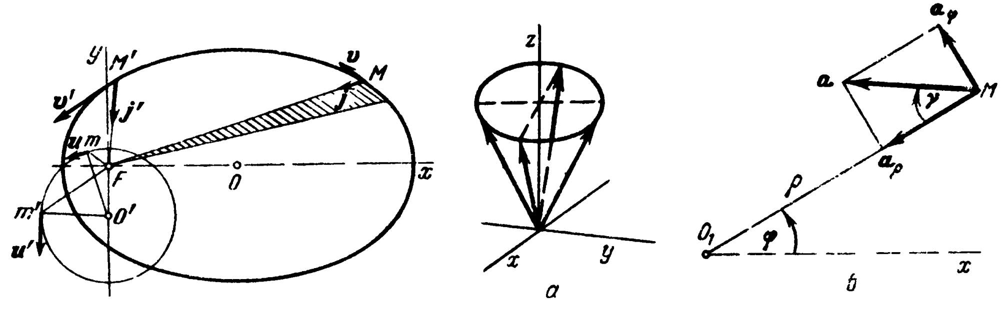
$$v_x^2 + \left(v_y + \frac{ce}{p}\right)^2 = \frac{c^2}{p^2}. \tag{7}$$

Это – уравнение годографа скорости, оно представляет собой окружность, центр которой лежит на оси y на расстоянии ce/p от фокуса F. Следовательно (см. рис.), в то время как точка (планета) движется по эллипсу, соответствующая точка годографа описывает в том же направлении окружность.

Задача 3.58. Уравнения движения точки заданы в цилиндрической системе координат:

$$\rho = \rho_0(1+\beta t), \quad \varphi = \varphi_1 \ln(1+\beta t), \quad z = z_0(1+\beta t). \tag{1}$$

где ρ_0, φ_1, z_0, β – постоянные величины. Найти траекторию точки, ее скорость и ускорение, годограф скорости, а также радиус кривизны траектории.



К задаче 3.57 К задаче 3.58

Р е ш е н и е. Из первого и третьего уравнений движения точки следует, что ρ_0 и z_0 являются значениями радиуса-вектора ρ и аппликаты z в начальный момент времени (при $t = 0$). Постоянная φ_1 определяется несколько сложнее. Переписав второе уравнение системы (1) в виде

$$e^{\varphi/\varphi_1} = 1+\beta t, \tag{2}$$

находим, что $\varphi = \varphi_1$ при $e = 1+\beta t$, или при

$$t_1 = \frac{e-1}{\beta}. \tag{3}$$

Заметим, что начальное значение угла φ_0 равно нулю. Это следует из (2) при $t = 0$. Уравнения (1) можно рассматривать как параметрические уравнения траектории, в которых параметром является время. Для нахождения уравнений траектории в явном виде исключим из уравнений (1) время. Из системы первых двух уравнений находим

$$\varphi = \varphi_1 \ln(\rho/\rho_0),$$

или

$$\rho = \rho_0 e^{\varphi/\varphi_1}. \tag{4}$$

Исключая время из первого и третьего уравнений системы (1), имеем

$$z = \frac{z_0}{\rho_0}\rho. \tag{5}$$

Совокупность уравнений (4) и (5) определяет пространственную траекторию движущейся точки. Уравнение (4) определяет цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси z, проекция которой на плоскость xy является логарифмической спиралью. Уравнение (5) определяет круговую коническую поверхность с вершиной в начале координат. Половина угла при вершине конуса равна $\operatorname{arctg}(\rho_0/z_0)$. Пересечение этих двух поверхностей дает траекторию точки.

Переходим к определению скорости точки. Воспользуемся формулами для проекций скорости точки на оси цилиндрической системы координат. Учитывая уравнения (1), получаем

$$v_\rho = \dot\rho = \rho_0\beta, \tag{6}$$

$$v_\varphi = \rho\dot\varphi = \varphi_1\frac{\beta}{1+\beta t}\rho = \varphi_1\beta\rho_0, \tag{7}$$

$$v_z = z_0\beta. \tag{8}$$

Модуль скорости с учетом ортогональности цилиндрических осей координат

$$v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2 + v_z^2} = \beta\sqrt{\rho_0^2 + \rho_0^2\varphi_1^2 + z_0^2} = \text{const}. \tag{9}$$

Таким образом, точка движется равномерно.

Углы, образованные осями цилиндрической системы координат со скоростью, определяются формулами

$$\begin{aligned}
\cos(\widehat{\mathbf{v},\rho}) &= \frac{v_\rho}{v} = \frac{\rho_0}{\sqrt{\rho_0^2+\rho_0^2\varphi_1^2+z_0^2}} = \text{const},\\
\cos(\widehat{\mathbf{v},\varphi}) &= \frac{v_\varphi}{v} = \frac{\varphi_1\rho_0}{\sqrt{\rho_0^2+\rho_0^2\varphi_1^2+z_0^2}} = \text{const},\\
\cos(\widehat{\mathbf{v},z}) &= \frac{v_z}{v} = \frac{z_0}{\sqrt{\rho_0^2+\rho_0^2\varphi_1^2+z_0^2}} = \text{const}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Пользуясь формулами (6)–(10), нетрудно построить годограф (рис. *a*) – геометрическое место концов векторов скорости, отложенных из начала координат. Действительно, годограф будет окружностью, плоскость которой перпендикулярна оси z и пересекает ее в точке, находящейся на расстоянии $v_z = z_0\beta$ от начала координат. Радиус окружности

$$\sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2} = \beta\rho_0\sqrt{1+\varphi_1^2}. \tag{11}$$

Переходим к определению ускорения точки. Проекции ускорения на оси цилиндрической системы координат находятся по формулам

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = -\rho_0 \frac{(1+\beta t)}{(1+\beta t)^2} \varphi_1^2\beta^2 = -\frac{\rho_0^2\varphi_1^2\beta^2}{\rho}, \tag{12}$$

$$a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = -\rho \frac{\varphi_1\beta^2}{(1+\beta t)^2} + \frac{2\rho_0\beta^2\varphi_1}{1+\beta t} =$$

$$= -\frac{\rho_0^2\varphi_1\beta^2}{\rho} + \frac{2\rho_0^2\beta^2\varphi_1}{\rho} = +\frac{\rho_0^2\beta^2\varphi_1}{\rho}, \tag{13}$$

$$a_z = \ddot{z} = 0. \tag{14}$$

Таким образом, ускорение точки лежит в плоскости, перпендикулярной к оси z (рис. *б*). Обозначая буквой γ угол, образованный ускорением с отрицательным направлением радиальной скорости, найдем его по формуле (см. рис.)

$$\operatorname{ctg}\gamma = \frac{a_\rho}{a_\varphi} = \varphi_1. \tag{15}$$

Модуль ускорения точки

$$a = \sqrt{a_\rho^2 + a_\varphi^2} = \frac{\rho_0^2\beta^2\varphi_1}{\rho}\sqrt{1+\varphi_1^2}. \tag{16}$$

Заметим, что это ускорение будет одновременно нормальным ускорением точки, так как согласно (9) точка движется равномерно и, следовательно, ее касательное ускорение равно нулю.

Поэтому радиус кривизны траектории определится формулой для нормального ускорения:

$$r = \frac{v^2}{a_n} = \frac{\rho\beta^2(\rho_0^2 + \rho_0^2\varphi_1^2 + z_0^2)}{\rho_0^2\beta^2\varphi_1\sqrt{1+\varphi_1^2}} = \rho\,\frac{\rho_0^2 + \rho_0^2\varphi_1^2 + z_0^2}{\rho_0^2\varphi_1\sqrt{1+\varphi_1^2}}. \tag{17}$$

Радиус кривизны прямо пропорционален радиусу-вектору точки.

Задача 3.59. Точка M движется согласно уравнениям

$$\rho = 2a\cos(kt/2), \tag{1}$$

$$\varphi = kt/2. \tag{2}$$

Найти траекторию точки, закон движения по траектории и годограф скорости.

Р е ш е н и е. Для нахождения траектории перейдем к декартовым координатам и исключим время из системы уравнений (1), (2):

$$x = \rho\cos\varphi = 2a\cos^2\frac{kt}{2} = 2a\cos^2\varphi,$$
$$y = \rho\sin\varphi = 2a\cos\varphi\sin\varphi = a\sin 2\varphi. \qquad (3)$$

Преобразуем первое уравнение движения:

$$x = 2a\cos^2\varphi = 2a\frac{1+\cos 2\varphi}{2} = a + a\cos 2\varphi; \qquad (4)$$

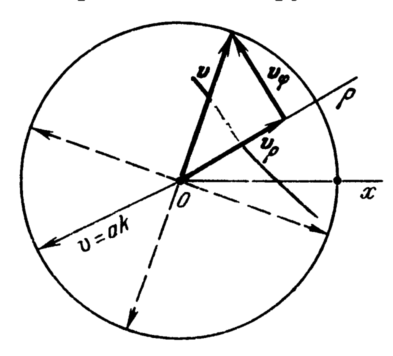
из (4) имеем

$$x - a = a\cos 2\varphi;$$

возведем (3) и (4) в квадрат и сложим:

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2.$$

Таким образом, траектория точки – окружность (см. рис.).



К задаче 3.59

Для нахождения закона движения определим радиальную и трансверсальную составляющие скорости:

$$v_\rho = \dot\rho = \frac{d}{dt}\left(2a\cos\frac{kt}{2}\right) = -ak\sin\frac{kt}{2},$$

$$v_\varphi = \rho\dot\varphi = 2a\cos\frac{kt}{2}\;\frac{d}{dt}\left(\frac{kt}{2}\right) = ak\cos\frac{kt}{2}.$$

Модуль скорости равен геометрической сумме ее составляющих:

$$v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{\left(-ak\sin\frac{kt}{2}\right)^2 + \left(ak\cos\frac{kt}{2}\right)^2} = ak = \text{const}.$$

Закон движения определим следующим образом:

$$s = \int_0^t v\,dt = \int_0^t ak\,dt = akt.$$

Найдем теперь годограф скорости. Угол наклона вектора скорости к полярной оси

$$\varphi_1 = \varphi + \operatorname{arctg}\frac{v_\varphi}{v_\rho} = \varphi + \operatorname{arctg}\left(-\operatorname{ctg}\frac{kt}{2}\right),$$

полярный радиус годографа равен скорости:

$$\rho_1 = v = ak = \text{const}.$$

Итак, годограф скорости – окружность радиусом ak.

Задача 3.60. Точка M движется согласно уравнениям

$$\rho = kt/\sin\varphi, \qquad (1)$$

$$\varphi = bt, \qquad (2)$$

где k, b постоянны (рис. a).

Найти траекторию точки и годограф скорости.

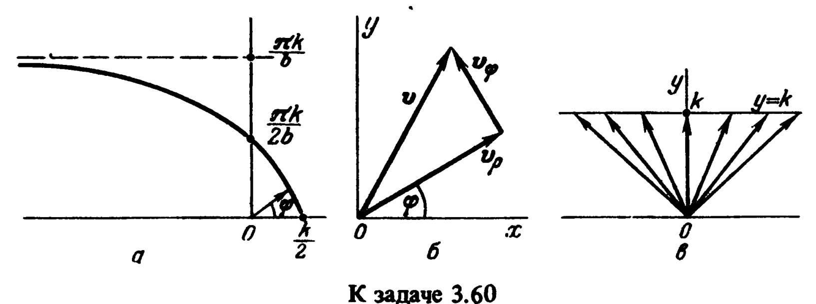
Решение. Для нахождения траектории точки выразим из (2) время t:

$$t = \varphi/b. \qquad (3)$$

После подстановки (3) в (1) имеем

$$\rho = \frac{k\varphi}{b\sin\varphi}.$$

Это – уравнение траектории в полярных координатах. Перейдем к



К задаче 3.60

определению годографа, для этого найдем радиальную и трансверсальную составляющие скорости:

$$v_\rho = \dot\rho = \frac{d}{dt}\left(\frac{kbt}{b\sin bt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{kt}{\sin bt}\right) = \frac{k\sin bt - bkt\cos bt}{\sin^2 bt}, \qquad (4)$$

$$v_\varphi = \rho\cdot\dot\varphi = \frac{k\varphi}{b\sin\varphi}\,\frac{d}{dt}(bt) = \frac{kbt}{b\sin bt}\,b = \frac{kbt}{\sin bt}. \qquad (5)$$

Для нахождения годографа скорости перейдем к декартовым координатам (рис. *б*):

$$v_x = v_\rho \cos\varphi - v_\varphi \sin\varphi, \quad (6)$$

$$v_y = v_\rho \sin\varphi + v_\varphi \cos\varphi. \quad (7)$$

После подстановки в (6), (7) выражений (2), (4), (5), имеем

$$v_x = k \operatorname{ctg} bt - \frac{kbt}{\sin^2 bt}, \quad v_y = k.$$

Следовательно, годограф скорости – прямая линия $y = k$ (рис. *в*).

Задача 3.61. Точка M движется согласно уравнениям

$$\rho = be^t, \quad (1)$$

$$\varphi = t/k, \quad (2)$$

где k, b – постоянные.

Найти траекторию точки и годограф скорости.

Р е ш е н и е. Для нахождения траектории точки исключим из уравнений движения время. Для этого выразим из (2) время

$$t = k\varphi. \quad (3)$$

После подстановки (3) в (1) имеем

$$\rho = be^{k\varphi}.$$

Таким образом, траектория точки – логарифмическая спираль (см. рис. *а*).

Перейдем к определению годографа скорости. Для этого найдем радиальную и трансверсальную составляющие скорости:

$$v_\rho = \dot\rho = \frac{d}{dt}(be^t) = be^t,$$

$$v_\varphi = \rho\dot\varphi = be^t \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{k}\right) = \frac{b}{k} e^t.$$

Модуль скорости будет равен геометрической сумме ее составляющих:

$$v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{(be^t)^2 + \left(\frac{b}{k} e^t\right)^2} = be^t \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}}. \quad (4)$$

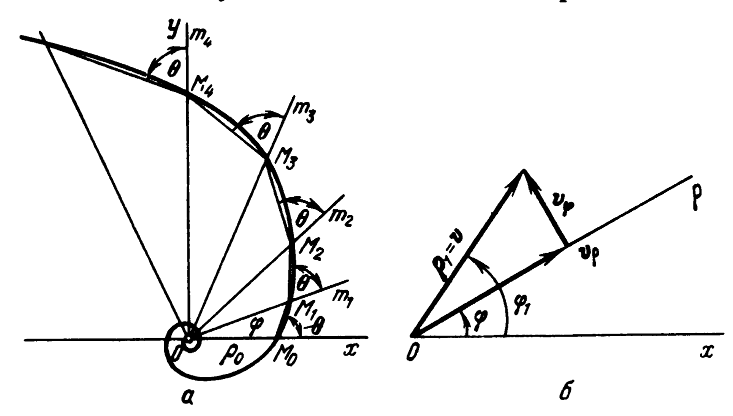
Составим теперь уравнение годографа скорости в полярных координатах. Как видно из рис. *б*, угол наклона вектора скорости к полярной оси

$$\varphi_1 = \varphi + \operatorname{arctg} \frac{v_\varphi}{v_\rho} = \frac{t}{k} + \operatorname{arctg} \frac{1}{k}. \quad (5)$$

Из выражений (4) имеем полярный радиус годографа скорости

$$\rho_1 = be^t\sqrt{1 + \frac{1}{k^2}}\,, \tag{6}$$

который отложен под углом φ_1 к оси x на рис. *б*. Итак, получены



К задаче 3.61

полярные уравнения годографа скорости. Выразим теперь из (5) время:

$$t = \left(\varphi_1 - \operatorname{arctg}\frac{1}{k}\right)k. \tag{7}$$

Подставим значение (7) в выражение (6):

$$\rho_1 = b\sqrt{1 + \frac{1}{k^2}}\exp\left[k\left(\varphi_1 - \operatorname{arctg}\frac{1}{k}\right)\right]. \tag{8}$$

Итак, после исключения времени получено уравнение (8), которое является уравнением годографа скорости. Аналогично траектории точки, годограф – логарифмическая спираль.

Задача 3.62. Точка M движется согласно уравнениям

$$\rho = a, \tag{1}$$

$$\varphi = kt, \tag{2}$$

$$z = bt, \tag{3}$$

где a, b, k – постоянные.

Найти траекторию точки, закон движения по траектории годограф скорости.

Р е ш е н и е. Из уравнений движения видим, что траектория точки – винтовая линия на поверхности цилиндра радиусом a (рис. *а*).

Для нахождения закона движения определим радиальную, трансверсальную и вертикальную составляющие скорости:

$$v_\rho = \dot{\rho} = \frac{d}{dt}(a) = 0,$$

$$v_\varphi = \rho\dot{\varphi} = a\frac{d}{dt}(kt) = ak,$$

$$v_z = \dot{z} = \frac{d}{dt}(bt) = b.$$

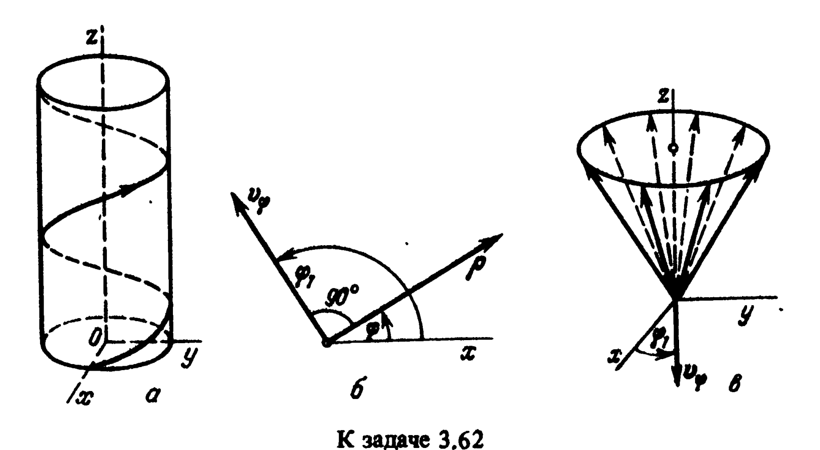
Модуль скорости будет равен геометрической сумме ее составляющих:

$$v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2 + v_z^2} = \sqrt{(ak)^2 + b^2} = \text{const}.$$

Закон движения определим следующим образом:

$$s = \int_0^t v\,dt = \int_0^t \sqrt{a^2k^2 + b^2}\,dt = \sqrt{a^2k^2 + b^2}\cdot t.$$

Полагаем, что начало отсчета пути s совпадает с положением точки на траектории в момент времени $t = 0$.



К задаче 3.62

Найдем теперь годограф скорости. Как видно из рис. *б*, угол наклона вектора скорости к полярной оси (в горизонтальной плоскости)

$$\varphi_1 = \varphi + \pi/2.$$

Определим полярный радиус годографа

$$\rho_1 = \sqrt{v_\varphi^2 + v_\rho^2} = v_\varphi = ak.$$

Аппликата годографа

$$z_1 = v_z = b.$$

Итак, годограф скорости – окружность радиусом ak, лежащая в горизонтальной плоскости, поднятая по вертикали на высоту b (рис. *в*). Векторы скорости образуют конус.

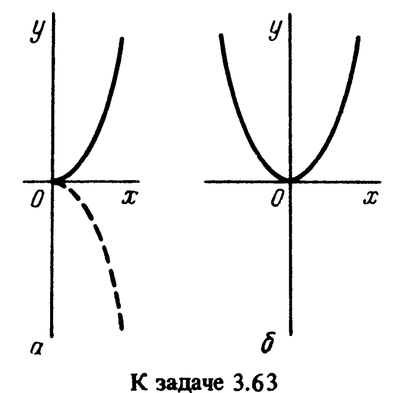
Задача 3.63. Движение точки задано уравнениями

$$x = t^2/2, \qquad (1)$$

$$y = t^3/3. \qquad (2)$$

Определить траекторию, закон движения точки по траектории и годограф скорости.

Р е ш е н и е. Чтобы найти уравнение траектории, исключим из уравнений (1) и (2) время. Для этого возведем (1) в куб, а (2) – в квадрат и затем разделим полученные уравнения друг на друга:



К задаче 3.63

$$\frac{y^2}{x^3} = \frac{8}{9}, \quad \text{или} \quad y^2 = \frac{8}{9}x^3. \qquad (3)$$

Уравнение (3) – это уравнение полукубической параболы, которая изображена на рис. *а*. Поскольку параметр t – время – может принимать только положительные значения, из (2) следует, что ординаты движущейся точки также могут быть только положительными. Движение точки по траектории начинается в момент времени $t = 0$ из начала координат и происходит только по верхней ветви кривой, что показано на рис. *а* сплошной линией.

Для определения закона движения точки по траектории воспользуемся выражением дифференциала длины дуги:

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt. \qquad (4)$$

Находим производные координат по времени:

$$\dot{x} = t, \quad \dot{y} = t^2 \qquad (5)$$

и подставляем в (4). Получаем

$$ds = \sqrt{t^2 + (t^2)^2}\, dt = t\sqrt{1 + t^2}\, dt.$$

Проинтегрируем это равенство от момента начала движения до произволь-

ного момента времени t:

$$s=\int_0^t t\sqrt{1+t^2}\,dt=\frac{1}{3}\sqrt{1+t^2}\,\Big|_0^t=\frac{1}{3}\sqrt{1+t^2}-\frac{1}{3}. \tag{6}$$

Формула (6) определяет путь как функцию времени. Уравнения (5), представляющие проекции вектора скорости

$$v_x=\dot{x}=t, \qquad v_y=\dot{y}=t^2, \tag{7}$$

задают годограф скорости в параметрической форме. Чтобы получить уравнение годографа, исключим из (7) время. Тогда

$$v_y=v_x^2. \tag{8}$$

В системе координат $x_1=v_x$, $y_1=v_y$ уравнение (8) соответствует параболе, изображенной на рис. *б*. Из первого уравнения (7) следует, что абсциссы точек годографа $x_1=v_x$ могут быть только положительными. Таким образом, годографом движения служит только правая ветвь параболы.

Указание. Для приобретения навыков в решении задач на определение скорости и ускорения точки рекомендуется решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 11.1, 11.3–11.7, 11.11, 11.13–11.17, 12.8–12.10, 12.13, 12.15, 12.16, 12.22, 12.25–12.27, 12.33–12.36, 12.38, 12.39.

§4. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

1. Основные определения и зависимости

Три величины q_1, q_2, q_3 называются криволинейными координатами точки, если они однозначно определяют положение этой точки в пространстве. Если принято правило отсчета этих величин для любого положения точки в пространстве, то тем самым определена криволинейная система координат. Так как радиус-вектор точки $\boldsymbol{r}$ и криволинейные координаты q_1, q_2, q_3 независимо и однозначно определяют положение точки, то можно рассматривать радиус-вектор как функцию криволинейных координат

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(q_1,q_2,q_3). \tag{1*}$$

Координатной линией (q_1) называется линия, которую описывает конец радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ при изменении координаты q_1 и фиксированных значениях двух других координат $(q_{20},\ q_{30})$. Уравнение этой координатной линии будет

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(q_1,q_{20},q_{30}). \tag{2*}$$

Аналогичным образом могут быть получены две другие координатные линии

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_{10}, q_2, q_{30}),$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_{10}, q_{20}, q_3),$$

проходящие через точку $M_0(q_{10}, q_{20}, q_{30})$. Следовательно, через каждую точку пространства можно провести три координатные линии (q_1), (q_2), (q_3).

Касательные, проведенные в данной точке к каждой из трех координатных линий, называются координатными осями и обозначаются $[q_1]$, $[q_2]$, $[q_3]$. Положительное направление каждой координатной оси выбирается в сторону возрастания соответствующей криволинейной координаты. Орты координатных осей будем обозначать $\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3$.

Координатными поверхностями называются поверхности, проходящие через фиксированную точку M_0, определяемые уравнениями:

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_1, q_2, q_{30})$, поверхность (q_1, q_2),

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_{10}, q_2, q_3)$, поверхность (q_2, q_3),

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_1, q_{20}, q_3)$, поверхность (q_3, q_1).

Система криволинейных координат называется ортогональной, если в каждой точке пространства оси координат взаимно перпендикулярны. Условием ортогональности является

$$\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{k}_j = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j. \tag{3*}$$

Коэффициентами Ламе (1795–1870) называются

$$H_i = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right| = -\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{4*}$$

Орты криволинейных осей координат выражаются через коэффициенты Ламе формулами

$$\boldsymbol{k}_i = \frac{1}{H_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{5*}$$

Дифференциалы дуг координатных линий равны

$$ds_1 = H_1 dq_1, \quad ds_2 = H_2 dq_2, \quad ds_3 = H_3 dq_3.$$

Пользуясь этими формулами, можно легко находить коэффициенты Ламе для различных систем криволинейных координат.

Проекции скорости и ускорения на оси криволинейных координат даются формулами*)

$$v_{q_i} = H_i \dot{q}_i \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{6*}$$

$$a_{q_i} = \frac{1}{H_i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right), \tag{7*}$$

где

$$T = \frac{1}{2}\dot{v}^2 = \frac{1}{2}(H_1^2\dot{q}_1^2 + H_2^2\dot{q}_2^2 + H_3^2\dot{q}_3^2). \tag{8*}$$

Решение задач на кинематику точки в криволинейных координатах рекомендуется вести в следующей последовательности:

1) для заданной системы криволинейных координат определить коэффициенты Ламе;

2) установить, является ли система криволинейных координат ортогональной;

3) найти проекции скорости на оси криволинейных координат;

4) найти проекции ускорения на оси криволинейных координат.

2. Системы криволинейных координат. Координатные оси, линии и поверхности. Коэффициенты Ламе

Задача 3.64. Выразить в декартовых координатах условия, при которых система криволинейных координат будет ортогональной. Проверить ортогональность сферической системы координат.

Решение. 1. Общий случай. Пусть положение точки M в пространстве определяется в прямоугольной декартовой системе координатами x, y, z, в криволинейной системе координатами q_1, q_2, q_3. Радиус-вектор точки M, проведенный из начала декартовой системы, равен $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. Координатная линия криволинейной системы координат является годографом радиуса-вектора $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_1, q_2, q_3)$ при изменении только одной криволинейной координаты q_i. Тогда, задавая направление координатных осей $[q_1]$, $[q_2]$, $[q_3]$ ортами $\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3$ и замечая, что координатная ось направлена по касательной к координатной линии (в сторону

---

*) Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Т. 1. – М.: Наука, 1985.

возрастания координаты), можно записать

$$k_i = \frac{\partial r/\partial q_i}{|\partial r/\partial q_i|}. \qquad (1)$$

Это равенство следует из того, что оба вектора $\partial r/\partial q_i$ и k_i направлены по касательной к годографу радиуса-вектора в сторону увеличения координаты q_i. Знаменатель в (1) равен коэффициенту Ламе

$$\left|\frac{\partial r}{\partial q_i}\right| = \left|\frac{\partial x}{\partial q_i} i + \frac{\partial y}{\partial q_i} j + \frac{\partial z}{\partial q_i} k\right| =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} = H_i.$$

Тогда формула (1) может быть переписана в виде

$$k_i = \frac{1}{H_i} \cdot \frac{\partial r}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3). \qquad (2)$$

Условие ортогональности криволинейной системы координат

$$k_i k_j = 0 \qquad (i \neq j). \qquad (3)$$

Учитывая равенство (2), получим вместо (3)

$$\frac{\partial r}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial r}{\partial q_j} = 0 \qquad (i \neq j),$$

что дает три равенства

$$\frac{\partial r}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial r}{\partial q_2} = 0; \quad \frac{\partial r}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial r}{\partial q_3} = 0; \quad \frac{\partial r}{\partial q_3} \cdot \frac{\partial r}{\partial q_1} = 0. \qquad (4)$$

Выразив радиус-вектор через декартовы координаты, запишем (4) в виде

$$\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial z}{\partial q_2} = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial q_2}\frac{\partial x}{\partial q_3} + \frac{\partial y}{\partial q_2}\frac{\partial y}{\partial q_3} + \frac{\partial z}{\partial q_2}\frac{\partial z}{\partial q_3} = 0, \qquad (5)$$

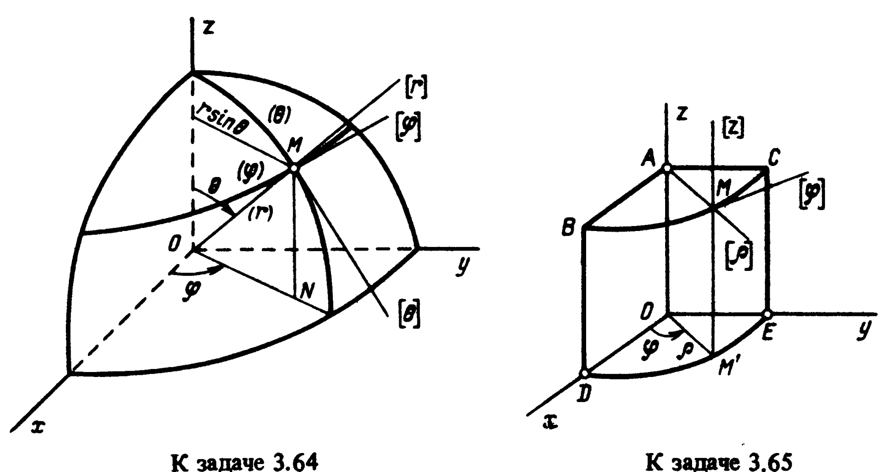
$$\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_3} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_3} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial z}{\partial q_3} = 0.$$

Эти равенства – аналитические условия ортогональности криволинейной системы координат.

2. Сферическая система координат (см. рисунок). Сферические координаты таковы:

$$q_1 = r, \qquad q_2 = \theta, \qquad q_3 = \varphi.$$

Координатная линия (r) и ось $[r]$ совпадают, это – прямая, проведенная через начало координат и точку M. Координатная линия (θ) – окружность большого круга, проведенного радиусом OM, ось $[\theta]$ – касательная к этой окружности, проведенная в точке M в сторону возрастания угла θ. Координатная линия (φ) – окружность параллельного круга



К задаче 3.64 К задаче 3.65

радиусом $r\sin\theta$, ось $[\varphi]$ – касательная к этой окружности, проведенная в точке M в сторону возрастания угла φ.

Декартовы координаты могут быть выражены через сферические соотношениями

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta.$$

Внеся эти значения координат в систему уравнений (5), находим

$$\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \theta} = r\sin\theta\cos\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) - r\sin\theta\cos\theta = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \varphi} = r\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi - r\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial \varphi} =$$

$$= -r^2\cos\theta\cos\varphi\sin\theta\sin\varphi + r^2\cos\theta\cos\varphi\sin\theta\sin\varphi = 0.$$

Таким образом, сферическая система координат ортогональна.

Задача 3.65. Уравнения движения точки заданы в цилиндрической системе координат. Зная формулы перехода от цилиндрических координат к декартовым:

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad z = z,$$

проверить ортогональность цилиндрической системы координат. Найти координатные линии, оси и координатные поверхности.

Решение. Подставив аналитические условия ортогональности криволинейной системы координат (5) из задачи 3.64 $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$ и воспользовавшись зависимостями (1), найдем

$$-\rho\cos\varphi\sin\varphi + \rho\sin\varphi\cos\varphi = 0,$$
$$-\rho\sin\varphi\cdot 0 + \rho\cdot\cos\varphi\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0,$$
$$\cos\varphi\cdot 0 + \sin\varphi\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0.$$

Таким образом, цилиндрическая система координат ортогональна. Это показано на рисунке, где в точке M проведены цилиндрические оси координат: $[\rho]$, $[\varphi]$, $[z]$. Координатными линиями в этом случае являются: линия (ρ) – прямая AM, проходящая через точку M, вдоль которой $\varphi = \text{const}$ и $z = \text{const}$; линия (φ) – дуга окружности BMC, вдоль которой $\varphi = \text{const}$ и $z = \text{const}$. Координатными поверхностями в системе цилиндрических координат являются: а) поверхность $BCED$ цилиндра радиусом ρ с осью Oz, проходящая через заданную точку M, для которой $\rho = \text{const}$; б) полуплоскость $OAMM_1$, проходящая через ось Oz и точку M, для которой $\varphi = \text{const}$; в) горизонтальная плоскость ABC, проходящая через точку M, для которой $z = \text{const}$.

Задача 3.66. Эллиптическими координатами на плоскости называются координаты η_1, η_2, связанные с декартовыми координатами уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2+\eta_1} + \frac{y^2}{b^2+\eta_1} = 1, \tag{1}$$

$$\frac{x^2}{a^2+\eta_2} + \frac{y^2}{b^2+\eta_2} = 1, \tag{2}$$

где a и b – постоянные величины.

Определить границы изменений эллиптических координат η_1 и η_2 так, чтобы (1) представляло семейство софокусных эллипсов, а уравнение (2) – семейство софокусных гипербол (рис. a). Найти коэффициенты Ламе, координатные линии и оси, проверить ортогональность системы, если $a > b$.

Решение. Докажем, что уравнение (1) представляет собой семейство эллипсов, софокусных эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (3)$$

В самом деле, фокусное расстояние эллипса (3) равно

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \qquad (4)$$

полуоси A и B эллипса (1) соответственно определяются равенствами

$$A^2 = a^2 + \eta_1, \qquad B^2 = b^2 + \eta_1, \qquad (5)$$

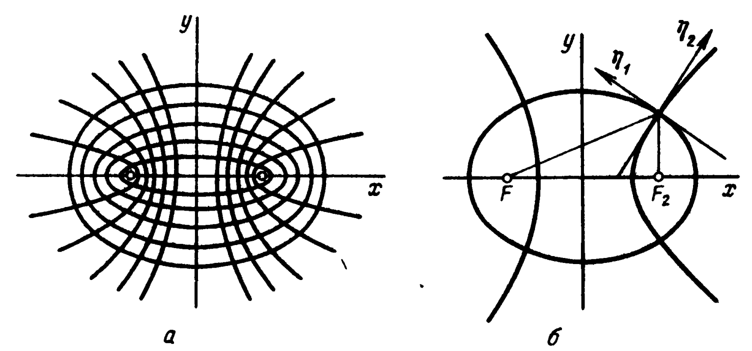
и, следовательно, фокусные расстояния эллипсов (1) и (3) будут равны

$$C = \sqrt{A^2 - B^2} = \sqrt{a^2 - b^2} = c. \qquad (6)$$

При этом уравнение (1) будет определять эллипс, если η_1 будет лежать в пределах

$$-b^2 < \eta_1 < +\infty, \qquad (7)$$

так как при этом $b^2 + \eta_1 > 0$ и тем более $a^2 + \eta_1 > 0$. Уравнение (2) будет



К задаче 3.66

определять семейство софокусных (с эллипсами) гипербол, если η_2 будет находиться в пределах

$$-a^2 < \eta_2 < -b^2, \qquad (8)$$

так как при этом $a^2 + \eta_2 > 0$ и $b^2 + \eta_2 < 0$.

Тогда, обозначая полуоси гиперболы (2) через A_1, B_1, находим

$$A_1^2 = a^2 + \eta_2, \qquad B_1^2 = -(b^2 + \eta_2), \qquad (9)$$

и фокусное расстояние гипербол равно

$$C_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} = \sqrt{a^2 - b^2} = c. \qquad (10)$$

Таким образом, изменяя η_1 и η_2 в пределах, указанных неравенствами (7) и (8), получим семейство софокусных эллипсов (1) и семейство софокусных гипербол (2). Через каждую точку плоскости будет проходить по одной кривой каждого семейства. При этом для определенности следует дополнительно указывать, в каком из четырех квадрантов находится рассматриваемая точка, так как эллипс пересекается с софокусной гиперболой в четырех симметричных точках (рис. б).

Координатными линиями $\eta_1 = \text{const}$ являются эллипсы, а координатными линиями $\eta_2 = \text{const}$ – софокусные гиперболы.

Переходим к определению коэффициентов Ламе. Решая совместно уравнения (1) и (2), находим

$$x^2 = \frac{(a^2+\eta_1)(a^2+\eta_2)}{a^2-b^2}, \tag{11}$$

$$y^2 = -\frac{(b^2+\eta_1)(b^2+\eta_2)}{a^2-b^2}. \tag{12}$$

Тогда коэффициенты Ламе будут

$$H_{\eta_1} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta_1}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta_1-\eta_2}{(a^2+\eta_1)(b^2+\eta_1)}}, \tag{13}$$

$$H_{\eta_2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta_2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta_2-\eta_1}{(a^2+\eta_2)(b^2+\eta_2)}}. \tag{14}$$

Исследуем ортогональность системы. Аналитическое условие ортогональности для эллиптической системы координат имеет вид

$$\frac{\partial x}{\partial \eta_1}\frac{\partial x}{\partial \eta_2} + \frac{\partial y}{\partial \eta_1}\frac{\partial y}{\partial \eta_2} = 0. \tag{15}$$

Вычисляя указанные частные производные, исходя из (11) и (12), и внося их в (15), получим после несложных преобразований

$$\frac{1}{4}\frac{1}{a^2-b^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{a^2-b^2} = 0. \tag{16}$$

Система координат ортогональна. Это следует и из известного свойства касательной к гиперболе – она делит угол между радиусами-векторами, проведенными из фокусов в точку касания, пополам, касательная к эллипсу является равнонаклоненной к тем же радиусам-векторам (рис. б).

Примечание. Эллиптические координаты иногда вводятся и при помощи других зависимостей. Так, например, переменные ξ и γ, связанные с декартовыми

координатами соотношениями

$$x = c\,\mathrm{ch}\,\xi \cos\gamma, \qquad y = c\,\mathrm{sh}\,\xi \sin\gamma,$$

также называются эллиптическими координатами и могут быть определены как функции эллиптических координат η_1 и η_2, рассмотренных в задаче.

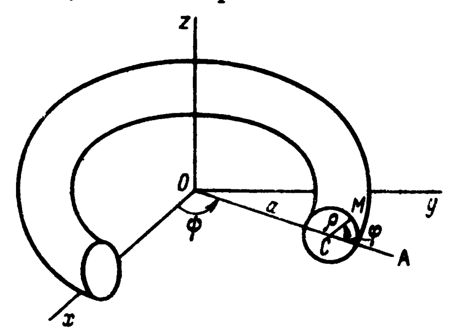
Можно легко показать, что координатные линии $\xi = \mathrm{const}$ являются эллипсами, а координатные линии $\gamma = \mathrm{const}$ – софокусными гиперболами, фокусное расстояние которых равно c.

Задача 3.67. Зависимость декартовых координат от тороидальных дана формулами

$$x = (a + \rho\cos\varphi)\cos\psi, \qquad y = (a + \rho\cos\varphi)\sin\psi, \qquad z = \rho\sin\varphi, \tag{1}$$

где $a = OC = \mathrm{const}$ – отрезок прямой OA, вращающейся в плоскости xOy декартовых координат (см. рисунок). Положение любой точки M в пространстве определяется тремя тороидальными координатами: азимутальным углом ψ, измеряемым между осью Ox и прямой OA, и двумя полярными координатами ρ и φ, лежащими в плоскости zOA, проходящей через точку M.

Проверить ортогональность тороидальной системы координат, а также найти координатные линии, оси и поверхности.



К задаче 3.67

Решение. Для проверки ортогональности тороидальной системы координат составим аналитические условия (5) из задачи 3.64. Вычисляя частные производные и внося их в (5), имеем

$$-\rho\cos\varphi\sin\varphi\cos^2\psi - \rho\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\psi + \rho\sin\varphi\cos\varphi = 0,$$

$$\rho\sin\varphi\cos\psi\,(a + \rho\cos\varphi)\sin\psi -$$
$$- \rho\sin\varphi\sin\psi\,(a + \rho\cos\varphi)\cos\psi + \rho\cos\varphi\cdot 0 = 0,$$

$$-\cos\varphi\cos\psi\,(a + \rho\cos\varphi)\sin\psi + \cos\varphi\sin\psi\,(a + \rho\cos\varphi)\cos\psi + \sin\varphi\cdot 0 = 0.$$

Таким образом, тороидальная система координат ортогональна.

Переходим к определению координатных линий и осей. Координатная линия (ρ) найдется, если положить $\varphi = \mathrm{const}$ и $\psi = \mathrm{const}$. Это будет полу-

прямая CM, которая одновременно будет являться и координатной осью $[\rho]$. Координатная линия (φ) найдется, если положить $\rho = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$. Это будет окружность с центром C и радиусом ρ, лежащая в плоскости zOA. Касательная к этой окружности, направленная в сторону возрастания угла φ, будет координатной осью $[\varphi]$. Координатную линию (ψ) получим, положив $\rho = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$. Это будет окружность с центром на оси z в точке $z = \rho \sin\varphi$, радиусом $(a + \rho\cos\psi)$, лежащая в плоскости, параллельной xOy. Касательная к этой окружности в точке M, направленная в сторону возрастания угла ψ, будет координатной осью $[\psi]$.

Координатными поверхностями будут: при $\rho = \text{const}$ — поверхность тора, при $\varphi = \text{const}$ — поверхность конуса с углом раствора $\pi/2 - \varphi$, при $\psi = \text{const}$ — плоскость zOA.

Задача 3.68. Определить коэффициенты Ламе для тороидальных координат ρ, φ, ψ, связанных с декартовыми координатами формулами (1) из задачи 3.67 (см. рисунок к задаче 3.67).

Решение. Для нахождения коэффициентов Ламе воспользуемся формулами (4*)

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}.$$

Для криволинейной координаты ρ находим

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\varphi\cos\psi, \qquad \frac{\partial y}{\partial \rho} = \cos\varphi\sin\psi, \qquad \frac{\partial z}{\partial \rho} = \sin\varphi$$

и, следовательно,

$$H_\rho = \sqrt{\cos^2\varphi\cos^2\psi + \cos^2\varphi\sin^2\psi + \sin^2\varphi} = 1.$$

Для криволинейной координаты φ имеем

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi\cos\psi; \qquad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi\sin\psi, \qquad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \rho\cos\varphi$$

и, следовательно,

$$H_\varphi = \sqrt{\rho^2(\sin^2\varphi\cos^2\psi + \sin^2\varphi\sin^2\psi + \cos^2\varphi)} = \rho.$$

Для криволинейной координаты ψ получим

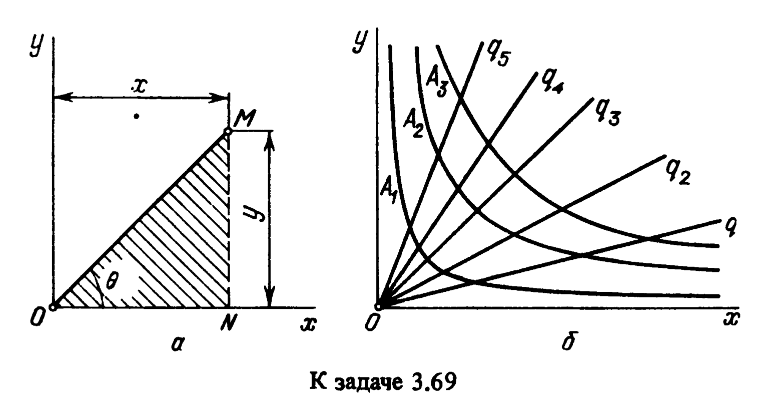
$$\frac{\partial x}{\partial \psi} = -(a + \rho\cos\varphi)\sin\psi, \qquad \frac{\partial y}{\partial \psi} = (a + \rho\cos\varphi)\cos\psi, \qquad \frac{\partial z}{\partial \psi} = 0.$$

Тогда

$$H_\psi = \sqrt{(a + \rho\cos\varphi)^2(\sin^2\psi + \cos^2\psi)} = a + \rho\cos\varphi.$$

Задача 3.69. Криволинейными координатами на плоскости являются площадь треугольника OMN и $\sin\theta$ (рис. *а*).

Найти уравнения для перехода от криволинейных координат к декартовым, а также координатные линии.



К задаче 3.69

Решение. Обозначая для краткости $\sin\theta = q$, находим зависимость криволинейных координат от декартовых

$$xy = 2A, \qquad y = \frac{q}{\sqrt{1-q^2}}\, x.$$

Координатные линии, соответствующие координате q, найдутся, если положить координату $A = \text{const}$. Это будут гиперболы (рис. *б*). Координатные линии, отвечающие координате A, найдутся, если положить $q = \text{const}$. Это прямые, исходящие из начала координат под разными углами. Система координат неортогональна.

3. Скорости и ускорения точек в криволинейных координатах

Задача 3.70. Определить проекции скорости и проекции ускорения на оси сферических координат.

Решение. В задаче 3.64 были определены координатные линии сферической системы координат. Пользуясь формулами (6*), находим дифференциалы дуг координатных линий и затем проекции скорости на оси сферической системы координат

$$(ds)_r = dr, \qquad (ds)_\theta = r\,d\theta, \qquad (ds)_\varphi = r\sin\theta\, d\varphi \tag{1}$$

и, следовательно,

$$v_r = \dot r, \qquad v_\theta = r\dot\theta, \qquad v_\varphi = r\sin\theta\cdot\dot\varphi, \tag{2}$$

где роль обобщенных координат играют сферические координаты

$$q_1 = r, \qquad q_2 = \theta, \qquad q_3 = \varphi. \tag{3}$$

Тогда, учитывая формулу (6*)

$$v_{q_i} = H_i \dot{q}_i,$$

находим коэффициенты Ламе

$$H_r = 1, \quad H_\theta = r, \quad H_\varphi = r\sin\theta. \tag{4}$$

Зная эти коэффициенты, ищем проекции ускорения на оси сферических координат, пользуясь формулой (8*):

$$T = \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2) \tag{5}$$

и формулой (7*)

$$a_r = \frac{1}{H_r}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r}\right) = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2, \tag{6}$$

так как

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \dot{r}, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = r\dot{\theta}^2 + r\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2,$$

$$a_\theta = \frac{1}{H_\theta}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta}\right) = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\varphi}^2, \tag{7}$$

так как

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = r^2\dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}; \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = r^2\sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\varphi}^2;$$

$$a_\varphi = \frac{1}{H_\varphi}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi}\right) = r\sin\theta\cdot\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\cos\theta\cdot\dot{\theta}\dot{\varphi}, \tag{8}$$

так как

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = r^2\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = r^2\sin^2\theta\cdot\ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi} + 2r^2\sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\theta}\dot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

Задача 3.71. Определить проекции скорости и ускорения точки на оси тороидальной системы координат (см. рисунок к задаче 3.67).

Решение. Пусть прямая OA вращается вокруг точки O в плоскости Oxy. Возьмем точку C на этой прямой за полюс и обозначим расстояние $OC = a$. Положение любой точки M можно определить заданием трех коор-

динат: азимутального угла ψ, образованного осью x и прямой OA, при котором плоскость zOA пройдет через M, и двух полярных координат ρ и φ точки M в этой плоскости при полюсе C. Координаты ρ, φ, ψ называются тороидальными координатами. Декартовы координаты выражаются через тороидальные координаты формулами

$$x = (a + \rho\cos\varphi)\cos\psi,$$
$$y = (a + \rho\cos\varphi)\sin\psi,$$
$$z = \rho\sin\varphi.$$

Находим коэффициенты Ламе, пользуясь равенствами (6*):

$$ds_1 = H_1 d\rho, \qquad ds_2 = H_2 d\varphi, \qquad ds_3 = H_3 d\psi. \tag{1}$$

Заметив, что

$$ds_1 = d\rho, \qquad ds_2 = \rho\, d\varphi, \qquad ds_3 = (a + \rho\cos\varphi)\, d\psi, \tag{2}$$

и сопоставляя (1) и (2), имеем

$$H_\rho = 1, \quad H_\varphi = \rho, \quad H_\psi = a + \rho\cos\varphi.$$

Тогда проекции скорости на оси тороидальных координат будут

$$v_\rho = H_\rho \dot\rho = \dot\rho,$$
$$v_\varphi = H_\varphi \dot\varphi = \rho\dot\varphi,$$
$$v_\psi = H_\psi \dot\psi = (a + \rho\cos\varphi)\dot\psi.$$

Модуль скорости точки равен

$$v = \sqrt{\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + (a + \rho\cos\varphi)^2\dot\psi^2}.$$

Переходим к определению проекций ускорения на оси тороидальных координат. Находим

$$T = \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2}[\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + (a + \rho\cos\varphi)^2\dot\psi^2].$$

Тогда

$$a_\rho = \frac{1}{H_\rho}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\rho} - \frac{\partial T}{\partial\rho}\right) = \ddot\rho - \rho\dot\varphi^2 - (a + \rho\cos\varphi)\dot\psi^2\cos\varphi.$$

Аналогично

$$a_\varphi = \rho\ddot\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi + (a + \rho\cos\varphi)\dot\psi^2\sin\varphi,$$

$$a_\psi = \frac{1}{(a + \rho\cos\varphi)}\frac{d}{dt}[(a + \rho\cos\varphi)^2\dot\psi] =$$
$$= \ddot\psi(a + \rho\cos\varphi) + 2\dot\psi\,(\dot\rho\cos\varphi - \rho\dot\varphi\sin\varphi).$$

Задача 3.72. Определить проекции скорости на оси цилиндрических координат (см. рисунок).

Решение. Зависимость декартовых координат от цилиндрических выражается формулами

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad z = z. \tag{1}$$

Находим коэффициенты Ламе:

$$H_\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2} = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1,$$

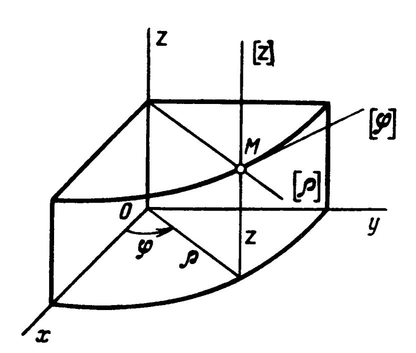
$$H_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2} = \sqrt{\rho^2\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi} = \rho, \tag{2}$$

$$H_z = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1.$$

Тогда проекции скорости на оси цилиндрических координат равны

$$v_\rho = H_\rho\dot\rho = \dot\rho, \qquad v_\varphi = H_\varphi\dot\varphi = \rho\dot\varphi, \qquad v_z = H_z\dot z = \dot z. \tag{3}$$

Задача 3.73. Найти проекции ускорения точки на оси цилиндрической системы координат (см. рисунок к задаче 3.72).



К задаче 3.72

Решение. Криволинейные координаты ρ, φ, z определяют положение точки M в цилиндрической системе координат. Зависимость декартовых координат от цилиндрических определяется равенствами

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad z = z.$$

Коэффициенты Ламе, согласно (4*), равны

$$H_\rho = 1, \qquad H_\varphi = \rho, \qquad H_z = 1.$$

Ищем проекции ускорения на оси цилиндрической системы координат. Находим

$$T = \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2).$$

Тогда

$$a_\rho = \frac{1}{H_\rho}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\rho} - \frac{\partial T}{\partial\rho}\right) = \ddot\rho - \rho\dot\varphi^2,$$

$$a_\varphi = \frac{1}{H_\varphi}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} - \frac{\partial T}{\partial\varphi}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot\varphi),$$

$$a_z = \frac{1}{H_z}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot z} - \frac{\partial T}{\partial z}\right) = \ddot z.$$

Первые два уравнения являются одновременно проекциями ускорения точки на полярные оси координат, применяемые в случае движения точки на плоскости.

Задача 3.74. Точка M движется по винтовой линии согласно уравнениям

$$x = a\cos kt, \tag{1}$$

$$y = a\sin kt, \tag{2}$$

$$z = bt, \tag{3}$$

где a, k, b — постоянные.

Определить уравнения траектории точки в цилиндрических координатах и ее скорость.

Решение. Цилиндрическими координатами являются

$$q_1 = \rho, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z.$$

Находим первую цилиндрическую координату

$$\rho = q_1 = \sqrt{x^2 + y^2} = a = \text{const}. \tag{4}$$

Вторая цилиндрическая координата

$$\varphi = kt. \tag{5}$$

Третья цилиндрическая координата дается непосредственно равенством (3). Исключая время из уравнений (3) и (5), получаем

$$z = b\frac{\varphi}{k}, \tag{6}$$

которое вместе с равенством (4) и дает уравнение траектории точки — уравнение винтовой линии в цилиндрических координатах. Винтовая линия

навивается на поверхность цилиндра радиусом a. Согласно задаче 3.72 проекции скорости на цилиндрические оси координат равны

$$v_\rho = H_\rho \dot{\rho} = 0,$$

так как в данном случае $\rho = \text{const}$. Далее

$$v_\varphi = H_\varphi \dot{\varphi} = \rho k.$$

Наконец,

$$v_z = H_z \dot{z} = b.$$

Задача 3.75. Определить проекции скорости движущейся точки на оси эллиптической системы координат.

Решение. В задаче 3.66 были найдены коэффициенты Ламе для эллиптических координат η_1 и η_2, связанных с декартовыми координатами уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2+\eta_1} + \frac{y^2}{b^2+\eta_1} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2+\eta_2} + \frac{y^2}{b^2+\eta_2} = 1, \tag{1}$$

где a, b — постоянные величины.

Коэффициенты Ламе равны

$$H_{\eta_1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta_1-\eta_2}{(a^2+\eta_1)(b^2+\eta_1)}}, \quad H_{\eta_2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta_2-\eta_1}{(a^2+\eta_2)(b^2+\eta_2)}}. \tag{2}$$

Тогда проекции скорости на оси эллиптической системы координат будут

$$\begin{aligned} v_{\eta_1} &= H_{\eta_1}\dot{\eta}_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta_1-\eta_2}{(a^2+\eta_1)(b^2+\eta_1)}}\,\dot{\eta}_1, \\ v_{\eta_2} &= H_{\eta_2}\dot{\eta}_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta_2-\eta_1}{(a^2+\eta_2)(b^2+\eta_2)}}\,\dot{\eta}_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Модуль скорости равен

$$v = \sqrt{v_{\eta_1}^2 + v_{\eta_2}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(\eta_1-\eta_2)\left[\frac{\dot{\eta}_1^2}{(a^2+\eta_1)(b^2+\eta_1)} - \frac{\dot{\eta}_2^2}{(a^2+\eta_2)(b^2+\eta_2)}\right]}.$$

Следует иметь в виду, что η_1 и η_2 должны лежать в пределах, указанных в задаче 3.66.

Глава 4

ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 1. ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Простейшими движениями твердого тела являются *поступательное движение и вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.*

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается во все время движения параллельной своему первоначальному направлению. Траектории точек при этом движении представляют собой одинаковые кривые, которые могут быть получены одна из другой путем параллельного смещения. При поступательном движении скорости и ускорения всех точек твердого тела в данный момент геометрически равны. Следовательно, при исследовании поступательного движения твердого тела достаточно определить движение одной какой-либо точки тела. Таким образом, задача о поступательном движении твердого тела сводится к задаче кинематики точки.

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси точки, лежащие на оси вращения, неподвижны, остальные точки описывают окружности с центрами, находящимися на оси вращения и с радиусами, равными длине перпендикуляра, опущенного из точки на ось вращения. Эти окружности расположены в плоскостях, перпендикулярных к оси вращения.

В данной главе мы рассмотрим вращение твердого тела вокруг неподвижной оси и преобразование простейших движений твердых тел. Преобразование простейших движений твердых тел — это: 1) преобразование вращения вокруг неподвижной оси в поступательное движение и 2) преобразование вращения твердого тела вокруг одной оси во вращение другого твердого тела вокруг другой неподвижной оси.

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси криволинейная координата любой точки, движущейся по окружности, являющейся ее траекторией, определяется формулой

$$\sigma = \sigma_0 + h\varphi, \qquad (1^*)$$

где σ — дуговая координата движущейся точки, σ_0 — начальное значение дуговой координаты, h — кратчайшее расстояние от точки до оси вращения, φ — угол поворота твердого тела вокруг оси в радианах. Угол поворо-

та связан со временем зависимостью

$$\varphi = \varphi(t), \tag{2*}$$

называемой *уравнением вращения твердого тела вокруг неподвижной оси*. Угол φ называется *угловым перемещением твердого тела*, вращающегося вокруг неподвижной оси, за данный промежуток времени. Измеряется угол φ следующим образом: проводим неподвижную плоскость N через ось вращения Oz и неподвижную прямую Ox, подвижную плоскость M, жестко связанную с вращающимся телом, проводим через ось вращения Oz и какую-либо точку твердого тела. Тогда двугранный угол между этими плоскостями определяет полностью положение твердого тела (рис. 4.1). Линейный угол поворота φ измеряется в радианах или в оборотах. Один оборот соответствует 2π радианам.

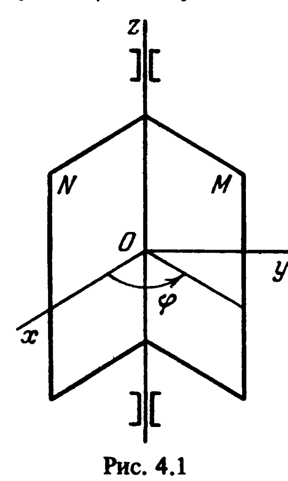


Рис. 4.1

Угловая скорость твердого тела характеризует быстроту изменения угла поворота твердого тела. Угловая скорость твердого тела иначе называется *частотой вращения*. Угловая скорость — вектор, направленный по оси вращения в ту сторону, с которой вращение видно происходящим против часовой стрелки (для правой системы осей). Так, на рис. 4.1 вектор угловой скорости должен быть направлен в положительном направлении оси z, если угол φ увеличивается, и в отрицательном направлении оси z, если угол φ уменьшается. Проекция угловой скорости на ось вращения z равна производной от угла поворота по времени

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \tag{3*}$$

При отсчете угла поворота в радианах и измерении времени в секундах угловая скорость измеряется в рад/с. В технике угловую скорость часто определяют числом оборотов в минуту (n об/мин). Связь между этими единицами измерения дается формулой

$$\omega = n\,\frac{2\pi}{60}\ \text{рад/с} = \frac{n\pi}{30}\ \text{рад/с}. \tag{4*}$$

Для характеристики быстроты изменения угловой скорости во времени служит угловое ускорение. *Угловое ускорение* — вектор, совпадающий по направлению с вектором угловой скорости, если вращение ускоренное, и направленный прямо противоположно угловой скорости, если вращение замедленное. Проекция углового ускорения на ось вращения рав-

на производной от проекции угловой скорости по времени или второй производной от угла поворота по времени:

$$\epsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \qquad (5^*)$$

При отсчете угла поворота в радианах и измерении времени в секундах угловое ускорение измеряется в рад/с^2.

Если угловая скорость ω_z постоянна, то вращение называется *равномерным* и происходит по закону

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_z t. \qquad (6^*)$$

Если угловое ускорение ϵ_z – величина постоянная, не равная нулю, то вращение называется *равнопеременным* (*равноускоренным* или *равнозамедленным*) и происходит согласно уравнениям

$$\omega_z = \omega_{0z} + \epsilon_z t, \qquad (7^*)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_{0z} t + \epsilon_z t^2/2. \qquad (8^*)$$

Если знаки ω_z и ϵ_z совпадают, то вращение равноускоренное, в противном случае – равнозамедленное.

Проекция скорости точки твердого тела на касательную к окружности, направленную в сторону возрастания дуговой координаты σ, дается выражением

$$v_\tau = \frac{d\sigma}{dt} = \omega_z h. \qquad (9^*)$$

Скорость точки вращающегося твердого тела равна

$$\mathbf{v} = \vec{\omega} \times \boldsymbol{r}, \qquad (10^*)$$

где $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор, проведенный из любой точки, лежащей на оси вращения, к рассматриваемой точке твердого тела.

Ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, определяется формулой

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \vec{\epsilon} \times \boldsymbol{r} + \vec{\omega} \times \mathbf{v},$$

$$\boldsymbol{a}_\tau = \vec{\epsilon} \times \boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{a}_n = \vec{\omega} \times \mathbf{v}.$$

Ускорение точки вращающегося твердого тела складывается из нормального ускорения и касательного ускорения. Нормальное ускорение направлено от точки по перпендикуляру к оси вращения, в сторону этой оси, а его модуль равен

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \omega^2 h. \qquad (11^*)$$

Радиус кривизны ρ траектории точки твердого тела при его вращении вокруг неподвижной оси равен длине перпендикуляра, опущенного из точки на ось вращения

$$\rho = h.$$

Касательное ускорение направлено по касательной к траектории, а его проекция на касательную равна

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \epsilon_z h. \tag{12*}$$

Модуль полного ускорения точки

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = h\sqrt{\omega^4 + \epsilon^2}. \tag{13*}$$

Здесь знак проекции у ω_z и ϵ_z можно опустить, так как $\omega_z = \pm\omega$, $\epsilon_z = \pm\epsilon$ и, следовательно, $\omega_z^4 = \omega^4$, $\epsilon_z^2 = \epsilon^2$.

Полное ускорение составляет угол α с перпендикуляром, опущенным из точки на ось вращения, причем угол α отсчитывается от ускорения точки к перпендикуляру $(-90° \leqslant \alpha \leqslant 90°)$. При этом

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\epsilon_z}{\omega^2}. \tag{14*}$$

Часто показывают направление вращения и направление углового ускорения дуговыми стрелками ω и ϵ (рис. 4.2). Направление дуговой стрелки ω показывает направление вращения и определяет направление скоростей всех точек твердого тела (рис. 4.2).

Если дуговые стрелки ω и ϵ одного направления, то вращение ускоренное, угловая скорость твердого тела возрастает. Если дуговые стрелки ω и ϵ противоположно направлены, то вращение замедленное, угловая скорость твердого тела уменьшается. Направление ϵ определяет направление касательного ускорения точек твердого тела (рис. 4.2).

В этом параграфе решаются задачи на определение проекций угловой скорости и углового ускорения твердого тела на ось вращения по заданному уравнению движения. Эта задача сводится к дифференцированию угла поворота по времени. Обратная задача – определение закона вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, если известно его угловое ускорение или угловая скорость. Эта задача решается интегрированием и последующим определением произвольных постоянных интегрирования по начальным условиям движения.

Зная угловую скорость и угловое ускорение твердого тела, можно определять скорости и ускорения отдельных точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Указание. При решении задач на вращение твердого тела вокруг неподвижной оси рекомендуется придерживаться такой последовательности действий.

Первый тип задач — дано уравнение вращения твердого тела, требуется определить угловую скорость, угловое ускорение, скорость и ускорение точки твердого тела:

1) выбираем систему координат так, чтобы одна из осей (для определенности ось z) совпадала с осью вращения;

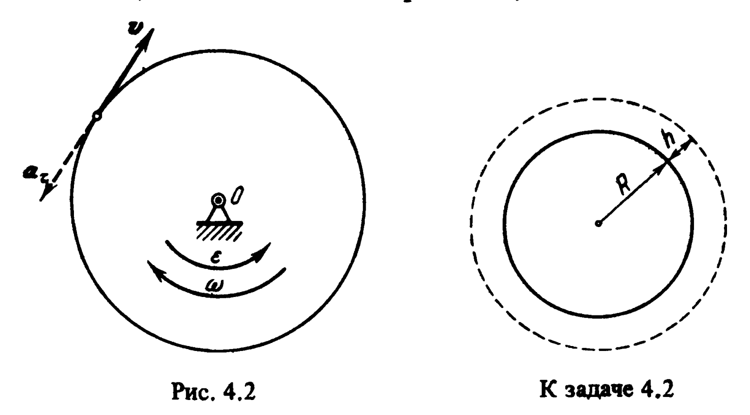


Рис. 4.2

К задаче 4.2

2) составляем уравнение вращения твердого тела (зависимость угла поворота от времени);

3) дифференцируя по времени угол поворота, определяем проекцию угловой скорости на ось вращения;

4) вычисляя вторую производную от угла поворота по времени, находим проекцию углового ускорения на ось вращения;

5) пользуясь выражением проекции угловой скорости на ось вращения, вычисляем линейную скорость точки и ее нормальное ускорение;

6) пользуясь выражением проекции углового ускорения на ось вращения, определяем касательное ускорение точки;

7) по найденным нормальному и касательному ускорениям находим полное ускорение точек по модулю и направлению.

Второй тип задач — задано угловое ускорение или угловая скорость твердого тела; требуется найти уравнение вращения, скорость и ускорение точки твердого тела:

1) интегрируя дифференциальное уравнение, определяющее проекцию углового ускорения на ось вращения, находим проекцию угловой скорости; произвольную постоянную интегрирования определяем по начальным данным;

2) интегрируя дифференциальное уравнение, определяющее проекцию угловой скорости на ось вращения, находим уравнение вращения твердо-

го тела; произвольная постоянная интегрирования определяется по начальным данным;

3) пользуясь выражением проекции угловой скорости на ось вращения, вычисляем модули скорости и нормального ускорения точки;

4) определяем величину касательного ускорения точки, зная проекцию углового ускорения на ось вращения, и далее находим полное ускорение точки.

Задача 4.1. Искусственный спутник Земли, запущенный в СССР 4 октября 1957 г., имел вначале период обращения 1 ч 36 мин.

Определить его среднюю частоту обращения. Во сколько раз частота обращения спутника больше угловой скорости Земли (при вращении ее вокруг собственной оси)?

Решение. Период обращения спутника – это промежуток времени, за который он совершает один полный оборот по орбите. Это время равно 1 ч 36 мин, или 96 мин.

Следовательно, частота вращения спутника вокруг Земли

$$n = \frac{1}{96} \text{ об/мин.}$$

Частота обращения в рад/с равна

$$\omega = \frac{1 \cdot 2\pi}{96 \cdot 60} \text{ рад/с} = \frac{\pi}{2880} \text{ рад/с} = 0{,}00109 \text{ рад/с.}$$

Угловая скорость Земли при вращении вокруг собственной оси соответствует 1 обороту за 24 ч или

$$n_1 = \frac{1}{24} \text{ об/ч} = \frac{1}{24 \cdot 60} \text{ об/мин} = \frac{1}{1440} \text{ об/мин.}$$

Находим, далее, отношение частоты обращения спутника к угловой скорости Земли:

$$\frac{n}{n_1} = \frac{24 \cdot 60}{96} = 15.$$

Спутник сделает 15 оборотов за сутки, в течение которых Земля сделает один оборот вокруг своей оси.

Задача 4.2. Сохраняя условия предыдущей задачи, определить скорость и ускорение искусственного спутника, считая его орбиту круговой, высоту полета над поверхностью Земли $h = 970$ км. Радиус Земли $R =$ $= 6370$ км.

Решение. Модуль скорости спутника определится по формуле

$$v = (h + R)\,\omega,$$

где $h + R$ – радиус описываемой спутником окружности (см. рис.).

Итак,

$$v = (970 + 6370)\frac{\pi}{2880}\ \text{км/с} = 8\ \text{км/с}.$$

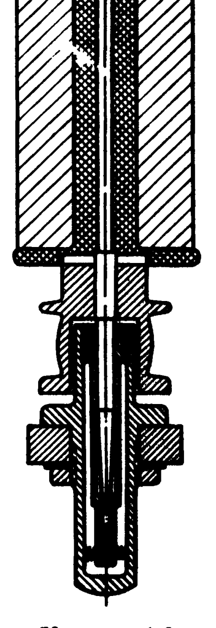
Так как касательное ускорение спутника равно нулю (ω = const), то ускорение равно нормальному ускорению

$$a = a_n = (h + R)\omega^2 = (970 + 6370)\frac{\pi^2}{2880^2} = 0{,}00874\frac{\text{км}}{\text{с}^2} = 8{,}74\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Ускорение направлено к центру Земли.

Задача 4.3. При пуске в ход машины для кручения капроновой нити шпиндель веретена приобретает рабочую скорость, соответствующую 15 000 об/мин за 30 с.

Считая угловое ускорение шпинделя во время пуска постоянным, определить число оборотов шпинделя за время пуска. Найти скорость и ускорение точки на поверхности блочка шпинделя при дальнейшем равномерном вращении, если его диаметр равен 40 мм (см. рисунок).


К задаче 4.3

Р е ш е н и е. Угловая скорость шпинделя во время пуска растет пропорционально времени

$$\omega = \epsilon t$$

и достигает значения 15 000 об/мин через 30 с. Определяем угловое ускорение шпинделя

$$\epsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{15\,000 \cdot 2\pi}{60 \cdot 30} = \frac{50}{3}\pi = 52{,}4\ \text{рад/с}^2.$$

Значение угловой скорости мы перевели из об/мин в рад/с.

Угол поворота шпинделя за время пуска определится по формуле (8*) при $\omega_0 = 0$ и $\varphi_0 = 0$:

$$\varphi = \frac{\epsilon t^2}{2} = \frac{50\pi \cdot 30^2}{2 \cdot 3} = 7500\pi\ \text{рад}.$$

Число оборотов за время пуска будет

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{7500\pi}{2\pi} = 3750\ \text{об}.$$

Модуль скорости точки на ободе блочка шпинделя (после достижения рабочей скорости) равен

$$v = \omega r = 15\,000\frac{\pi}{30} \cdot 20 = 10\,000\pi\ \text{мм/с} = 10\pi\ \text{м/с} = 31{,}4\ \text{м/с}.$$

Ускорение этой точки при дальнейшем равномерном вращении будет состоять только из нормального ускорения, значение которого найдется по формуле

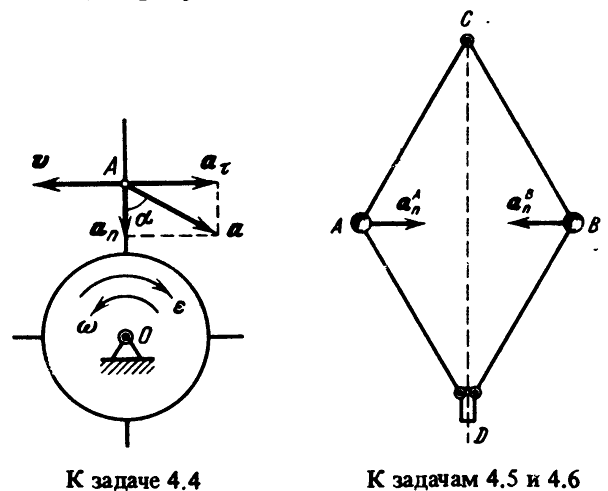
$$a = a_n = \omega^2 r = \left(\frac{15\,000 \cdot 2\pi}{60}\right)^2 \frac{20}{1000}\ \text{м/с}^2 = 5000\pi^2\ \text{м/с}^2.$$

Это ускорение направлено по перпендикуляру, опущенному из точки на ось вращения.

Задача 4.4. Вал с присоединенными к нему пластинами вращается в подшипниках согласно уравнению

$$\varphi = k \ln\left(1 + \frac{\omega_0 t}{k}\right),$$

где φ – угол поворота в радианах, t – время в секундах, k и ω_0 – постоянные коэффициенты (см. рисунок).



К задаче 4.4 К задачам 4.5 и 4.6

Определить угловую скорость и угловое ускорение вала. Найти скорость и ускорение центра пластины A, отстоящего на расстояние R м от оси вращения.

Решение. Проекция угловой скорости вала на ось вращения равна первой производной от угла поворота по времени

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega_0}{1 + \frac{\omega_0}{k} t}\ \text{рад/с}. \tag{1}$$

Из этого равенства видно, что в начальный момент при $t = 0$ угловая ско-

рость вала равнялась ω_0. Определяем проекцию углового ускорения вала на ось вращения как производную от угловой скорости по времени

$$\epsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = -\frac{\omega_0^2}{\left(1+\frac{\omega_0}{k}t\right)^2}\frac{1}{k}\ \text{рад/с}^2 \qquad (2)$$

или, сопоставляя (2) и (1), $\epsilon_z = -\omega_z^2/k$. Проекция углового ускорения отрицательна, проекция угловой скорости вала с течением времени неограниченно уменьшается.

Переходим к определению скорости и ускорения центра A пластины. Модуль скорости этой точки равен

$$v = R\omega = \frac{R\omega_0}{1+\frac{\omega_0}{k}t}\ \text{м/с}.$$

Ускорение этой точки складывается из нормального и касательного ускорений. Модуль нормального ускорения равен

$$a_n = R\omega^2 = \frac{R\omega_0^2}{\left(1+\frac{\omega_0}{k}t\right)^2}\ \text{м/с}^2.$$

Проекция ускорения на касательную определяется формулой

$$a_\tau = R\epsilon_z = -R\frac{\omega^2}{k} = -\frac{R}{k}\frac{\omega_0^2}{\left(1+\frac{\omega_0}{k}t\right)^2}\ \text{м/с}^2.$$

Модуль полного ускорения

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \frac{R\omega^2}{k}\sqrt{1+k^2} = \frac{R}{k}\frac{\omega_0^2}{\left(1+\frac{\omega_0}{k}t\right)^2}\sqrt{1+k^2}.$$

Угол α, составляемый ускорением точки с радиусом, соединяющим ее с осью вращения, находится из уравнения

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\epsilon_z}{\omega^2} = -\frac{1}{k}.$$

Направления скорости и ускорения центра пластины изображены на рисунке. Отрицательное значение $\operatorname{tg}\alpha$ указывает на то, что угол α откладывается в сторону, противоположную направлению вращения твердого тела.

Задача 4.5. Регулятор Уатта вращается с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг вертикальной оси. Угол ACB при этом оказался равным 60°, а ускорение шаров A и B равно $100g$, где $g = 980$ см/с^2. Стержни AC, BC, AD и BD одинаковой длины $l = 10$ см (см. рисунок).

Сколько оборотов в минуту делает регулятор?

Решение. Для того чтобы найти угловую скорость регулятора, напишем зависимость ускорения шаров от параметров регулятора. Так как регулятор вращается с постоянной угловой скоростью, то ускорение шара будет нормальным ускорением, модуль которого определяется формулой

$$a_n = r\omega^2 = l\sin 30°\omega^2,$$

где r — кратчайшее расстояние шара до оси вращения.

С другой стороны, согласно условию

$$a_n = 100g.$$

Приравнивая эти два выражения нормального ускорения шара, находим:

$$\omega = \sqrt{\frac{100g}{l\sin 30°}} = \sqrt{\frac{100\cdot 980}{10\cdot 0{,}5}} = 140 \text{ рад/с}.$$

Угловая скорость регулятора будет равна

$$n = \omega\cdot\frac{30}{\pi}\text{ об/мин} = \frac{140\cdot 30}{3{,}14} = 1340 \text{ об/мин}.$$

Задача 4.6. При пуске машины в ход центробежный регулятор (см. рис.) начинает вращаться вокруг вертикальной оси равноускоренно по закону

$$\varphi = \epsilon t^2/2. \qquad (1)$$

Определить угловую скорость регулятора и угол поворота через 10 с после начала движения, если известно, что за время $t = 5$ с регулятор повернулся на угол 10π рад.

Решение. Для нахождения углового ускорения регулятора подставим в уравнение (1) значение угла поворота 10π рад и соответствующее время 5 с. Тогда находим

$$10\pi = \frac{\epsilon\cdot 25}{2},$$

откуда

$$\epsilon = \frac{20\pi}{25} = \frac{4}{5}\pi \text{ рад/с}^2.$$

Зная угловое ускорение регулятора, находим угол поворота через 10 с после начала движения, пользуясь уравнением (1):

$$\varphi = \frac{\epsilon t^2}{2} = 40\pi \text{ рад.}$$

Для нахождения угловой скорости вычислим первую производную от угла поворота регулятора по времени:

$$\omega = \dot{\varphi} = \epsilon t \text{ рад/с.}$$

Через 10 с после начала движения угловая скорость регулятора будет

$$\omega = \frac{4}{5} \cdot 10 = 8\pi \text{ рад/с.}$$

Указание. Для приобретения навыков в решении задач на вращение твердого тела вокруг неподвижной оси рекомендуется решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 13.1–13.3, 13.7, 13.9, 13.11, 13.13, 13.14, 13.18–13.20.

§ 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ДВИЖЕНИЙ

Под преобразованием простейших движений следует понимать: а) преобразование вращательного движения в поступательное (и обратное преобразование), б) преобразование вращения вокруг одной неподвижной оси во вращение вокруг другой неподвижной оси и в) преобразование одного поступательного движения в другое поступательное движение. При

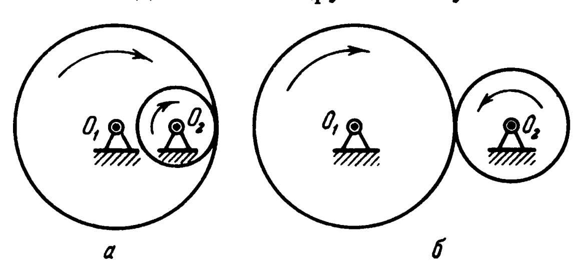


Рис. 4.3

решении задач о движении механизмов, преобразующих простейшие движения, следует пользоваться совместно формулами кинематики точки и формулами кинематики твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Преобразование вращения одного твердого тела вокруг неподвижной оси во вращение второго твердого тела вокруг другой неподвижной оси осуществляется посредством зубчатого или фрикционного зацепления двух колес (рис. 4.3, *а*, *б*) или при помощи ременной передачи (рис. 4.4, 4.5).

При внутреннем зацеплении (рис. 4.3, *а*) и нескрещивающейся ременной передаче (рис. 4.4) направления вращений обоих колес совпадают. При внешнем зацеплении (рис. 4.3, *б*) и скрещивающейся ременной передаче (рис. 4.5) направление вращения колес противоположно. Модули скоростей на ободе зубчатых колес, находящихся в зацеплении, равны.

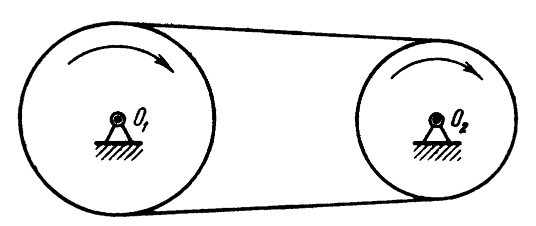


Рис. 4.4

Также равны по модулю скорости на ободе шкивов ременной передачи, если нет скольжения ремня по шкиву. Угловые скорости колес обратно пропорциональны числам зубцов или радиусам, или диаметрам

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_2}{d_1}. \tag{1*}$$

В этой формуле ω_1, ω_2 — модули угловых скоростей, r_1, r_2 — радиусы начальных окружностей, d_1, d_2 — диаметры начальных окружностей, z_1, z_2 — числа зубцов первого и соответственно второго колеса.

Зубчатые колеса и ременные передачи, изображенные на рис. 4.3–4.5, представляют примеры последовательного соединения колес и шкивов.

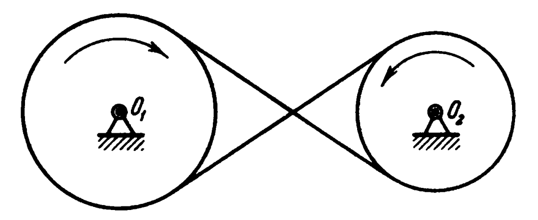


Рис. 4.5

При последовательном соединении кажое из колес вращается вокруг своей неподвижной оси.

Часто применяется параллельное соединение колес, когда два колеса вращаются вокруг одной неподвижной оси. Если при этом они жестко соединены друг с другом, то их угловые скорости равны.

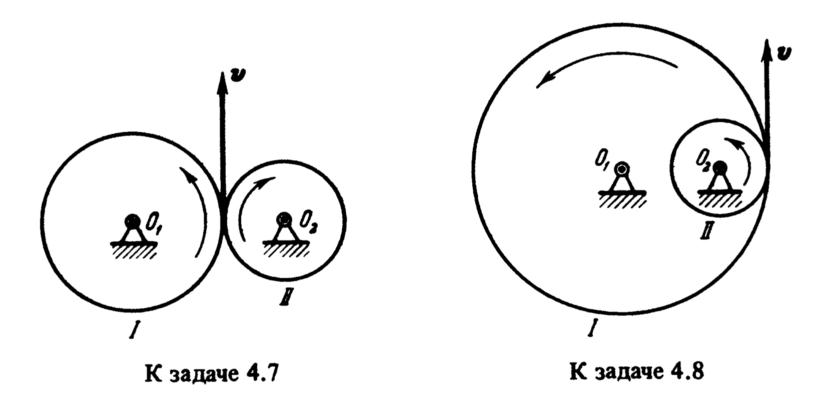
Указание. При решении задач на преобразование простейших движений рекомендуется такая последовательность действий:

1) исходя из условия задачи, выписать уравнение движения или другие кинематические соотношения для того твердого тела, движение которого известно;

2) пользуясь формулами кинематики точки и кинематики вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, найти уравнение движения другого твердого тела, которому передается движение, а также найти скорости и ускорения различных точек этого твердого тела.

Задача 4.7. Зубчатое колесо *I* находится во внешнем зацеплении с зубчатым колесом *II*. Первое колесо имеет диаметр D_1 = 400 мм и вращается с угловой скоростью $\omega_1 = \pi$ рад/с вокруг неподвижной оси O_1.

Определить угловую скорость второго колеса, если его диаметр равен D_2 = 320 мм и оно вращается вокруг неподвижной оси O_2 (см. рисунок).



К задаче 4.7 К задаче 4.8

Решение. В месте соприкосновения зубцов обоих колес скорости точек первого и второго колес одинаковы. Обозначая эту скорость v, имеем

$$v = \omega_1 \frac{D_1}{2} = \omega_2 \frac{D_2}{2}$$

и, следовательно,

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{D_2}{D_1}. \qquad (1)$$

Пользуясь формулой (1), находим

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 D_1}{D_2} = \frac{\pi \cdot 400}{320} = \frac{5}{4}\pi \text{ рад/с}.$$

Так как колеса находятся во внешнем зацеплении, то их угловые скорости направлены в противоположные стороны. Если колесо *I* вра-

щается против хода часовой стрелки, то колесо *II* вращается по ходу часовой стрелки.

Задача 4.8. Зубчатое колесо *I* находится во внутреннем зацеплении с зубчатым колесом *II*. Радиус первого колеса $r_1 = 150$ мм и оно делает $n_1 = 1500$ об/мин, вращаясь вокруг неподвижной оси O_1.

Определить радиус второго колеса, если оно должно вращаться вокруг неподвижной оси O_2, делая $n_2 = 4500$ об/мин (см. рисунок).

Решение. В месте соприкосновения зубчатых колес скорости точек первого и второго колес должны быть равны. Модуль скорости точки обода колеса *I* равен

$$v = r_1 \omega_1 = r_1 \frac{\pi n_1}{30} \text{ мм/с.} \tag{1}$$

Модуль скорости точки обода колеса *II* равен

$$v = r_2 \omega_2 = r_2 \frac{\pi n_2}{30} \text{ мм/с.} \tag{2}$$

Сопоставляя равенства (1) и (2), находим

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Так как модули угловых скоростей пропорциональны числам оборотов в минуту, имеем

$$r_2 = r_1 \frac{n_1}{n_2} = 150 \frac{1500}{4500} = 50 \text{ мм.}$$

В рассматриваемом случае внутреннего зацепления оба зубчатых колеса вращаются в одну сторону против хода часовой стрелки.

Задача 4.9. Зубчатое колесо *I*, радиус которого равен r_1, находится во внешнем зацеплении с зубчатым колесом *II* радиусом r_2. Первое колесо вращается в данный момент с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$ и угловым ускорением $\vec{\varepsilon}_1$ (см. рисунок).

Определить угловую скорость и угловое ускорение второго колеса, а также нормальное ускорение находящихся в соприкосновении точек колес.

Решение. При вращении зубчатых колес, находящихся в зацеплении, скорости точек соприкосновения обоих колес должны быть равны в любой момент времени. Для этого необходимо, чтобы были равны не только скорости этих точек, но и их касательные ускорения, ибо если в данный момент скорости этих точек равны, а касательные ускорения не равны, то в следующий момент времени нарушится и равенство скорос-

тей точек соприкосновения. Из равенства модулей скоростей вытекает соотношение

$$v = r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2,$$

откуда

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2} \text{ рад/с.} \qquad (1)$$

Угловая скорость второго колеса $\vec{\omega}_2$ при внешнем зацеплении направлена в сторону, противоположную угловой скорости $\vec{\omega}_1$ первого колеса. Модули касательных ускорений точек соприкосновения обоих колес будут

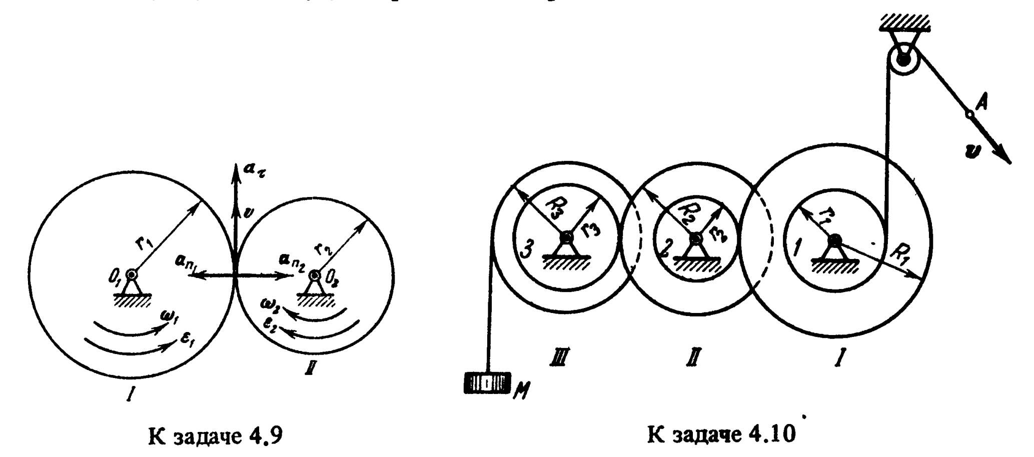
$$|a_{\tau 1}| = r_1 \epsilon_1, \quad |a_{\tau 2}| = r_2 \epsilon_2.$$

Приравнивая эти значения, получаем

$$\epsilon_2 = \epsilon_1 \frac{r_1}{r_2} \text{ рад/с}^2,$$

что легко найти также непосредственно путем дифференцирования соотношения (1).

Угловое ускорение второго колеса $\vec{\epsilon}_2$ направлено в сторону, противоположную угловому ускорению $\vec{\epsilon}_1$ первого колеса.



К задаче 4.9 К задаче 4.10

Модули нормальных ускорений точек соприкосновения обоих колес определяются формулами

$$a_{n1} = r_1 \omega_1^2, \quad a_{n2} = r_2 \omega_2^2 = \frac{r_1^2}{r_2} \omega_1^2.$$

Нормальные ускорения этих точек не равны друг другу по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

Задача 4.10. Для спуска груза *M*, привязанного к концу троса, намотанного на барабан *III*, вытягивают со скоростью v канат *A*, намотанный на барабан *1*. На одной оси с барабаном *1* радиусом r_1 насажено зубчатое колесо *I* радиусом R_1, жестко скрепленное с ним. Зубчатое колесо *I* сцеплено с зубчатым колесом *2* радиусом r_2, которое вращается как одно целое вместе с зубчатым колесом *II* радиусом R_2. Последнее сцеплено с зубчатым колесом *3* радиусом r_3, вращающимся как одно целое с барабаном *III* радиусом R_3 (см. рис.).

Определить скорость, с которой спускается груз *M*, если оси всех зубчатых колес неподвижны.

Решение. Модуль скорости точки на ободе барабана *1* радиусом r_1 равен модулю скорости точек каната v. Определим скорость точки на ободе зубчатого колеса *I* радиусом R_1. Модуль угловой скорости барабана *1* и зубчатого колеса *I* равен

$$\omega_1 = \frac{v}{r_1} \text{ рад/с.}$$

Модуль скорости точки на ободе зубчатого колеса *I*

$$v_1 = \omega_1 R_1 = \frac{v}{r_1} R_1 .$$

Зубчатое колесо *1* находится в сцеплении с зубчатым колесом *2* радиусом r_2, следовательно, скорости точек на ободе этих колес равны. Определяем модуль угловой скорости зубчатых колес *2* и *II*

$$\omega_2 = \frac{v_1}{r_2} = \frac{vR_1}{r_1 r_2} \text{ рад/с}$$

и, далее, находим модуль скорости точки на ободе зубчатого колеса *II* радиусом R_2:

$$v_2 = \omega_2 R_2 = \frac{v_1}{r_2} R_2 = \frac{vR_1R_2}{r_1 r_2} .$$

Это и есть одновременно модуль скорости точки на ободе зубчатого колеса *3* радиусом r_3, сцепленного с зубчатым колесом *II*.

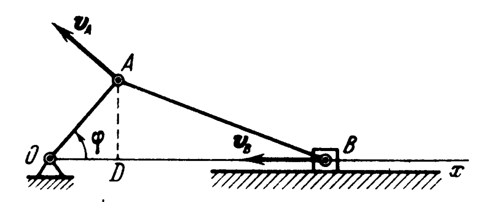
Следовательно, модуль угловой скорости зубчатого колеса *3* и барабана *III* равен

$$\omega_3 = \frac{v_2}{r_3} = \frac{vR_1R_2}{r_1 r_2 r_3} \text{ рад/с.}$$

Модуль скорости точки на ободе барабана *III* радиусом R_3, равный искомой скорости груза M, дается формулой

$$v_3 = \omega_3 R_3 = \frac{vR_1R_2R_3}{r_1r_2r_3}.$$

Задача 4.11. Для преобразования периодического возвратно-поступательного прямолинейного движения во вращательное движение в двигателях внутреннего сгорания применяют плоский кривошипно-ползунный



К задачам 4.11 и 4.12

механизм, состоящий из кривошипа $OA = r$, вращающегося вокруг неподвижной точки O в плоскости рисунка, шатуна $AB = l$, шарнирно соединенного с кривошипом, и поршня B, двигающегося по горизонтальным направляющим цилиндра, совпадающим с прямой OB, и шарнирно соединенного с шатуном AB.

Полагая угловую скорость кривошипа OA постоянной и равной ω_0 рад/с, определить уравнение движения и скорость поршня B. Найти скорость поршня при $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/2$, $\varphi_3 = \pi$.

Решение. Угол поворота кривошипа, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω_0, равен

$$\varphi = \omega_0 t \text{ рад.}$$

Опуская перпендикуляр из точки A на линию OB, находим уравнение движения поршня B:

$$x = OD + DB = OA\cos\varphi + \sqrt{l^2 - AD^2} = r\cos\omega_0 t + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega_0 t}.$$

Для определения проекции скорости поршня B на ось x необходимо вычислить производную от координаты поршня x по времени:

$$v_{Bx} = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -r\omega_0\sin\omega_0 t - \frac{r^2\omega_0\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega_0 t}} =$$

$$= -r\omega_0\left[1 + \frac{r\cos\omega_0 t}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega_0 t}}\right]\sin\omega_0 t. \quad (1)$$

Значение проекции скорости поршня при различных значениях угла поворота кривошипа получаем, подставляя в (1) соответствующие величины:

при $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_3 = \pi$ $\quad v_B = 0$,

при $\varphi_2 = \pi/2$ $\quad \dot{x} = v_{Bx} = -r\omega_0$,

т.е. при $\varphi_2 = \pi/2$ скорость точки B равна по величине скорости точки A; направления скоростей этих точек также совпадают.

Задача 4.12. В условиях предыдущей задачи определить ускорение поршня B как функцию времени, а также значения этого ускорения в моменты, когда $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi/2, \varphi_3 = \pi$.

Решение. Поршень B движется прямолинейно, следовательно, проекция его ускорения равна первой производной от проекции скорости по времени

$$a_{Bx} = \ddot{x} = -r\omega_0 \frac{d}{dt}\left[\sin\omega_0 t + \frac{r\sin 2\omega_0 t}{2\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega_0 t}}\right] =$$

$$= -r\omega_0^2\cos\omega_0 t - \frac{r^2\omega_0^2}{2}\left[\frac{2\cos 2\omega_0 t}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega_0 t}} + \right.$$

$$\left. + \frac{r^2\sin^2 2\omega_0 t}{2(l^2 - r^2\sin^2\omega_0 t)^{3/2}}\right].$$

Тогда значения ускорения поршня при различных значениях угла поворота кривошипа будут:

при $\varphi_1 = 0$ $\quad a_{Bx} = -r\omega_0^2(1 + r/l)$;

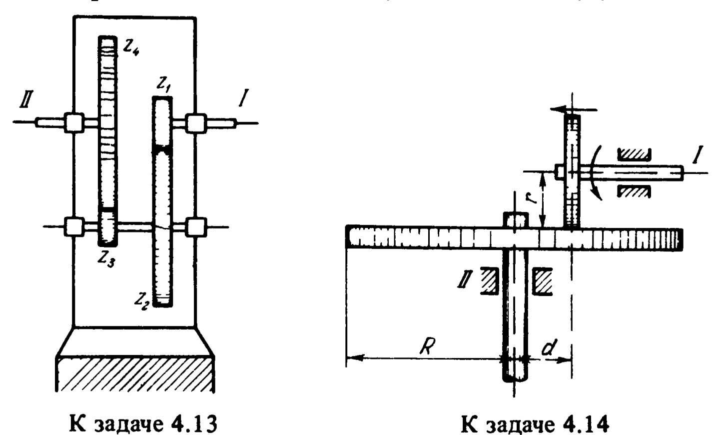
при $\varphi_2 = \pi/2$ $\quad a_{Bx} = \dfrac{r\omega_0^2}{\sqrt{l^2 - r^2}}$;

при $\varphi_3 = \pi$ $\quad a_{Bx} = r\omega_0^2(1 - r/l)$.

Отметим, сопоставляя результаты, полученные в этой и предыдущей задачах, что при угле $\varphi_2 = \pi/2$ скорости точек A и B равны по модулю и направлению. Ускорения этих точек различны, так как ускорение точки A равно $r\omega_0^2$ и направлено по AO, а ускорение точки B, движущейся прямолинейно, направлено по оси x.

Задача 4.13. Редуктор скорости, предназначенный для изменения угловой скорости при передаче вращения от вала *I* к валу *II*, состоит из четырех зубчатых колес, вращающихся вокруг неподвижных осей. Зубчатые колеса имеют следующее число зубьев: $z_1 = 12, z_2 = 72, z_3 = 10$. Вал *II* делает 100 об/мин, а вал *I* должен делать 5400 об/мин (см. рис.).

Найти число зубьев четвертого зубчатого колеса, если колеса с числом зубьев z_2 и z_3 закреплены на одном валу и имеют одну угловую скорость.



К задаче 4.13 К задаче 4.14

Решение. Модули угловых скоростей первой пары зубчатых колес, сцепленных друг с другом, относятся обратно пропорционально числам зубьев:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}. \tag{1}$$

Аналогичное равенство можно написать и для второй пары колес, находящихся в зацеплении:

$$\frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{z_4}{z_3}. \tag{2}$$

Колеса *2* и *3* жестко закреплены на общем валу, следовательно, их угловые скорости равны $\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_3$. Перемножая равенства (1) и (2), находим

$$\frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}. \tag{3}$$

Отношение модулей угловых скоростей равно отношению чисел оборотов в минуту. Подставляя известные данные в (3), получаем

$$\frac{5400}{100} = \frac{72 z_4}{12 \cdot 10};$$

отсюда следует, что четвертая шестерня имеет 90 зубьев.

Задача 4.14. Ведущий вал фрикционной передачи *I* вращается с постоянной угловой скоростью, делая 300 об/мин, и одновременно передвигается в направлении стрелки и обратно согласно уравнению

$$d = (4 + 3\cos 2\pi t) \text{ см},$$

где время дано в секундах. Радиусы колес: $r = 5$ см, $R = 20$ см. Колесо *I* катится без скольжения по колесу *II* (см. рис.).

Определить: 1) угловое ускорение вала *II* как функцию времени и 2) ускорение точки на ободе колеса *II* в моменты времени $t_1 = 0$; $t_2 = 0{,}25$ с; $t_3 = 0{,}5$ с.

Решение. Скорости точек соприкосновения обоих колес равны между собой, так как колесо *I* фрикционной передачи катится без скольжения по колесу *II*. Так как модуль угловой скорости ведущего вала равен

$$\omega_0 = 300\frac{\pi}{30} = 10\pi \text{ рад/с}, \tag{1}$$

то модуль скорости точки обода колеса *I*, соприкасающейся с колесом *II*,

$$v = r\omega_0 = 5 \cdot 10\pi = 50\pi \text{ см/с}. \tag{2}$$

Модуль скорости такой же точки, но принадлежащей колесу *II*, равен

$$v = \omega d, \tag{3}$$

где ω – модуль угловой скорости колеса *II*. Приравнивая значения (2) и (3), находим угловую скорость колеса *II*

$$\omega = \frac{50\pi}{d} = \frac{50\pi}{4 + 3\cos 2\pi t} \text{ рад/с}. \tag{4}$$

Проекция углового ускорения колеса *II* равна производной от проекции угловой скорости по времени (считаем, что ось z направлена в сторону $\vec{\omega}$):

$$\epsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{300\pi^2 \sin 2\pi t}{d^2} = \frac{300\pi^2 \sin 2\pi t}{(4 + 3\cos 2\pi t)^2} \text{ рад/с}^2. \tag{5}$$

Переходим к определению ускорения точки на ободе второго колеса в различные моменты времени. Сначала находим для каждого момента времени значения ω, ϵ. Пользуясь формулами (1), (4), (5), имеем

при $t_1 = 0$ $\quad \omega_1 = \dfrac{50\pi}{7}$ рад/с, $\quad \epsilon_1 = 0$,

при $t_2 = 0{,}25$ с $\quad \omega_2 = \dfrac{50\pi}{4}$ рад/с, $\quad \epsilon_2 = \dfrac{75\pi^2}{4}$,

при $t_3 = 0{,}5$ с $\quad \omega_3 = 50\pi$ рад/с, $\quad \epsilon_3 = 0$.

Далее, определяем модуль ускорения точки на ободе колеса *II* по формуле

$$a = R\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}.$$

Подставляя значения R, ϵ, ω для кажого момента времени, находим:

при $t_1 = 0$ $\qquad a_1 = \dfrac{50\,000}{49}\pi^2 \approx 10\,000$ см/с^2 = 100 м/с^2,

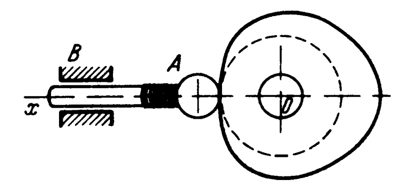
при $t_2 = 0{,}25$ с $\qquad a_2 = 5\pi^2\sqrt{75^2 + 625^2}$ см/с^2 = 308 м/с^2,

при $t_3 = 0{,}5$ с $\qquad a_3 = 50\,000\pi^2 \approx 495\,000$ см/с^2 = 4950 м/с^2.

Задача 4.15. При пуске в ход кулачок начинает вращаться из состояния покоя вокруг неподвижной оси O с постоянным угловым ускорением $\epsilon = 0{,}1\pi$ рад/с^2. Достигнув угловой скорости, соответствующей 40 об/мин, кулачок далее вращается равномерно. Уравнение контура кулачка имеет вид

$$r = \left(\frac{30}{\pi}\varphi + 20\right) \text{ см} \tag{1}$$

(архимедова спираль). Стержень A кулачкового механизма движется в неподвижных направляющих B, как показано на рисунке, удерживаясь в соприкосновении с контуром кулачка при помощи пружины.



К задаче 4.15

Определить скорость стержня и время, в течение которого продолжался пуск в ход. Найти ускорение стержня.

Решение. Угол поворота кулачка при пуске равен

$$\varphi = \frac{\epsilon t^2}{2} = 0{,}05\pi t^2 \text{ рад.} \tag{2}$$

Расстояние между центром кулачка и стержнем равно

$$r = \left(\frac{30}{\pi}\cdot 0{,}05\pi t^2 + 20\right) \text{ см.} \tag{3}$$

Стержень движется прямолинейно, следовательно, проекция его скорости на ось x равна производной от координаты r по времени

$$v_x = \dot{r} = 2 \cdot 1{,}5t = 3t \text{ см/с}. \tag{4}$$

Проекция ускорения стержня, движущегося прямолинейно, равна производной от проекции скорости по времени

$$a_x = \dot{v}_x = 3 \text{ см/с}^2. \tag{5}$$

По условию, достигнув угловой скорости, соответствующей 40 об/мин, кулачок далее вращается равномерно. Модуль угловой скорости последующего равномерного вращения кулачка

$$\omega_1 = 40 \frac{2\pi}{60} = \frac{4}{3}\pi \text{ рад/с}. \tag{6}$$

Дифференцируя по времени (1), находим проекцию скорости движения стержня на ось x

$$v_{x1} = \dot{r} = \frac{30}{\pi}\dot{\varphi} = \frac{30}{\pi}\omega_1 = \frac{30}{\pi}\frac{4}{3}\pi = 40 \text{ см/с}. \tag{7}$$

Пуск в ход продолжается до тех пор, пока скорость (4) не станет равной v_{x1}. Приравнивая эти два значения скорости, определяем время пуска в ход T

$$3T = 40 \quad \text{или} \quad T = 13{,}33 \text{ с}. \tag{8}$$

Время пуска в ход можно определить и другим способом. Проекция угловой скорости кулачка при пуске в ход определяется как производная от угла поворота (2) по времени

$$\omega_z = \dot{\varphi} = 0{,}1\pi t. \tag{9}$$

Для определения времени пуска T приравняем значение проекции угловой скорости (9) ее значению (6). Тогда

$$0{,}1\pi T = \frac{4}{3}\pi, \quad \text{или} \quad T = 13{,}33 \text{ с}.$$

Задача 4.16. Круговой поступательно движущийся кулачок передвигается согласно уравнению (рис. *а*)

$$x = a \cos\omega t \text{ м},$$

где координата x отсчитывается по горизонтали от точки O_1 (рис. *б*), a, ω – постоянные коэффициенты, t – время в секундах.

Определить уравнение движения и скорость стержня.

Решение. Вводя угол φ, как указано на рис. *б*, находим координату нижней точки стержня (рис. *б*)

$$y = r\sin\varphi. \tag{1}$$

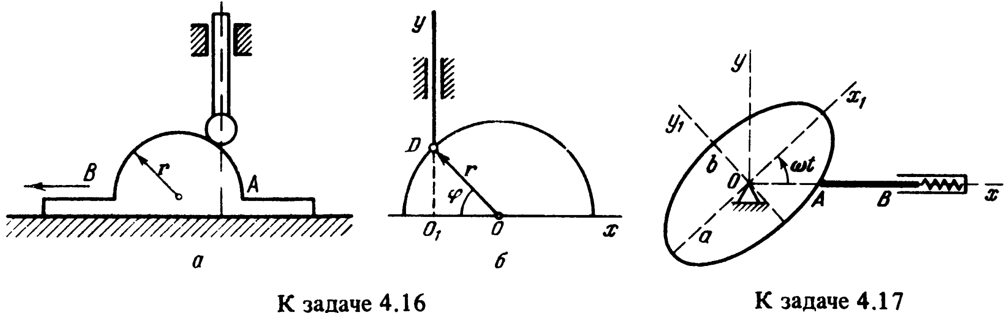
С другой стороны, расстояние от центра кулачка до начала координат O_1 равно

$$x = r\cos\varphi = a\cos\omega t,$$

откуда

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}\cos\omega t,$$

и, следовательно, $\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sqrt{1 - (a/r)^2\cos^2\omega t}$. Подставляя



К задаче 4.16 К задаче 4.17

это значение в уравнение (1), находим искомое уравнение движения стержня:

$$y = r\sqrt{1 - (a/r)^2\cos^2\omega t} \text{ м}.$$

Проекция скорости стержня определится как производная от координаты y по времени

$$v_y = \dot{y} = -\frac{a^2\omega\sin 2\omega t}{2r\sqrt{1 - (a/r)^2\cos^2\omega t}} \text{ м/с}.$$

Задача 4.17. Профиль кулачка представляет собой эллипс, главные полуоси которого a и b. Кулачок вращается относительно точки O с угловой скоростью ω. Определить уравнение движения толкателя AB.

Решение. Выберем неподвижную систему координат xy и подвижную x_1y_1, оси которой связаны с кулачком.

Траектория точки A по отношению к вращающейся системе координат есть эллипс.

Параметрические уравнения эллипса имеют вид (см. рис.)

$$x_1 = a\cos\varphi = a\cos\omega t, \qquad y_1 = b\sin\varphi = -b\sin\omega t. \tag{1}$$

Для определения закона движения толкателя воспользуемся формулами преобразования координат, которые в матричной форме имеют вид

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \{c\}\cdot\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix}. \tag{2}$$

Коэффициенты матрицы $\{c\}$ – это направляющие косинусы углов поворота системы координат xy по отношению к системе x_1y_1.

Таким образом, из рисунка имеем

$$\{c\} = \begin{Bmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{Bmatrix}. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2) и осуществляя перемножение матриц, получим

$$x = x_1\cos\omega t - y_1\sin\omega t, \qquad y = x_1\sin\omega t + y_1\cos\omega t. \tag{4}$$

Подставляя в первое уравнение системы (4) x_1 и y_1 из (1), находим

$$x = a\cos^2\omega t + b\sin^2\omega t. \tag{5}$$

Или иначе:

$$x = \frac{a}{2}(1+\cos 2\omega t) + \frac{b}{2}(1-\cos 2\omega t) =$$

$$= \left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right) + \left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)\cos 2\omega t. \tag{6}$$

Итак, вращение кулачка приводит к гармоническим колебаниям толкателя, частота которых в два раза больше частоты вращения кулачка.

Глава 5

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

§ 1. АБСОЛЮТНОЕ, ПЕРЕНОСНОЕ И ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Рассмотрим движение точки по отношению к системе подвижных осей координат x_1, y_1, z_1 (рис. 5.1), которые в свою очередь движутся относительно осей x, y, z. Систему осей x, y, z условно будем считать неподвижной.

Движение точки относительно неподвижных осей координат называется *абсолютным движением*. Движение точки по отношению к подвижным осям координат x_1, y_1, z_1 называется *относительным движением*. *Переносным* называется движение относительно неподвижной системы осей x, y, z той точки подвижной системы осей x_1, y_1, z_1, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка.

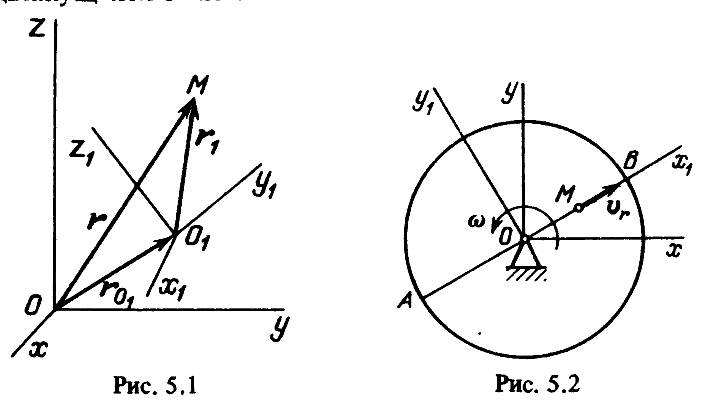


Рис. 5.1 Рис. 5.2

Наблюдатель, связанный с системой подвижных осей x_1, y_1, z_1, видит относительное движение точки. Наблюдатель, связанный с системой неподвижных осей x, y, z, видит абсолютное движение точки.

Величины, относящиеся к абсолютному движению точки, будем снабжать индексом a, к относительному – индексом r, к переносному – индексом e (например, $\mathbf{v}_r$ – скорость точки в относительном движении, $\mathbf{a}_e$ – ускорение в переносном движении и т.д.).

Поясним понятия абсолютного, относительного и переносного движений на примере. Диск вращается равномерно с угловой скоростью ω вок-

руг оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр O. По диаметру AB диска с постоянной по модулю скоростью движется точка M (рис. 5.2).

Выберем неподвижную, абсолютную систему координат с центром в неподвижной точке O и обозначим ее Oxy. Подвижную, относительную систему координат выбираем с центром в неподвижной точке диска O, ось Ox_1 направляем по диаметру AB, ось Oy_1 в плоскости диска – перпендикулярно к оси Ox_1. Система координат Ox_1y_1 жестко связана с диском и, следовательно, вращается вместе с ним против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью ω.

Относительным движением точки M в данном примере является прямолинейное и равномерное движение этой точки по диаметру AB, т.е. по оси Ox_1. Переносным движением точки M является вращение вместе с диском той точки диска, с которой в данный момент совпадает точка M. Абсолютное движение точки M есть движение по отношению к неподвижной системе координат Oxy. Оно складывается из относительного движения вдоль оси Ox_1 и из переносного движения – вращения точки M вместе с диском.

В рассматриваемом примере и в других аналогичных случаях мы, кроме представления о переносном движении точки, встречаемся с понятием переносного движения твердого тела, в данном случае диска, по отношению к которому точка M совершает относительное движение.

Пользуясь определением переносного и относительного движений, а также рассмотренным выше примером, можно указать на следующий метод изучения этих движений. Желая изучить относительное движение точки, следует мысленно остановить переносное движение и изучать движение далее по законам и правилам абсолютного движения точки. Если необходимо изучить переносное движение точки, то следует мысленно остановить относительное движение и рассматривать далее движение точки по формулам кинематики точки или твердого тела в абсолютном движении. Если точка участвует одновременно в относительном и переносном движениях, то ее абсолютное движение называют *сложным движением точки,* а ее относительное и переносное движения называются *составляющими движениями.*

§ 2. СЛОЖЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ И УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В ОТНОСИТЕЛЬНОМ И АБСОЛЮТНОМ ДВИЖЕНИЯХ ТОЧКИ

Уравнения движения точки M в относительном движении определяются формулами

$$x_1 = f_1(t), \quad y_1 = f_2(t), \quad z_1 = f_3(t), \tag{1*}$$

где x_1, y_1, z_1 – координаты движущейся точки M в относительной системе координат $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 5.1).

Зависимость между $\boldsymbol{r}$ – радиусом-вектором точки M (рис. 5.1) в абсолютной системе координат, $\boldsymbol{r}_1$ – радиусом-вектором той же точки в относительной системе координат и $\boldsymbol{r}_{O_1}$ – радиусом-вектором начала подвижной, относительной системы координат дается формулами

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{O_1}+\boldsymbol{r}_1, \qquad (2^*)$$

где

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}, \qquad (3^*)$$

$$\boldsymbol{r}_{O_1}=x_{O_1}\boldsymbol{i}+y_{O_1}\boldsymbol{j}+z_{O_1}\boldsymbol{k}, \qquad (4^*)$$

$$\boldsymbol{r}_1=x_1\boldsymbol{i}_1+y_1\boldsymbol{j}_1+z_1\boldsymbol{k}_1. \qquad (5^*)$$

В этих формулах x, y, z – абсолютные координаты точки M; $x_{O_1}, y_{O_1}, z_{O_1}$ – координаты точки O_1 начала относительной системы координат по отношению к системе Oxy.

Формулы (2*) или (3*) определяют уравнения абсолютного движения точки M в векторном виде.

Формула (5*) дает векторное уравнение движения точки в относительном движении.

Уравнения абсолютного движения точки находятся из (2*) с учетом (3*), (4*) и (5*) проектированием на оси $Oxyz$ или по формулам аналитической геометрии, связывающим координаты точки M в двух системах координат – абсолютной и относительной:

$$\begin{aligned} x&=x_{O_1}+\alpha_1x_1+\alpha_2y_1+\alpha_3z_1,\\ y&=y_{O_1}+\beta_1x_1+\beta_2y_1+\beta_3z_1,\\ z&=z_{O_1}+\gamma_1x_1+\gamma_2y_1+\gamma_3z_1. \end{aligned} \qquad (6^*)$$

В этих формулах α_i, β_i, γ_i – соответственно косинусы углов между осями абсолютной и относительной систем координат; так, например, $\alpha_2=\cos(\widehat{x,y_1})$, $\gamma_3=\cos(\widehat{z,z_1})$ и т.д.

В формулах (6*) координаты x_{O_1}, y_{O_1}, z_{O_1}, а также углы между осями абсолютной и относительной систем координат известны как функции времени, если задано переносное движение; относительные координаты x_1, y_1, z_1 определяются как функции времени уравнениями (1*).

Уравнения переносного движения имеют тот же вид, что и равенства (6*), только под x_1, y_1, z_1 в этом случае следует подразумевать три числа, определяющих фиксированные координаты точки M в данный момент времени. В конкретных задачах уравнения абсолютного и относительного движений точки могут быть получены и из более простых, геометрических соображений.

Уравнения (1*) определяют относительную траекторию точки M в параметрическом виде. Для определения относительной траектории точ-

ки M в координатной форме необходимо исключить время из системы уравнений (1*).

Уравнения (6*) определяют абсолютную траекторию точки в параметрическом виде, так как координаты x_{O_1}, y_{O_1}, z_{O_1} и x_1, y_1, z_1, так же как и направляющие косинусы α_i, β_i, γ_i, являются функциями независимого параметра – времени. Для определения абсолютной траектории точки M в координатной форме надо исключить из уравнений (6*) время.

Уравнения абсолютного движения точки (6*) упрощаются, если переносное движение является плоским и относительное движение происходит в той же плоскости. Обозначая через α угол между положительными направлениями осей x и x_1, можно записать уравнения (6*), выражающие зависимость между абсолютными и относительными координатами точки, в виде

$$x = x_{O_1} + x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \quad y = y_{O_1} + x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha. \tag{7*}$$

Если, кроме того, переносное плоское движение является поступательным, то можно выбрать относительную систему координат так, чтобы оси x и x_1, y и y_1 были параллельны. Тогда уравнения (7*) принимают вид

$$x = x_{O_1} + x_1, \quad y = y_{O_1} + y_1. \tag{8*}$$

Если переносное движение является вращением вокруг неподвижной оси и относительное движение точки происходит в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, то, совмещая начало относительной системы координат с осью вращения и ось z с осью z_1, находим уравнения абсолютного движения из (7*)

$$x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \quad y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha. \tag{9*}$$

В некоторых задачах более простые решения получаются при пользовании другими системами координат: полярными, сферическими, цилиндрическими и т.д.

Задачи, относящиеся к данному параграфу, делятся на два типа.

1. Известны относительное и переносное движения точки. Требуется определить уравнения абсолютного движения и абсолютную траекторию точки.

2. Известны абсолютное и переносное движения точки. Требуется определить уравнение относительного движения и относительную траекторию точки.

Первая задача сводится к сложению двух составляющих движений точки. Вторая задача заключается в разложении известного абсолютного движения на заданное переносное движение и неизвестное, подлежащее определению, относительное движение.

Указание. Рекомендуется такая последовательность действий при решении задач.

А. Заданы относительное и переносное движения; требуется определить абсолютное движение:

1) раскладываем абсолютное движение точки на два составных движения, переносное и относительное;

2) выбираем две системы координат, абсолютную, условно принимаемую неподвижной, и относительную;

3) составляем уравнения относительного движения точки;

4) пользуясь одним из видов уравнений (6*)–(9*), составляем уравнения абсолютного движения точки;

5) исключая время из уравнений абсолютного движения точки, находим уравнения абсолютной траектории точки в явном виде.

Б. Заданы абсолютное и переносное движения; требуется определить относительное движение:

1) раскладываем абсолютное движение точки на два движения, переносное и относительное;

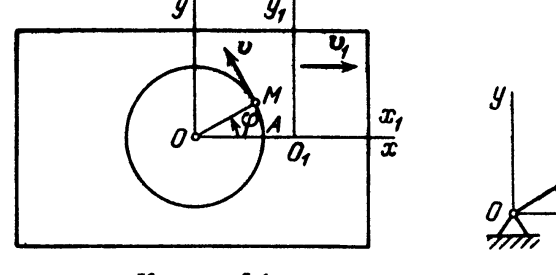
2) выбираем абсолютную, условно неподвижную систему координат и относительную систему осей;

3) составляем уравнения абсолютного движения точки;

4) пользуясь одним из видов уравнений (6*)–(9*), находим уравнения относительного движения точки;

5) исключая время из уравнений относительного движения точки, находим уравнения относительной траектории точки в явном виде.

Задача 5.1. Лента для записи показаний пера самописца M движется поступательно, параллельно оси x, с постоянной скоростью v_1. Перо само-



К задаче 5.1

К задаче 5.2

писца M вращается вокруг точки O на расстоянии $OM = r$, описывая окружность. Скорость пера постоянна по модулю и равна v (см. рис.).

Определить траекторию, вычерчиваемую пером на ленте.

Решение. Выберем оси координат с началом в центре окружности O и направим ось x в сторону движения ленты, ось y перпендикулярно к ее скорости.

Абсолютное движение пера самописца M является движением по окружности радиусом r с постоянной по величине скоростью v. Разложим

это движение на два составных движения: переносное поступательное прямолинейное движение вместе с лентой и относительное движение пера по отношению к ленте. Обозначим относительные координаты пера через x_1, y_1 и абсолютные координаты через x, y. Координаты начала относительной системы координат точки O_1 назовем x_{O_1}, y_{O_1}. Согласно уравнениям (8*) зависимость между этими координатами имеет вид

$$x = x_{O_1} + x_1, \quad y = y_{O_1} + y_1. \tag{1}$$

Обозначая угол, составленный радиусом OM с осью x, буквой φ, находим

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Так как дуга $AM = r\varphi = vt$, то угол φ определяется по формуле

$$\varphi = \frac{v}{r}t.$$

Далее, находим координаты начала относительной системы координат

$$x_{O_1} = v_1 t = v_1 \frac{r}{v}\varphi, \quad y_{O_1} = 0.$$

Подставляя найденные значения координат в уравнения (1), имеем

$$r\cos\varphi = v_1 \frac{r}{v}\varphi + x_1, \quad r\sin\varphi = y_1.$$

Таким образом, параметрическое уравнение относительной траектории пера самописца, т.е. уравнение кривой, которая вычерчивается на ленте, является уравнением циклоиды

$$x_1 = r\cos\varphi - v_1 \frac{r}{v}\varphi, \quad y_1 = r\sin\varphi.$$

Задача 5.2. Кривошип $OA = r$ кривошипно-ползунного механизма вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку O, с постоянной угловой скоростью ω_0; угол $\varphi = \omega_0 t$. Длина кривошипа r, длина шатуна $AB = l$. Ползун B движется в направляющих по прямой, проходящей через точку O.

Определить уравнения относительного движения ползуна B по отношени к системе координат x_1y_1, начало которой совпадает с точкой соединения кривошипа и шатуна и которая перемещается поступательно. Рассматривать ползун B как материальную точку. Длины даны в метрах, углы в радианах, время в секундах.

Р е ш е н и е. Относительное движение шатуна AB является вращением вокруг оси, перпендикулярной к плоскости рисунка и проходящей через

точку A. Положение шатуна в этом движении определяется углом $\psi = \angle x_1 AB = \angle ABO$. По теореме синусов имеем

$$\frac{r}{\sin\psi} = \frac{l}{\sin\varphi},$$

откуда

$$\psi = \arcsin\left(\frac{r}{l}\sin\omega_0 t\right) \text{ рад.}$$

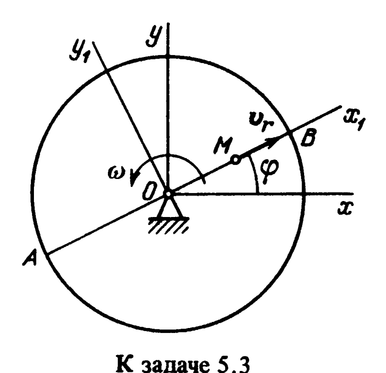
Это — уравнение относительного движения шатуна AB.

Чтобы получить уравнения относительного движения ползуна B, достаточно выразить его относительные координаты x_1, y_1 через найденный угол ψ:

$$x_1 = l\cos\psi = l\sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2}\sin^2\omega_0 t} \text{ м}, \quad y_1 = -l\sin\psi = -r\sin\omega_0 t \text{ м}.$$

Таким образом, в данной задаче сложное движение шатуна AB разложено на два простых вращательных движения: переносное движение — вращение с постоянной угловой скоростью ω_0 вокруг неподвижного центра O и относительное движение — неравномерное вращение шатуна вокруг центра A подвижной системы координат $x_1 y_1$.

Задача 5.3. Точка M движется с постоянной скоростью v_r вдоль диаметра AB диска, причем в начальный момент точка находилась в центре диска O. Диск одновременно вращается с постоянной угловой скоростью



К задаче 5.3

ω вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через центр диска. В начальный момент диаметр AB совпадал с осью Ox.

Определить абсолютную траекторию точки M. Длины даны в метрах, углы — в радианах, время — в секундах.

Решение. Вращение диска с постоянной угловой скоростью принимаем за переносное движение. Движение точки M по диаметру диска AB

рассматриваем как относительное движение. Эту задачу проще всего решить, применив полярную систему координат: r – модуль радиуса-вектора $\overline{OM}$, определяющий расстояние точки M от полюса O, и угол $\varphi = \angle xOx_1$, определяющий угол поворота радиуса-вектора вокруг точки O. Имеем

$x_1 = r = v_r t$ м, $\varphi = \omega t$ рад.

Для нахождения искомой траектории определяем из последнего уравнения время

$t = \varphi/\omega$ с

и подставляем это значение в первое уравнение

$$r = \frac{v_r}{\omega}\varphi \text{ м.}$$

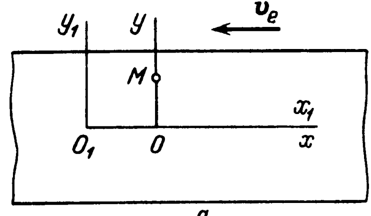
Это есть уравнение архимедовой спирали в полярной системе координат.

Задача 5.4. Точка M совершает гармоническое колебательное движение согласно уравнениям

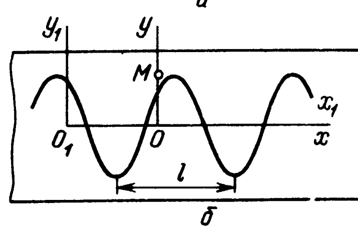
$$x = 0, \quad y = a\cos(kt + \beta). \tag{1}$$

Экран осциллографа, на котором записывается движение точки M, перемещается влево с постоянной скоростью v_e.

Определить траекторию, описываемую точкой M на экране (рис. *а*). Длины даны в метрах, углы – в радианах, время – в секундах.



а



б

К задаче 5.4

Р е ш е н и е. Точка M участвует в сложном движении. Абсолютным или результирующим движением будет прямолинейное гармоническое колебательное движение точки M по отношению к неподвижной системе координат Oxy, определяемое уравнениями (1). С другой стороны, разложим мысленно абсолютное движение точки M на относительное движение по отношению к экрану и переносное движение вместе с экраном. Зависимость между координатами точки M в абсолютном и относительном движениях будет:

$$x = x_{O_1} + x_1, \quad y = y_{O_1} + y_1, \tag{2}$$

где x_{O_1}, y_{O_1} – координаты точки O_1, начала относительной системы координат, x_1, y_1 – искомые координаты точки M в относительном движении. Далее,

$$x_{O_1} = -v_e t, \quad y_{O_1} = 0.$$

Из (1) и (2) находим

$$0 = -v_e t + x_1, \quad a\cos(kt + \beta) = 0 + y_1$$

и, далее,

$$x_1 = v_e t, \quad y_1 = a\cos(kt + \beta).$$

Исключив из этой системы уравнений время, получим уравнение относительной траектории точки M

$$y_1 = a\cos\left(\frac{kx_1}{v_e} + \beta\right) \text{ м}.$$

Это – уравнение синусоиды. Обозначим длину волны этой синусоиды (рис. *б*) через l. Тогда время одного полного колебания (период) будет:

$$T_1 = \frac{l}{v_e} = \frac{2\pi}{k}.$$

Таким образом, частота колебаний k точки M связана с длиной волны на экране соотношением

$$k = \frac{2\pi v_e}{l}.$$

Указание. Для приобретения навыков в решении задач на определение траекторий и уравнений движения в относительном и абсолютном движениях точки рекомендуется решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 21.1–21.3, 21.5, 21.6, 21.8, 21.9, 21.13–21.15.

§ 3. СЛОЖЕНИЕ СКОРОСТЕЙ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ТОЧКИ В ОТНОСИТЕЛЬНОМ, ПЕРЕНОСНОМ И АБСОЛЮТНОМ ДВИЖЕНИЯХ

Зависимость между абсолютной, относительной и переносной скоростями точки, совершающей сложное (составное) движение, определяется *теоремой сложения скоростей*, согласно которой абсолютная скорость равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r. \qquad (1^*)$$

Для определения относительной скорости точки следует мысленно остановить переносное движение и вычислить относительную скорость по правилам кинематики точки.

Для определения переносной скорости точки достаточно мысленно остановить относительное движение и искать переносную скорость по правилам кинематики точки (или кинематики твердого тела) как скорость той точки перемещающейся системы координат, с которой совпадает в данный момент движущаяся точка.

Теорема сложения скоростей (рис. 5.3) позволяет решать задачи такого рода:

1. Известны две стороны треугольника скоростей по модулю и направлению, соответствующие, например, абсолютной и переносной скоростям точки; требуется определить третью сторону треугольника, соответствующую относительной скорости точки.

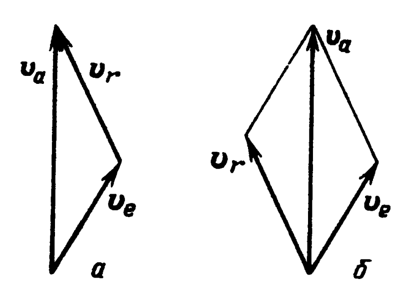


Рис. 5.3

2. Известна одна сторона треугольника по модулю и направлению, соответствующая, например, абсолютной скорости точки, а также направления двух других сторон. Определить модуль переносной и относительной скоростей.

Решение этих задач может быть получено графически, построением замкнутого треугольника скоростей (рис. 5.3,*а*) или параллелограмма скоростей (рис. 5.3,*б*). При обходе треугольника скоростей стрелки, определяющие направление относительной и переносной скоростей, идут в одном направлении, стрелка, определяющая направление абсолютной скорости, в – противоположном.

Решение задач, таким образом, сводится к построению треугольника или параллелограмма скоростей и определению элементов, сторон и углов этих геометрических фигур. Это определение может быть сделано или тригонометрическим путем, или проектированием геометрического равенства (1*) на декартовы оси координат.

При применении метода проекций надлежит выбрать оси координат и спроектировать равенство (1*) на эти оси. Тогда зависимости между проекциями абсолютной, относительной и переносной скоростей определяются формулами

$$v_{ax} = v_{ex} + v_{rx}, \quad v_{ay} = v_{ey} + v_{ry}. \tag{2*}$$

Модуль абсолютной скорости находится по ее проекциям

$$v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2}. \tag{3*}$$

Направление абсолютной скорости определяется направляющими косинусами

$$\cos(\widehat{\mathbf{v}_a, x}) = \frac{v_{ax}}{v_a}, \quad \cos(\widehat{\mathbf{v}_a, y}) = \frac{v_{ay}}{v_a}. \tag{4*}$$

Указание. При решении задач рекомендуется такая последовательность действий:

1) разложить движение на составляющие, определив абсолютное, относительное и переносное движения;

2) выбрать две системы координат: абсолютную и подвижную;

3) мысленно остановив переносное движение, найти скорость относительного движения точки;

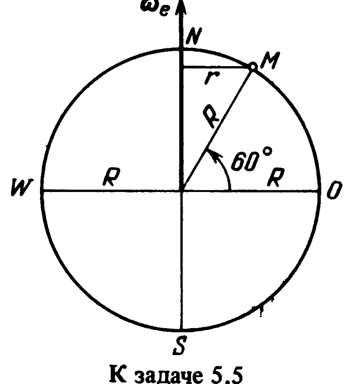
4) мысленно остановив относительное движение, найти скорость переносного движения точки;

5) применив теорему сложения скоростей, определить искомую абсолютную скорость точки.

Если абсолютная скорость известна, то можно, пользуясь теоремой сложения скоростей, найти искомую относительную или переносную скорость точки.

Задача 5.5. При запуске искусственного спутника Земли ему необходимо сообщить вблизи поверхности Земли абсолютную горизонтальную скорость 8 км/с.

Определить наименьшую и наибольшую относительные горизонтальные скорости, которые необходимо сообщить спутнику, если запуск производится на экваторе; на широте 60°; на Северном полюсе. Радиус Земли R = 6400 км (см. рис.).



К задаче 5.5

Решение. Спутник до начала полета вращается вместе с Землей как одно тело. Движение спутника вместе с Землей принимаем за переносное движение.

Движение спутника по отношению к Земле рассматриваем как относительное движение.

Тогда абсолютная скорость спутника будет

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r.$$

Обозначая широту места запуска углом φ, получим для определения наибольшей относительной скорости равенство

$$v_a = v_r - v_e,$$

где

$$v_e = R\,\omega_e \cos\varphi. \tag{1}$$

Запуск спутника в этом случае производится в направлении с востока на запад, в сторону, противоположную вращению Земли.

Наименьшая относительная скорость спутника найдется из равенства

$$v_a = v_r + v_e,$$

где v_e также определяется формулой (1). В этом случае запуск производится в направлении с запада на восток, в сторону вращения Земли.

При запуске спутника у поверхности Земли на экваторе угол $\varphi = 0$ и, следовательно,

$$v_{e_1} = 6400 \cdot 1/24 \cdot 2\pi/3600 = 0{,}465 \text{ км/с}.$$

Наибольшая и наименьшая относительные скорости спутника определяются из равенства

$$v_a = v_r \pm v_{e_1}$$

или

$$8 = v_r \pm 0{,}465,$$

откуда максимальная относительная скорость

$$v_r = 8{,}465 \text{ км/с},$$

а минимальная относительная скорость

$$v_r = 7{,}535 \text{ км/с}.$$

При запуске спутника на широте 60° переносная скорость спутника, равная скорости точки, находящейся у поверхности Земли, будет:

$$v_{e_2} = R\,\omega_e \cos 60^\circ = 0{,}233 \text{ км/с},$$

и, следовательно, наибольшая и наименьшая относительные скорости спутника определяются из равенства

$$8 = v_r \pm 0{,}233,$$

откуда

$$v_{r\max} = 8{,}233 \text{ км/с}, \quad v_{r\min} = 7{,}767 \text{ км/с}.$$

При запуске спутника на Северном или Южном полюсах переносная скорость равна нулю, так как эти точки земной поверхности расположены на оси вращения, и, следовательно,

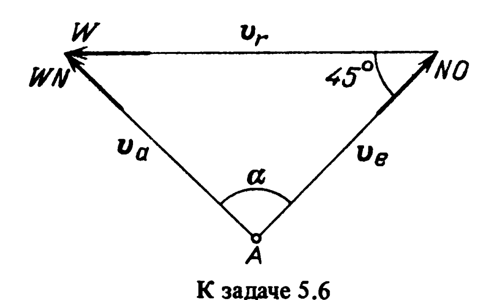
$$v_a = v_r = 8 \text{ км/с}.$$

Задача 5.6. Штурман, находящийся на мостике морского грузового транспорта, идущего на северо-восток со скоростью 16 узлов, определил модуль и направление относительной скорости другого судна. Эта относительная скорость оказалась равной $16\sqrt{2}$ узлам и направлена на запад.

Определить модуль и направление абсолютной скорости второго судна, т.е. его скорость относительно Земли.

Узел – единица скорости, равная одной морской миле в час, а морская миля равна 1852 м. Суда рассматривать как точки.

Решение. Движение второго судна будем рассматривать как сложное. Примем за абсолютное движение второго судна его движение по отношению к Земле. Относительным движением второго судна будем считать



К задаче 5.6

его движение по отношению к грузовому транспорту. За переносное движение примем поступательное движение вместе с грузовым транспортом.

По условию задачи известны: относительная скорость второго судна, направленная на запад: $v_r = 16\sqrt{2}$ узлов, переносная скорость при поступательном движении, равная скорости грузового транспорта $v_e = 16$ узлам, направленная на северо-восток. Согласно теореме сложения скоростей

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r.$$

Для графического нахождения абсолютной скорости второго судна построим треугольник скоростей (см. рис.). Для этого отложим из произвольной точки A переносную скорость $\mathbf{v}_e$ направленную на северо-восток, а из конца переносной скорости под углом в 45° на запад откладываем отрезок, равный $\mathbf{v}_r$. Замыкающая сторона треугольника будет абсолютной скоростью.

Модуль абсолютной скорости определится по теореме косинусов

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 - 2 v_e v_r \cos(\widehat{\mathbf{v}_e, \mathbf{v}_r})} = 16 \text{ узлов}.$$

Чтобы найти угол α, определяющий направление абсолютной скорости, замечаем, что $v_a = v_e$, следовательно, треугольник скоростей равнобедренный и угол $\alpha = 90°$.

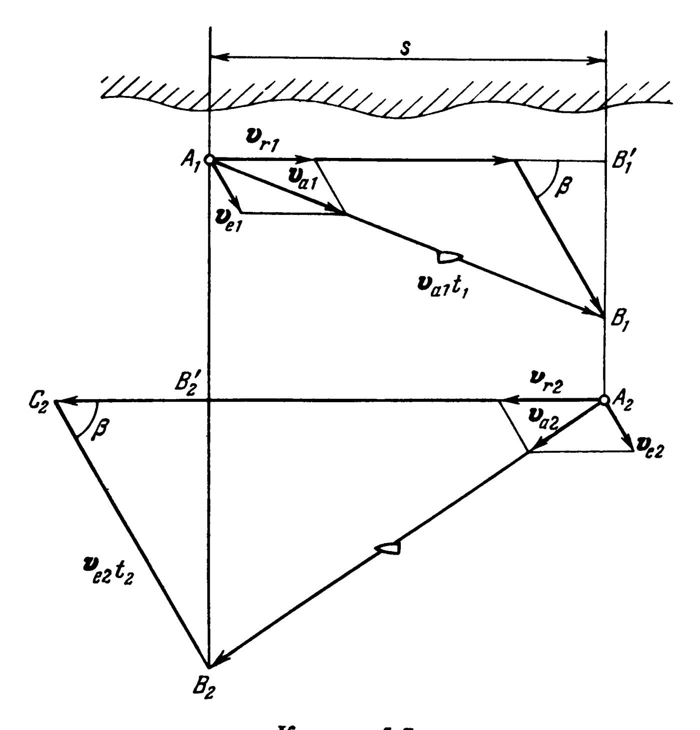
Таким образом, абсолютная скорость направлена на северо-запад.

Задача 5.7. При определении постоянной скорости судна относительно воды производят пробег судна вдоль специально оборудованной мерной прямой линии в двух взаимно противоположных направлениях. При этом время пробега в одном направлении оказалось равным 9 мин 20 с, а время

пробега в обратном направлении 11 мин 10 с. Длина мерной линии $s = 3$ морские мили.

Определить скорость судна относительно воды v_r, полагая, что в районе испытаний имеется неизвестное, но постоянное по величине и направлению течение.

Решение. Будем рассматривать движение судна как сложное. За абсолютное движение судна примем его движение по отношению к Земле.



К задаче 5.7

Скорость v_a этого движения неизвестна ни по модулю, ни по направлению. За относительно движение судна примем его движение по отношению к воде. Относительная скорость v_r известна по направлению (она направлена по мерной линии), неизвестна по модулю, но при обоих пробегах относительная скорость неизменна. За переносное движение судна примем движение судна по течению вместе с водной массой. Переносная скорость $\mathbf{v}_e$ будет равна скорости течения, модуль и направление которого постоянны, но неизвестны.

Запишем теорему сложения скоростей

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r. \qquad (1)$$

Умножим это векторное равенство на t_1, время первого пробега, получим

$$\mathbf{v}_{a1}t_1 = \mathbf{v}_{r1}t_1 + \mathbf{v}_{e1}t_1.$$

Проектируя последнее равенство на направление мерной линии s, получим (см. рис.)

$$s = v_{r1}t_1 + v_{e1}t_1\cos\beta, \qquad (2)$$

где неизвестный угол между течением и мерной линией обозначен буквой β.

Применим аналогичный прием ко второму пробегу. Умножая векторное равенство (1) на t_2, время второго пробега, получим

$$\mathbf{v}_{a2}t_2 = \mathbf{v}_{r2}t_2 + \mathbf{v}_{e2}t_2.$$

Проектируя это векторное равенство на направление мерной линии s, найдем

$$s = v_{r2}t_2 - v_{e2}t_2\cos\beta. \qquad (3)$$

Учитывая, что $\mathbf{v}_{r1} = \mathbf{v}_{r2}$ и $\mathbf{v}_{e1} = \mathbf{v}_{e2}$ по условию, перепишем уравнения (2) и (3) в виде

$$s = v_r t_1 + v_e t_1\cos\beta, \quad s = v_r t_2 - v_e t_2\cos\beta.$$

Решив эту систему уравнений, исключим $v_e\cos\beta$ и найдем искомую скорость судна по отношению к воде

$$v_r = \frac{s(t_1 + t_2)}{2t_1t_2}. \qquad (4)$$

Если в этой формуле расстояние s дано в милях, а время t в секундах, то размерность v_r будет миля/с. Так как скорость судна принято измерять в узлах, т.е. в морских милях в час, то для перевода в узлы надо умножить правую часть (4) на 3600, т.е. на количество секунд в часе. Итак,.

$$v_r = \frac{s(t_1 + t_2)}{2t_1t_2}\,3600 \text{ узлов}.$$

Подставляя числовые данные t_1 = 9 мин 20 с = 560 с, t_2 = 11 мин 10 с = = 670 с, находим

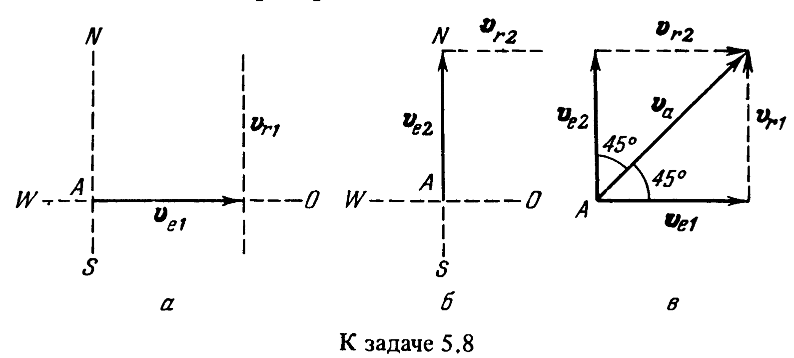
$$v_r = \frac{3(560 + 670)}{2\cdot 560\cdot 670}\,3600 = 17{,}7 \text{ узла}.$$

Задача 5.8. Судно идет на восток со скоростью 12 узлов, при этом флюгер на мачте показывает южный ветер. Судно изменило курс и идет на север с прежней по модулю скоростью, флюгер теперь показывает западный ветер.

Определить модуль и направление скорости ветра по отношению к Земле, считая скорость ветра постоянной.

Примечание. Наименование курса указывает, куда идет судно, наименование ветра указывает, откуда ветер дует.

Решение. Рассмотрим движение ветра как сложное движение. За абсолютное движение ветра примем его движение по отношению к Земле.



К задаче 5.8

Относительным движением ветра будем считать его движение по отношению к движущемуся судну. За переносное движение ветра примем его движение вместе с движущимся судном. Абсолютная скорость ветра неизвестна ни по модулю, ни по направлению. Относительная скорость v_r ветра известна только по направлению для двух моментов времени. Переносная скорость v_e ветра, равная скорости движущегося судна, известна по модулю и направлению для тех же моментов времени.

Согласно теореме сложения скоростей имеем $v_a = v_e + v_r$. Следовательно, при первом курсе судна теорема сложения скоростей для ветра запишется так:

$$v_{a1} = v_{e1} + v_{r1}. \tag{1}$$

Выполним построение, соответствующее правой части уравнения (1). Отложим известный вектор v_{e1} и из его конца проведем направление вектора v_{r1} (рис. *а*).

Напишем теорему сложения скоростей для ветра при втором курсе судна:

$$v_{a2} = v_{e2} + v_{r2}.$$

Построение правой части этого равенства дано на рис. *б*. Совместим, далее, оба рисунка. Другими словами, выполним оба построения сразу из одной точки A.

Тогда начало вектора v_a совпадает с точкой A, а пересечение направлений v_{r1} и v_{r2} определит конец вектора v_a (рис. *в*). Согласно условию

абсолютная скорость ветра постоянна, т.е. $v_{a1} \equiv v_{a2}$. Это учтено при построении рис. *в*. Из построения находим, что ветер юго-западный. Его скорость равна

$$v_a = 12\sqrt{2}\text{ узлов} = 12\sqrt{2}\frac{1852}{3600}\text{ м/с} \approx 8{,}73\text{ м/с}.$$

Указание. Для приобретения навыков в решении задач на сложение скоростей рекомендуется решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 22.1–22.4, 22.6–22.8, 22.10, 22.11, 22.14–22.16, 22.19, 22.20.

§ 4. СЛОЖЕНИЕ УСКОРЕНИЙ

1. Определение ускорений точки при переносном поступательном и произвольном переносном движениях. Зависимость между ускорениями точки в абсолютном, относительном и переносном движениях определяется *теоремой сложения ускорений*, иначе называемой *теоремой Кориолиса*,

$$a_a = a_e + a_r + a_c. \qquad (1^*)$$

Согаслно этой теореме абсолютное ускорение точки a_a равно геометрической сумме переносного ускорения a_e, относительного ускорения a_r и кориолисова ускорения a_c.

Для определения относительного ускорения точки следует мысленно остановить переносное движение и вычислить относительное ускорение по правилам кинематики точки. Для определения переносного ускорения следует мысленно остановить относительное движение точки и вычислить переносное ускорение по правилам кинематики твердого тела как ускорение той точки подвижной системы координат, с которой совпадает в данный момент движущаяся точка.

Кориолисово ускорение вычисляется по формуле

$$a_c = 2\vec{\omega}_e \times v_r, \qquad (2^*)$$

где $\vec{\omega}_e$ – вектор угловой скорости переносного движения, v_r – вектор относительной скорости точки. Кориолисово ускорение равно по модулю

$$a_c = 2\,\omega_e v_r \sin(\widehat{\omega_e, v_r}). \qquad (3^*)$$

Направление кориолисова ускорения определяется по правилу векторного произведения: кориолисово ускорение a_c направлено перпендикулярно к плоскости, в которой лежат $\vec{\omega}_e$ и v_r, в ту сторону, чтобы наблюдатель, стоящий по вектору a_c, видел поворот от вектора $\vec{\omega}_e$ к вектору v_r на наименьший угол против часовой стрелки. Наряду с определением направления ускорения Кориолиса как векторного произведения $\vec{\omega}_e \times v_r$ существует и применяется для нахождения направления этого ускорения *прави-*

ло Н.Е. Жуковского: спроектируем относительную скорость v_r на плоскость, перпендикулярную к угловой скорости $\vec{\omega}_e$, и повернем проекцию в этой плоскости на угол 90° в сторону вращения определяемого $\vec{\omega}_e$ – это и будет направление ускорения Кориолиса.

Если траектории точек подвижной системы координат не прямолинейны и относительное движение точки также является криволинейным, то целесообразно вычислять переносное ускорение как геометрическую сумму нормального и касательного переносных ускорений, относительное ускорение как геометрическую сумму нормального и касательного относительных ускорений. При этом формула (1*) записывается в следующем виде:

$$a_a = a_{en} + a_{e\tau} + a_{rn} + a_{r\tau} + a_c, \qquad (4^*)$$

где a_{en}, a_{rn} – соответственно нормальные ускорения в переносном и относительном движениях, $a_{e\tau}$, $a_{r\tau}$ – соответственно касательные ускорения в переносном и относительном движениях. Если переносное движение является плоским, сферическим (или имеем общий случай движения твердого тела), то для определения переносного ускорения точки следует пользоваться формулами ускорения точки в соответствующем движении.

При пользовании теоремой сложения ускорений может быть применен метод проекций. Выбирая какую-либо систему координат xyz и проектируя равенство (4*) на каждую из этих осей, находим

$$\begin{aligned} a_{ax} &= a_{enx} + a_{e\tau x} + a_{rnx} + a_{r\tau x} + a_{cx}, \\ a_{ay} &= a_{eny} + a_{e\tau y} + a_{rny} + a_{r\tau y} + a_{cy}, \\ a_{az} &= a_{enz} + a_{e\tau z} + a_{rnz} + a_{r\tau z} + a_{cz}. \end{aligned} \qquad (5^*)$$

При этом модуль абсолютного ускорения определяется по формуле

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2}, \qquad (6^*)$$

а направляющие косинусы равны

$$\cos(\widehat{a_a, x}) = \frac{a_{ax}}{a_a}, \quad \cos(\widehat{a_a, y}) = \frac{a_{ay}}{a_a}, \quad \cos(\widehat{a_a, z}) = \frac{a_{az}}{a_a}. \qquad (7^*)$$

Необходимо заметить, что в случае переносного поступательного движения угловая скорость этого движения $\vec{\omega}_e$ равна нулю и согласно формуле (2*) обращается в нуль и кориолисово ускорение. Теорема сложения ускорений при переносном поступательном движении упрощается:

$$a_a = a_e + a_r. \qquad (8^*)$$

Из формул (2*) и (3*) следует, что ускорение Кориолиса обращается также в нуль, если угловая скорость переносного движения параллельна относительной скорости.

Кориолисово ускорение обращается в нуль и в те моменты, когда $\vec{\omega}_e$ или $\mathbf{v}_r$ равны нулю.

Указание. Пользуясь теоремой сложения ускорений, можно решать следующие типы задач:

1. Известно относительное и переносное движения точки. Необходимо определить абсолютное ускорение точки.

2. Известно абсолютное и переносное движения точки. Необходимо определить относительное ускорение точки.

В первом случае, пользуясь уравнениями относительного движения, следует определить по правилам кинематики точки относительную скорость и относительное ускорение точки. Независимо от этого, исходя из уравнений переносного движения, следует найти переносную скорость и переносное ускорение точки. Далее, зная угловую скорость переносного движения и относительную скорость точки, можно вычислить кориолисово ускорение по модулю и направлению.

После этого абсолютное ускорение может быть определено геометрически, как замыкающая сторона многоугольника, построенного на векторах переносного, относительного и кориолисова ускорений. Можно поступить и иначе, используя упомянутый метод проекций. Для этого достаточно спроектировать геометрическое равенство (1*) на три взаимно перпендикулярные оси координат, найдя тем самым проекции абсолютного ускорения на эти оси, согласно формулам (5*), и, далее, определить модуль и направление абсолютного ускорения по формулам (6*) и (7*).

Указание. При решении задач рекомендуется такая последовательность действий. Необходимо:

1) разложить движение на составляющие, определив абсолютное, относительное и переносное движения;

2) выбрать две системы координат: абсолютную и подвижную;

3) мысленно остановив переносное движение, определить скорость и ускорение точки в относительном движении;

4) мысленно остановив относительное движение, найти угловую скорость переносного движения и ускорение точки в переносном движении;

5) по известным угловой скорости переносного движения и скорости точки в относительном движении найти кориолисово ускорение точки;

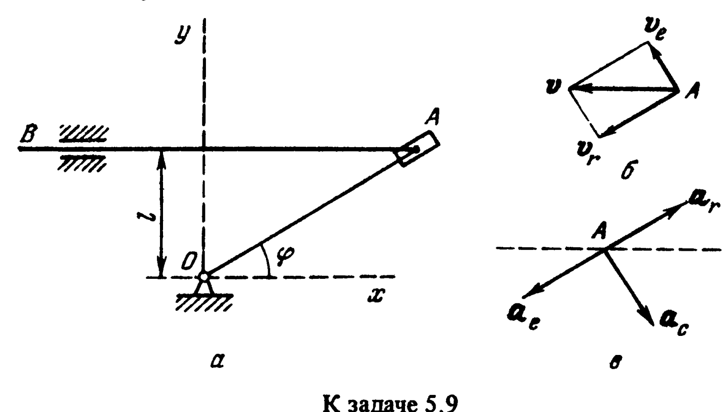
6) пользуясь методом проекций, определить проекции абсолютного ускорения на оси координат;

7) по найденным проекциям абсолютного ускорения найти искомое абсолютное ускорение по модулю и направлению.

Задача 5.9. Для сообщения поступательного движения в станках применяют механизм (рис. *а*), состоящий из прямолинейного стержня, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг точки O так, что угол $\varphi = \omega t$. Дойдя до упора, стержень начинает вращаться с той же угловой скоростью в противоположном направлении. Ползун A вращается вместе

со стержнем и одновременно может перемещаться вдоль стержня. Прямая AB, шарнирно соединенная с ползуном, движется в горизонтальных направляющих, осуществляя возвратно-поступательное движение.

Зная расстояние l от шарнира O до прямой AB, определить ее скорость и ускорение в поступательном движении.



К задаче 5.9

Решение. *Способ 1.* Проведем неподвижные оси координат с началом в шарнире O. Тогда координаты точки A определяются уравнениями

$$x = l\operatorname{ctg}\omega t, \quad y = l.$$

Скорость точки A тогда будет:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\frac{l\omega}{\sin^2\omega t}, \qquad (1)$$

так как точка A движется прямолинейно. Ускорение точки A определится как производная от скорости по времени

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{2l\omega^2\cos\omega t}{\sin^3\omega t}. \qquad (2)$$

Способ 2. Рассмотрим абсолютное движение ползуна A как составное: переносное – вращение вместе со стержнем OA и относительное – прямолинейное движение вдоль стержня OA. Тогда модуль переносной скорости точки A будет:

$$v_e = OA\cdot\omega = \frac{l\omega}{\sin\varphi}.$$

Направлена переносная скорость перпендикулярно к стержню OA, следовательно, она образует со стержнем AB угол $90° - \varphi$. Относительная скорость (в прямолинейном движении по OA) равна производной от OA по времени

и направлена по OA

$$v_r = \frac{d}{dt}\left(\frac{l}{\sin\omega t}\right) = -\frac{l\omega\cos\omega t}{\sin^2\omega t}.$$

Проектируя векторное равенство (рис. *б*)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r,$$

определяющее абсолютную скорость точки A, на направление AB, находим

$$v = -v_e\sin\omega t + v_r\cos\omega t = -l\omega\left(1 + \frac{\cos^2\omega t}{\sin^2\omega t}\right) = -\frac{l\omega}{\sin^2\omega t},$$

что совпадает с (1).

Переходим к определению абсолютного ускорения точки A.

Согласно теореме сложения ускорений

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_c. \qquad (3)$$

Так как $\omega = \text{const}$, то модуль переносного ускорения будет

$$a_e = OA\cdot\omega^2 = \frac{l\omega^2}{\sin\omega t}.$$

Оно направлено от A к центру O (рис. *в*). Значение относительного ускорения в прямолинейном движении равно

$$a_r = \frac{dv_r}{dt} = \frac{l\omega^2(1+\cos^2\omega t)}{\sin^2\omega t}.$$

Оно направлено по прямой OA. Ускорение Кориолиса равно

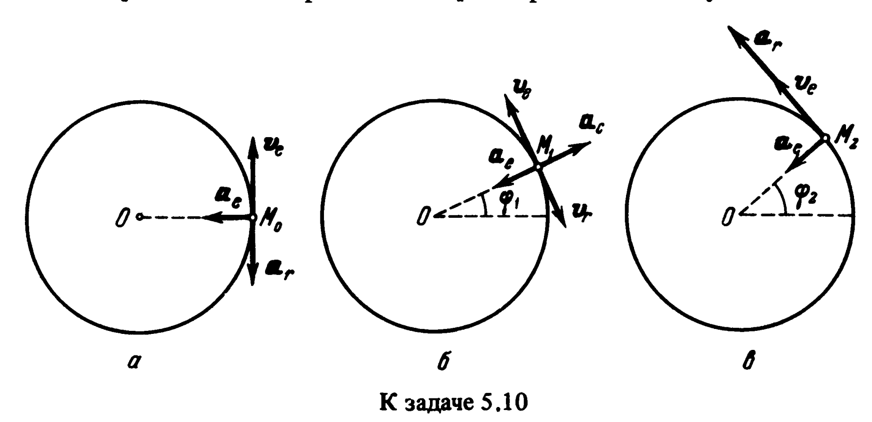
$$a_c = 2\omega v_r\sin 90^\circ = \frac{2\omega^2 l\cos\omega t}{\sin^2\omega t}.$$

Направление ускорения определится поворотом вектора относительной скорости на 90° в сторону переносного вращения, так как в рассматриваемом случае $\mathbf{v}_r$ перпендикулярно к $\vec{\omega}$. Проектируя, далее, векторное равенство (3) на направление абсолютного ускорения, совпадающего с осью x, находим:

$$a = (-a_e + a_r)\cos\omega t + a_c\sin\omega t = \frac{2l\omega^2\cos\omega t}{\sin^3\omega t},$$

что совпадает с (2).

Задача 5.10. Самолет описывает на вираже дугу окружности радиусом $R = 800$ м с постоянной по модулю скоростью 160 м/с. Касательная к траектории самолета при движении совпадает с продольной осью самолета. Поршень двигателя движется в направлении продольной оси согласно уравнению $x_1 = 5\cos 2\pi t$, причем ось x_1 направлена к носу самолета.



К задаче 5.10

Определить относительные, переносные и абсолютные скорости и ускорения поршня в моменты времени

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 0{,}25 \text{ с}, \quad t_2 = 0{,}5 \text{ с}.$$

Примечание. Расстояние от поршня до центра окружности считать неизменным и равным 800 м, пренебрегая малыми изменениями этого расстояния в связи с ходом поршня.

Решение. Движение самолета принимаем за переносное движение. Движение поршня по отношению к самолету рассматриваем как относительное движение. Движение поршня по отношению к Земле, складывающееся из движений по отношению к самолету и вместе с самолетом, является абсолютным движением поршня.

Переносная скорость поршня есть скорость той точки самолета, с которой совпадает в данный момент поршень. Модуль переносной скорости равен $v_e = 160$ м/с.

Модуль угловой скорости переносного движения находится по формуле

$$\omega_e = \frac{v_e}{R} = \frac{160}{800} = 0{,}2 \text{ рад/с}.$$

Переносное ускорение поршня есть ускорение той точки самолета, с которой совпадает в данный момент поршень. Так как в переносном движении самолет движется с постоянной по модулю скоростью, то переносное ускорение является нормальным переносным ускорением, модуль

которого

$$a_e = a_{en} = \frac{v_e^2}{R} = \frac{160^2}{800} = 32 \text{ м/с}^2.$$

Это ускорение направлено к центру окружности, описываемой самолетом.

Определим положение самолета в моменты времени t_0, t_1, t_2. Самолет вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_e = \dot{\varphi}$ вокруг центра O, следовательно, угол поворота прямой, соединяющей центр O с самолетом, равен

$$\varphi = \omega_e t,$$

а для соответствующих моментов времени (угол измеряется в радианах)

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = 0{,}2 \cdot 0{,}25 = 0{,}05, \quad \varphi_2 = 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}1.$$

Откладываем на рис. *а, б, в* значения этих углов, а также переносную скорость и переносное ускорение точки.

Проекция относительной скорости на касательную к траектории самолета определится как производная от относительной координаты по времени, так как относительное движение поршня является прямолинейным:

$$v_{r\tau} = \dot{x}_1 = -10\pi \sin 2\pi t.$$

Проекция относительного ускорения поршня равна второй производной от относительной координаты по времени

$$a_{r\tau} = \ddot{x}_1 = \dot{v}_{r\tau} = -20\pi^2 \cos 2\pi t.$$

Для заданных моментов времени значения относительной скорости и относительного ускорения даются таблицей

	$t_0 = 0$	$t_1 = 0{,}25$	$t_2 = 0{,}5$
$v_{r\tau}$	0	-10π	0
$a_{r\tau}$	$-20\pi^2$	0	$20\pi^2$

Откладываем на рисунках относительную скорость и относительное ускорение. Относительная скорость и относительное ускорение направлены по касательной к траектории. Их положительные направления совпадают с переносной скоростью.

Кориолисово ускорение, равное

$$a_c = 2\vec{\omega}_e \times \mathbf{v}_r,$$

отлично от нуля в момент времени $t_1 = 0{,}25$ и равно нулю при $t_0 = 0$ и

$t_2 = 0{,}5$ с (так как относительная скорость в эти моменты времени обращается в нуль). Модуль кориолисова ускорения в момент $t_1 = 0{,}25$ равен

$$a_c = 2\omega_e v_r \sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \mathbf{v}_r}).$$

Так как вектор угловой скорости $\vec{\omega}_e$ направлен перпендикулярно к плоскости полета (плоскости рисунка) на читателя, а вектор относительной скорости лежит в этой плоскости, то угол между ними прямой и синус этого угла равен единице. Следовательно, модуль кориолисова ускорения

$$a_c = 2\omega_e v_r = 2 \cdot 0{,}2 \cdot 10\pi = 4\pi \text{ м/с}^2.$$

Для определения направления кориолисова ускорения воспользуемся правилом Жуковского. Относительная скорость $\mathbf{v}_r$ уже лежит в плоскости, перпендикулярной к вектору угловой переносной скорости. Поэтому для нахождения направления ускорения Кориолиса достаточно повернуть $\mathbf{v}_r$ в плоскости рисунка на 90° в сторону вращения ω_e.

Откладываем вектор кориолисова ускорения (на рис. *б*) по радиусу от центра. Находим для каждого момента времени абсолютную скорость и абсолютное ускорение поршня по модулю, а также направления этих векторов:

при $t_0 = 0$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e,$$

$$a = \sqrt{a_e^2 + a_r^2} = \sqrt{32^2 + 400\pi^4} \approx 201 \text{ м/с}^2,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_r}{a_e} = \frac{20\pi^2}{32} \approx 6{,}25;$$

при $t_1 = 0{,}25$

$$v = v_e - v_r = 160 - 10\pi \approx 128{,}6 \text{ м/с},$$

$$a = a_e - a_c = 32 - 4\pi \approx 19{,}44 \text{ м/с}^2;$$

при $t_2 = 0{,}5$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e,$$

$$a = \sqrt{a_e^2 + a_r^2} = \sqrt{32^2 + 400\pi^4} \approx 201 \text{ м/с}^2,$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{a_r}{a_e} = \frac{20\pi^2}{32} \approx 6{,}25.$$

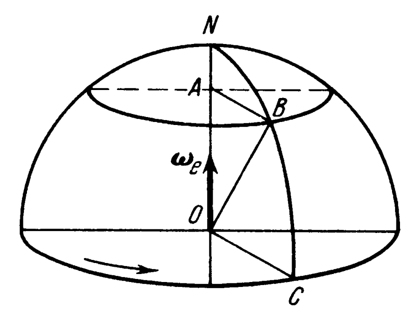
Углы α и α_1 измеряются между направлением абсолютного ускорения и радиусом, соединяющим центр виража O с самолетом M.

Задача 5.11. Корабль плывет вдоль меридиана CBN с юга на север. Его скорость по отношению ко дну равна 36 км/ч.

Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение корабля, учитывая вращение Земли вокруг своей оси. Широта места $\varphi = 60°$. Радиус Земли $R = 64 \cdot 10^5$ м. Вращение вместе с Землей считать переносным движением, движение по отношению к Земле — относительным движением (см. рисунок).

Решить эту же задачу, если корабль плывет вдоль параллели 60° северной широты с запада на восток.

Решение. Корабль, находящийся в точке B, участвует одновременно в двух движениях. В первом движении он вращается вместе с Землей вокруг оси ON, где N — Северный полюс, O — центр Земли; это вращение, происходящее с запада на восток, примем за переносное движение. В переносном движении точка B земной поверхности описывает окружность параллели 60° северной широты с центром в точке A и радиусом AB. Во втором движении корабль движется вдоль меридиана CBN. Это движение примем за относительное движение. В относительном движении корабль описывает дугу окружности CBN радиусом R с центром в точке O.



К задаче 5.11

Абсолютная скорость корабля складывается из переносной и относительной скоростей:

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r .$$

Переносная скорость по модулю равна произведению радиуса вращения AB на угловую скорость Земли, совершающей один оборот за 24 часа:

$$v_e = AB \cdot \omega_e = R \cos 60° \, \omega_e = 64 \cdot 10^5 \cdot 0{,}5 \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \text{ м/с} = 233 \text{ м/с}. \quad (1)$$

Эта скорость направлена по касательной к параллели 60° северной широты с запада на восток. Относительная скорость равна по модулю

$$v_r = 36 \text{ км/ч} = 10 \text{ м/с} \quad (2)$$

и направлена по касательной к меридиану CBN с юга на север.

Переходим к определению составляющих абсолютного ускорения корабля. Согласно теореме сложения ускорений абсолютное ускорение равно

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_c .$$

Переносное движение — равномерное вращение вокруг оси, следовательно, переносное ускорение является переносным нормальным ускоре-

нием, модуль которого

$$a_e = AB \cdot \omega_e^2 = R\cos 60^\circ\,\omega_e^2 = 64\cdot 10^5\cdot 0{,}5\left(\frac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60}\right)^2 = 0{,}017\ \text{м/с}^2.$$

Это ускорение направлено от B к A.

Относительное движение происходит с постоянной по модулю скоростью по дуге окружности радиусом R. Следовательно, относительное ускорение будет нормальным относительным ускорением, значение которого равно

$$a_r = \frac{v_r^2}{R} = \frac{10^2}{64\cdot 10^5}\ \text{м/с}^2 = 1{,}56\cdot 10^{-5}\ \text{м/с}^2.$$

Это ускорение направлено от точки B к точке O.

Кориолисово ускорение определяется по формуле

$$\mathbf{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \mathbf{v}_r.$$

Модуль кориолисова ускорения будет

$$a_c = 2\omega_e v_r \sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \mathbf{v}_r}) = 2\frac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60}\,10\sin 60^\circ = 1{,}26\cdot 10^{-3}\ \text{м/с}^2.$$

При вычислении угла $\widehat{\vec{\omega}_e, \mathbf{v}_r}$ мы учли, что угловая скорость Земли направлена по оси вращения к Северному полюсу и, следовательно, составляет угол в 60° с $\mathbf{v}_r$. Кориолисово ускорение направлено по касательной к параллели 60° северной широты с востока на запад.

Рассмотрим, далее, случай, когда корабль плывет вдоль параллели 60° северной широты с запада на восток. Полагая по-прежнему вращение Земли переносным движением, а перемещение корабля по отношению к Земле относительным движением, замечаем, что модули переносной и относительной скоростей соответствуют ранее вычисленным (1) и (2). Только в отличие от предыдущего случая относительная скорость на этот раз направлена по касательной к параллели 60° северной широты, т.е. совпадает по направлению с переносной скоростью.

Переносное ускорение по модулю и направлению совпадает с найденным в предыдущем случае.

Относительное движение на этот раз происходит по дуге окружности радиусом $R\cos 60^\circ = AB$. Следовательно, относительное ускорение будет нормальным и равно по модулю

$$a_r = \frac{v_r^2}{R\cos 60^\circ} = 3{,}12\cdot 10^{-5}\ \text{м/с}^2.$$

Оно направлено от B к A, т.е. совпадает по направлению с переносным ускорением.

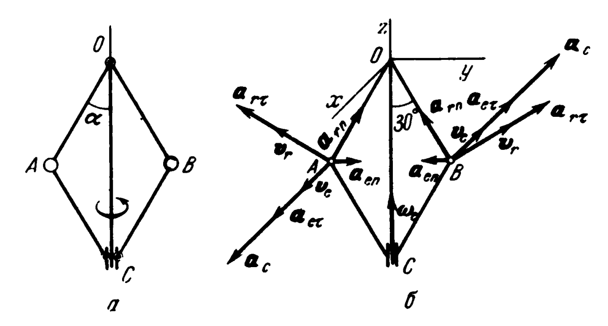
Ускорение Кориолиса равно

$$a_c = 2\vec{\omega}_e \times \mathbf{v}_r.$$

Модуль его

$$a_c = 2\omega_e v_r \sin 90° = 1{,}46 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2,$$

так как $\vec{\omega}_e$ и $\mathbf{v}_r$ взаимно перпендикулярны. Кориолисово ускорение на этот раз направлено от точки B к A; таким образом, все три составляющие абсолютного ускорения $\mathbf{a}_e$, $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_c$ направлены в этом случае по одной прямой.



К задаче 5.12

Задача 5.12. В переходном режиме при пуске в ход главного судового двигателя шары центробежного регулятора Уатта (рис. *а*) расходятся так, что угол α изменяется согласно уравнению

$$\alpha = \omega_{01} t + \frac{\epsilon_1 t^2}{2}, \tag{1}$$

где

$$\omega_{01} = \frac{\pi}{90} \text{ рад/с}, \quad \epsilon_1 = \frac{\pi}{900} \text{ рад/с}^2.$$

Угол поворота регулятора вокруг вертикальной оси является заданной функцией времени:

$$\varphi = kt^3, \tag{2}$$

где постоянный коэффициент $k = 0{,}3$ рад/с^3. Длина стержней $OA = OB = AC = BC = l = 90$ см.

Определить в момент $t_1 = 10$ с абсолютную скорость и абсолютное ускорение шаров регулятора, рассматриваемых как точки.

Р е ш е н и е. Абсолютное движение шаров раскладываем на два движения: переносное движение — вращение вокруг вертикальной оси, проис-

ходящее согласно уравнению (2), и относительное движение – вращение вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O и перпендикулярной плоскости $OABC$, происходящее по закону (1).

Систему координат xyz выбираем с началом в точке O: ось x направляем перпендикулярно плоскости $OABC$ (в момент $t_1 = 10$ с) на читателя, ось y – в плоскости $OABC$ по горизонтали вправо, ось z – по вертикальной оси вращения вверх.

Находим, пользуясь уравнением (1), значение угла α в момент $t_1 = 10$ с

$$\alpha = \frac{\pi}{90} \cdot 10 + \frac{\pi}{900} \cdot \frac{100}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Далее, определяем проекцию относительной угловой скорости на ось x, т.е. на ось, вокруг которой происходит относительное вращение. Эта проекция равна производной от угла α по времени

$$\omega_{rx} = \dot{\alpha} = \omega_{01} + \epsilon_1 t.$$

В момент $t_1 = 10$ с проекция относительной угловой скорости

$$\omega_{rx} = \frac{\pi}{45} \text{ рад/с}.$$

Проекция относительного углового ускорения на ту же ось x равна производной от ω_{rx} по времени

$$\epsilon_{rx} = \dot{\omega}_{rx} = \ddot{\alpha} = \epsilon_1 = \frac{\pi}{900} \text{ рад/с}^2.$$

Для того чтобы найти относительную скорость и относительное ускорение шаров, остановим мысленно переносное движение. Модуль относительной скорости шаров

$$v_r = l\omega_{rx} = 90\frac{\pi}{45} = 2\pi \text{ см/с} = 0{,}02\pi \text{ м/с}.$$

Относительная скорость направлена соответственно перпендикулярно стержням OA и OB (рис. *б*).

Переходим к определению относительного ускорения шаров. Так как относительное движение есть вращение вокруг оси, то целесообразно вычислить отдельно относительное нормальное и относительное касательное ускорения. Первое из них равно по модулю

$$a_{rn} = l\omega_r^2 = 90\frac{\pi^2}{45^2} = \frac{2\pi^2}{45} \text{ см/с}^2 \approx 0{,}0044 \text{ м/с}^2$$

и направлено от шара к точке O. Значение относительного касательного ускорения определится по формуле

$$a_{r\tau} = l\epsilon_r = 90 \frac{\pi}{900} = \frac{\pi}{10} \text{ см/с}^2 = \pi \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2.$$

Это ускорение совпадает по направлению с относительной скоростью каждого шара (рис. *б*).

Переходим к определению переносной скорости и переносного ускорения шаров. Переносное движение – вращение регулятора вокруг вертикальной оси согласно уравнению (2). Чтобы вычислить скорость и ускорение шаров в переносном движении, остановим мысленно относительное движение. Проекция угловой скорости переносного движения на ось вращения равна производной от угла φ по времени

$$\omega_{ez} = \dot{\varphi} = 3kt^2.$$

При $t_1 = 10$ с эта проекция равна

$$\omega_{ez} = 3 \cdot 0{,}3 \cdot 10^2 = 90 \text{ рад/с}.$$

Проекция углового ускорения в переносном движении на ось вращения определяется как производная от ω_{ez} по времени

$$\epsilon_{ez} = \dot{\omega}_{ez} = \ddot{\varphi} = 6kt.$$

В момент $t_1 = 10$ с

$$\epsilon_{ez} = 6 \cdot 0{,}3 \cdot 10 = 18 \text{ рад/с}^2.$$

Переносная скорость есть скорость шара при вращении регулятора вокруг вертикальной оси OC. Она равна по модулю произведению радиуса вращения на переносную угловую скорость. В момент $t_1 = 10$ с

$$v_e = l \sin\alpha \cdot \omega_e = 40{,}5 \text{ м/с}.$$

Переносная скорость шаров направлена параллельно оси x; для шара A она совпадает с положительным направлением, для шара B – с отрицательным направлением оси (при $t = t_1$).

Переносное ускорение складывается из нормального и касательного ускорений. При $t = 10$ с модуль нормального переносного ускорения

$$a_{en} = l\sin\alpha \cdot \omega_e^2 = 90\sin 30° \cdot 90^2 \text{ см/с}^2 = 3645 \text{ м/с}^2.$$

Это ускорение направлено перпендикулярно к оси вращения OC.

Модуль переносного касательного ускорения равен произведению радиуса вращения на значение углового ускорения

$$a_{e\tau} = l \sin\alpha \cdot \epsilon_e = 90 \sin 30° \cdot 18 \text{ см/с}^2 = 8{,}1 \text{ м/с}^2.$$

Оно направлено параллельно оси x и совпадает с направлением переносной скорости каждого шара (рис. *б*).

Переходим к определению кориолисова ускорения:

$$a_c = 2\vec{\omega}_e \times \mathbf{v}_r.$$

Модуль кориолисова ускорения будет

$$a_c = 2\omega_e v_r \sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \mathbf{v}_r}).$$

Замечая, что угол между $\vec{\omega}_e$ и $\mathbf{v}_r$ равен 60°, находим значение a_c в момент $t_1 = 10$ с:

$$a_c = 2 \cdot 90 \cdot 2\pi \sin 60° \text{ см/с} = 1{,}8\sqrt{3}\pi \text{ м/с}^2.$$

Направление кориолисова ускорения определяется по правилу векторного произведения. Кориолисово ускорение направлено перпендикулярно к плоскости, определенной векторами $\vec{\omega}_e$ и $\mathbf{v}_r$, в ту сторону, с которой поворот от вектора $\vec{\omega}_e$ к $\mathbf{v}_r$ на наименьший угол виден против часовой стрелки. В нашем случае ускорение Кориолиса направлено по переносной скорости (рис. *б*).

Найдем теперь абсолютную скорость и абсолютное ускорение шара, пользуясь методом проекций. Проекции абсолютной скорости на оси находим, проектируя на них векторное равенство

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r.$$

Имеем для шара A

$$v_{ax} = v_e = 40{,}5 \text{ м/с},$$

$$v_{ay} = -v_r \cos 30° = -0{,}01\sqrt{3}\pi \text{ м/с},$$

$$v_{az} = v_r \cos 60° = 0{,}01\,\pi \text{ м/с}.$$

Модуль абсолютной скорости равен

$$v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2 + v_{az}^2} \approx 40{,}5 \text{ м/с},$$

а ее направление определяется значениями направляющих косинусов:

$$\cos(\widehat{\mathbf{v}_a, x}) = \frac{v_{ax}}{v_a} = 0{,}999,$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{v}_a, y}) = \frac{v_{ay}}{v_a} = -0{,}00134,$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{v}_a, z}) = \frac{v_{az}}{v_a} = 0{,}000775.$$

Согласно теореме сложения ускорений абсолютное ускорение

$$a_a = a_{en} + a_{e\tau} + a_{rn} + a_{r\tau} + a_c.$$

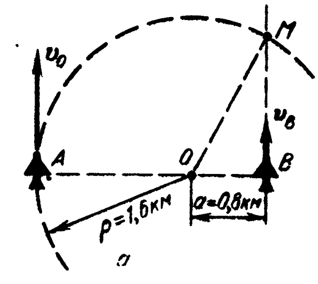
Проектируя это векторное равенство на оси координат, находим проекции абсолютного ускорения шара A:

$$a_{ax} = a_{e\tau} + a_c \approx 17{,}9 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{ay} = a_{en} + a_{rn} \sin 30° - a_{r\tau} \cos 30° \approx 3645 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{az} = a_{rn} \cos 30° + a_{r\tau} \sin 30° \approx 0{,}0055 \text{ м/с}^2.$$

Модуль и направление абсолютного ускорения определяются по обычным формулам:



$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} \approx 3646 \text{ м/с}^2,$$

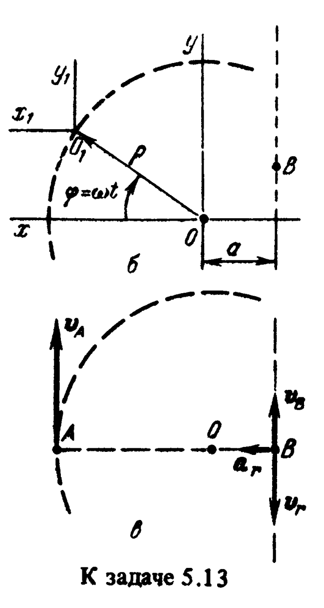
$$\cos(\widehat{a_a, x}) = \frac{a_{ax}}{a_a} \approx 0{,}005,$$

$$\cos(\widehat{a_a, y}) = \frac{a_{ay}}{a_a} \approx 0{,}999,$$

$$\cos(\widehat{a_a, z}) = \frac{a_{az}}{a_a} \approx 1{,}37 \cdot 10^{-6}.$$

Задача 5.13. Самолет A движется с постоянной скоростью, равной v_A = 773,7 км/ч по дуге окружности радиусом ρ = 1,6 км, пилот видит справа по курсу на расстоянии 2,4 км другой самолет B, движущийся прямолинейно с абсолютной скростью v_B = 320 км/ч. На рис. *а* показано начальное положение самолетов.

Определить: а) столкнутся ли самолеты, если пилоты не изменят курсы; б) скорость и ускорение самолета B по отношению к самолету A как в произвольный момент времени, так и в первоначальном положении самолетов.



К задаче 5.13

Р е ш е н и е. Траектории самолетов пересекаются в точке M. Поскольку угол OMB (см. рис. *а*) равен 30°, то угол AOM равен 120° или $2\pi/3$ радиан. Пути, которые предстоит пройти самолетам до точки M, равны соответственно

$$s_A = \frac{2\pi}{3} \cdot 1{,}6 = 3{,}349 \text{ км},$$

$$s_B = MB = \sqrt{OM^2 - OB^2} = \sqrt{1{,}6^2 - 0{,}8^2} = 1{,}386 \text{ км}.$$

Определим время, по истечении которого самолеты окажутся в точке пересечения их траекторий:

$$t_A = \frac{s_A}{v_A} = \frac{3,349}{773,7} = 0,00433 \text{ ч},$$

$$t_B = \frac{s_B}{v_B} = \frac{1,386}{320} = 0,00433 \text{ ч}.$$

Самолеты столкнутся.

Проведем неподвижную систему координат Oxy и систему координат $O_1x_1y_1$, движущуюся поступательно вместе с самолетом A.

Тогда абсолютное движение самолета B можно рассматривать как сложное движение, складывающееся из переносного движения вместе с системой координат $O_1x_1y_1$ и относительного движения по отношению к самолету A, т.е. по отношению к системе координат $O_1x_1y_1$ (рис. *б*).

Уравнения абсолютного движения самолета B запишутся в виде

$$x = -a, \quad y = v_B t. \tag{1}$$

Абсолютное движение самолета – это движение по отношению к системе координат Oxy, жестко связанной с Землей. Переносное движение поступательное. В этом случае уравнения абсолютного движения самолета B будут

$$x = x_{O_1} + x_1, \quad y = y_{O_1} + y_1. \tag{2}$$

По условию задачи точка O_1 (самолет A) движется согласно следующим уравнениям:

$$x_{O_1} = \rho \cos\varphi = \rho \cos\omega t, \qquad y_{O_1} = \rho \sin\varphi = \rho \sin\omega t. \tag{3}$$

Теперь из системы (2), подставляя в нее значения (1) и (3), найдем уравнения относительного движения точки:

$$x_1 = x - x_{O_1} = -a - \rho\cos\omega t, \quad y_1 = y - y_{O_1} = v_B t - \rho \sin\omega t. \tag{4}$$

Проекции относительной скорости точки B на координатные оси равны первым производным от относительных координат по времени:

$$\dot{x}_1 = \frac{d}{dt}(-a - \rho\cos\omega t) = \omega\rho\sin\omega t, \qquad \dot{y}_1 = \frac{d}{dt}(v_B t - \rho\sin\omega t) = v_B - \omega\rho\cos\omega t. \tag{5}$$

В принятой системе координат в рассматриваемый момент времени $\varphi =$

$= \omega t = 0$, тогда система (5) запишется в виде

$$\dot{x}_1 = 0, \quad \dot{y}_1 = v_B - \omega\rho.$$

Но $\omega\rho = v_A$, тогда

$$v_r = v_B - v_A = 320 - 773{,}7 = -453{,}7 \text{ км/ч}.$$

Относительная скорость антипараллельна переносной скорости v_A (см. рис. *в*).

Определим проекции относительного ускорения на оси O_1x_1, O_1y_1 как вторые производные от относительных координат по времени:

$$\ddot{x}_1 = \omega^2 \rho \cos \omega t, \quad \ddot{y}_1 = \omega^2 \rho \sin \omega t.$$

В рассматриваемом положении $\varphi = \omega t = 0$, следовательно,

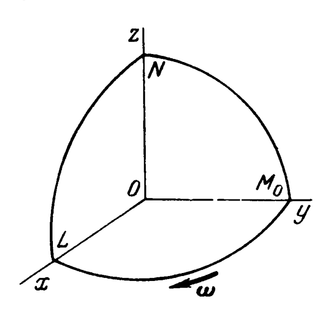
$$\ddot{x}_1 = \omega^2 \rho, \quad \ddot{y}_1 = 0.$$

Тогда

$$a_r = \omega^2 \rho = \frac{v_A^2}{\rho} = \frac{773{,}7^2}{1{,}6} = 28{,}87 \text{ м/с}^2.$$

Итак, относительное ускорение направлено от самолета B к самолету A (см. рис. *в*).

Задача 5.14. Из начала O неподвижной прямоугольной системы координат описана сфера радиусом r. Точка, начиная движение из точки M_0,



К задаче 5.14

движется по дуге большого круга M_0N так, что радиус-вектор точки вращается от положения OM_0 к положению ON с постоянной угловой скоростью ω. Одновременно сечение сферы ONM_0 вращается с той же постоянной угловой скоростью ω вокруг оси z в заданном на рисунке направлении. Определить уравнения абсолютного движения точки, ее скорость и ускорение, а также касательное и нормальное ускорения, радиус кривизны траектории, проекции траектории точки на три координатные плоскости (см. рис.).

Решение. Обозначим буквой M положение движущейся точки в произвольный момент времени t. При этом угол, образованный радиусом-вектором OM с плоскостью xy, будет равен ωt. Двугранный угол, образованный сечением ONM_0 с координатной плоскостью yOz, будет также равен ωt.

Находим абсолютные координаты точки M, проектируя радиус-вектор сначала на плоскость xy и далее на координатные оси:

$$x = r\cos\omega t\,\sin\omega t = (r/2)\sin 2\omega t,$$

$$y = r\cos\omega t\cos\omega t = r\cos^2\omega t = (r/2)(1+\cos 2\omega t), \qquad (1)$$

$$z = r\sin\omega t.$$

Скорость. Проекции абсолютной скорости на неподвижные оси равны первым производным от соответствующей координаты по времени:

$$v_x = \dot x = r\omega\cos 2\omega t,\quad v_y = \dot y = -r\omega\sin 2\omega t,\quad v_z = \dot z = r\omega\cos\omega t. \qquad (2)$$

Тогда скорость точки

$$\mathbf{v} = r\omega(\cos 2\omega t\cdot \boldsymbol{i} - \sin 2\omega t\cdot \boldsymbol{j} + \cos\omega t\cdot \boldsymbol{k}). \qquad (3)$$

Модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = r\omega\sqrt{\cos^2\omega t + 1}. \qquad (4)$$

Заметим, что для нахождения скорости можно применить теорему сложения скоростей. Действительно, примем движение точки по дуге большого круга M_0N за относительное движение, а вращение сечения ONM_0 вокруг оси z за переносное движение. Относительную скорость найдем, остановив мысленно переносное движение:

$$v_r = r\omega. \qquad (5)$$

Она направлена по касательной к дуге большого круга и лежит, следовательно, в плоскости ONM_0.

Переносную скорость найдем, остановив мысленно относительное движение. В переносном движении точка описывает окружность радиусом $r\cos\omega t$ в плоскости, параллельной xOy. Переносная скорость

$$v_e = r\cos\omega t\cdot\omega. \qquad (6)$$

Переносная скорость направлена перпендикулярно сечению ONM_0. Следовательно, относительная и переносная скорости взаимно перпендикулярны. Модуль скорости

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = r\omega\sqrt{1+\cos^2\omega t}, \qquad (7)$$

что совпадает с (4).

Ускорение. Способ 1. Находим проекции абсолютного ускорения точки на неподвижные декартовы оси координат как вторые производные

от координат по времени:

$$a_x = \ddot{x} = -2r\omega^2 \sin 2\omega t,$$
$$a_y = \ddot{y} = -2r\omega^2 \cos 2\omega t, \quad (8)$$
$$a_z = \ddot{z} = -r\omega^2 \sin \omega t.$$

Тогда ускорение точки

$$\boldsymbol{a} = -r\omega^2 (2\sin 2\omega t \cdot \boldsymbol{i} + 2\cos 2\omega t \cdot \boldsymbol{j} + \sin \omega t \cdot \boldsymbol{k}). \quad (9)$$

Модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = r\omega^2 \sqrt{4 + \sin^2 \omega t}. \quad (10)$$

Находим, далее, касательное ускорение как производную по времени от модуля скорости (4):

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = -\frac{r\omega^2 \sin \omega t \cos \omega t}{\sqrt{1 + \cos^2 \omega t}}. \quad (11)$$

Нормальное ускорение находится по формуле

$$a_n^2 = a^2 - a_\tau^2 = r^2 \omega^4 \frac{5 + 3\cos^2 \omega t}{1 + \cos^2 \omega t}. \quad (12)$$

Радиус кривизны траектории

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{r(1 + \cos^2 \omega t)^{3/2}}{\sqrt{5 + 3\cos^2 \omega t}}. \quad (13)$$

Способ 2. Ускорение точки можно определить, пользуясь теоремой Кориолиса

$$a = a_e + a_r + a_c. \quad (14)$$

Относительное ускорение точки находим, остановив мысленно переносное движение:

$$a_r = r\omega^2, \quad (15)$$

оно направлено по радиусу-вектору *OM* к началу координат.

Переносное ускорение точки получаем, остановив мысленно относительное движение:

$$a_e = r \cos \omega t \cdot \omega^2, \quad (16)$$

и направлено оно по перпендикуляру, восставленному из точки к оси z.

Ускорение Кориолиса определяется формулой

$$a_c = 2\vec{\omega} \times \mathbf{v}_r,$$

его модуль

$$a_c = 2\omega^2 r \sin\omega t. \tag{17}$$

Направлено оно согласно правилу Жуковского перпендикулярно к сечению OMM_0 так, что проектируется на ось x в отрицательную сторону и на ось y в положительную сторону оси.

Проектируя (14) на декартовы оси координат, находим

$$\begin{aligned} a_x &= -r\omega^2\cos\omega t\sin\omega t - r\omega^2\cos\omega t\sin\omega t - \\ &- 2r\omega^2\cos\omega t\sin\omega t = -2r\omega^2\sin 2\omega t, \\ a_y &= -r\omega^2\cos^2\omega t - r\omega^2\cos^2\omega t + 2r\omega^2\sin^2\omega t = -2r\omega^2\cos 2\omega t, \\ a_z &= -r\omega^2\sin\omega t, \end{aligned} \tag{18}$$

что совпадает с формулами (8).

Проекции траектории на координатные плоскости. Проекция точки M на плоскость xy движется согласно уравнениям (1)

$$x = \frac{r}{2}\sin 2\omega t, \quad y = \frac{r}{2} + \frac{r}{2}\cos 2\omega t.$$

Исключая из этих уравнений время, находим уравнение траектории проекции точки в явном виде:

$$x^2 + \left(y - \frac{r}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{4}. \tag{19}$$

Это – уравнение окружности.

Проекция точки M на плоскость xz движется согласно уравнениям (1)

$$x = \frac{r}{2}\sin 2\omega t, \quad z = r\sin\omega t. \tag{20}$$

Исключая из этой системы время, находим уравнение траектории:

$$x^2 = z^2 - \frac{z^4}{r^2}. \tag{21}$$

Проекция точки M на плоскость yz движется согласно уравнениям (1)

$$y = \frac{r}{2} + \frac{r}{2}\cos 2\omega t = r\cos^2\omega t, \quad z = r\sin\omega t. \tag{22}$$

Исключая из этих уравнений время, находим уравнение траектории в явном виде:

$$\frac{y}{r} + \frac{z^2}{r^2} = 1. \tag{23}$$

Это – уравнение параболы.

2. Скорость и ускорение точки в полярных, цилиндрических и сферических координатах. Многие задачи кинематики сложного движения точки целесообразно решать в полярных, цилиндрических и сферических координатах. Одним из способов решения задач в криволинейных координатах является разложение абсолютного движения точки на переносное и относительное движения.

Указание. При решении задач в этом параграфе рекомендуется такая последовательность действий.

Заданы относительное и переносное движения, требуется определить абсолютное движение:

1) выбрать подвижную и неподвижную системы координат;

2) составить уравнения относительного движения точки;

3) составить уравнения переносного движения;

4) получить уравнения абсолютного движения и найти абсолютную траекторию точки;

5) определить скорость точки в относительном движении и ее переносную скорость;

6) пользуясь теоремой сложения скоростей и теоремой Кориолиса, найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки.

Задача 5.15. Определить проекции скорости точки M на оси полярной системы координат (см. рис.).

Решение. Рассмотрим движение точки M по плоской траектории AB как составное, сложное движение. Относительным движением назовем прямолинейное движение точки M вдоль радиуса-вектора ρ. Переносным движением тогда будет движение точки M вместе с радиусом-вектором вокруг точки O. Находим проекцию относительной скорости точки M на направление радиуса-вектора как производную от радиуса-вектора по времени. Ее называют радиальной скоростью и обозначают буквой v_ρ:

К задаче 5.15

$$v_\rho = \dot{\rho}\,.$$

Переносная скорость – это скорость точки M, жестко связанной с радиусом-вектором. Эта скорость, перпендикулярная к радиусу-вектору, называется трансверсальной скоростью и равна по величине

$$v_\varphi = \rho\dot{\varphi}\,.$$

Абсолютная скорость точки M определится как геометрическая сумма относительной и переносной скоростей. Так как эти скорости взаимно

перпендикулярны, то модуль абсолютной скорости равен

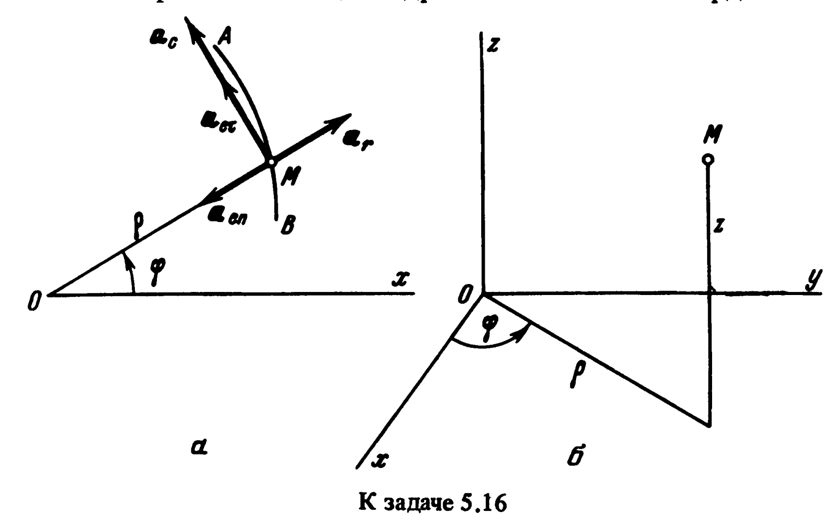
$$v=\sqrt{v_\rho^2+v_\varphi^2}=\sqrt{\dot\rho^2+\rho^2\dot\varphi^2}.$$

Вектор скорости равен

$$\mathbf{v}=\dot\rho\,\boldsymbol{e}_1+\rho\dot\varphi\,\boldsymbol{e}_2,$$

где $\boldsymbol{e}_1$ — орт радиальной оси, $\boldsymbol{e}_2$ — орт трансверсальной оси.

Задача 5.16. Определить проекции ускорения точки M на оси полярной системы координат и оси цилиндрической системы координат.



К задаче 5.16

Решение. а) *Полярная система координат.* Рассматривая, как и в предыдущем случае, движение точки как составное, применим для определения ускорения точки теорему Кориолиса

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_e+\boldsymbol{a}_c.$$

Проекция относительного ускорения на направление радиуса-вектора равна

$$a_r=\ddot\rho,$$

так как относительное движение прямолинейное. Это ускорение направлено по радиусу-вектору.

Переносное ускорение складывается из двух составляющих: переносного касательного ускорения

$$a_{e\tau}=\rho\ddot\varphi$$

и переносного нормального ускорения

$$a_{en}=\rho\dot\varphi^2;$$

$a_{e\tau}$ направлено перпендикулярно к радиусу-вектору, а a_{en} направлено от точки M к центру вращения O (рис. *а*). Модуль кориолисова ускорения

$$a_c = 2\dot{\varphi}\, v_\rho = 2\dot{\varphi}\,\dot{\rho}$$

(так как вектор $\vec{\omega} \perp \mathbf{v}_r$), а направление кориолисова ускорения

$$\mathbf{a}_c = 2\vec{\omega} \times \mathbf{v}_r$$

совпадает с переносным касательным ускорением.

Далее, находим проекции ускорения точки на оси полярных координат. Проекция ускорения на радиальное направление

$$a_\rho = a_r - a_{en} = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2.$$

Проекция ускорения на трансверсальное направление

$$a_\varphi = a_{e\tau} + a_c = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}).$$

Таковы проекции ускорения точки на оси полярных координат.

Вектор ускорения равен

$$\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_1 + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\,\dot{\varphi})\mathbf{e}_2,$$

где $\mathbf{e}_1$ — орт радиальной оси, $\mathbf{e}_2$ — орт трансверсальной оси.

б) *Цилиндрическая система координат.* При пространственных движениях точки иногда удобно использовать цилиндрические координаты. В этой системе координат положение точки M определяется двумя полярными координатами ρ и φ и аппликатой z (рис. *б*). В этом случае проекция скорости точки находится по формулам:

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}.$$

Модуль скорости

$$v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}.$$

Вектор скорости равен

$$\mathbf{v} = \dot{\rho}\,\mathbf{e}_1 + \rho\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_2 + \dot{z}\,\mathbf{e}_3.$$

Здесь $\mathbf{e}_3$ — орт оси z.

Направление скорости дается значениями направляющих косинусов

$$\cos(\widehat{\mathbf{v},\rho}) = \frac{\dot{\rho}}{v}, \quad \cos(\widehat{\mathbf{v},\varphi}) = \frac{\rho\dot{\varphi}}{v}, \quad \cos(\widehat{\mathbf{v},z}) = \frac{\dot{z}}{v}.$$

Проекции ускорения на цилиндрические оси запишутся так:

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}, \quad a_z = \ddot{z}.$$

Модуль ускорения

$$a=\sqrt{a_\rho^2+a_\varphi^2+a_z^2},$$

а направляющие косинусы вычисляются по формулам:

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\rho})=\frac{\ddot\rho-\rho\dot\varphi^2}{a},\quad \cos(\widehat{\boldsymbol{a},\varphi})=\frac{\rho\ddot\varphi+2\dot\rho\dot\varphi}{a},\quad \cos(\widehat{\boldsymbol{a},z})=\frac{\ddot z}{a}.$$

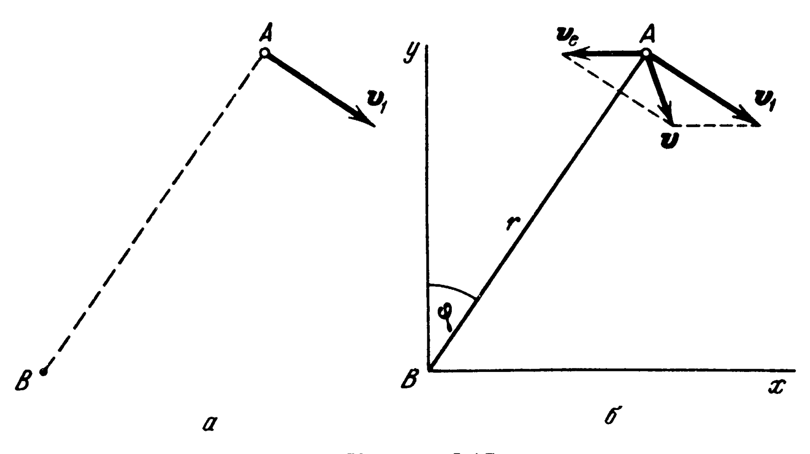
Заметим, что проекции ускорения на оси цилиндрической системы могут быть представлены через проекции скорости на те же оси по формулам

$$a_\rho=\dot v_\rho-\frac{v_\varphi^2}{\rho},\qquad a_\varphi=\dot v_\varphi+\frac{v_\rho v_\varphi}{\rho},\qquad a_z=\dot v_z.$$

Вектор ускорения равен

$$\boldsymbol{a}=(\ddot\rho-\rho\dot\varphi^2)\boldsymbol{e}_1+(\rho\ddot\varphi+2\dot\rho\dot\varphi)\boldsymbol{e}_2+\ddot z\,\boldsymbol{e}_3.$$

Задача 5.17. Скорость $\mathbf{v}_1$ корабля A относительно воды постоянна по модулю и всегда направлена по перпендикуляру к линии визирования на неподвижную точку B (рис. *а*).



К задаче 5.17

Какую кривую (относительно неподвижного берега) опишет корабль, если это движение происходит при течении воды с постоянной по модулю и направлению скоростью $\mathbf{v}_e$? В начальный момент времени $\varphi=0$ и $r=r_0$ (рис. *б*). Корабль рассматривать как точку.

Решение. Течение воды является переносным движением. Циркуляция корабля со скоростью $\mathbf{v}_1$ будет относительным движением. Абсолютная скорость корабля определится как геометрическая сумма переносной

и относительной скоростей

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_1.$$

Выберем декартовы оси координат: ось Bx параллельна скорости течения, ось By перпендикулярна к скорости течения. Полярные координаты корабля будут определяться радиусом-вектором $BA = r$ и углом $yBA = \varphi$. Проектируя абсолютную скорость точки на направление радиуса-вектора и на перпендикуляр к нему, имеем

$$\dot{r} = -v_e \sin\varphi, \tag{1}$$

$$r\dot{\varphi} = v_1 - v_e \cos\varphi. \tag{2}$$

Разделив уравнение (1) на уравнение (2), получим

$$\frac{dr}{r} = -\frac{v_e \sin\varphi}{v_1 - v_e \cos\varphi}\, d\varphi.$$

Проинтегрировав это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, найдем

$$\ln(Cr) = -\ln(\cos\varphi - v_1/v_e),$$

или

$$Cr = \frac{1}{\cos\varphi - v_1/v_e}. \tag{3}$$

Определим из (3) произвольную постоянную C, подставив начальные данные $\varphi = 0$, $r = r_0$; в результате имеем

$$C = \frac{1}{r_0}\,\frac{v_e}{v_e - v_1}.$$

Внося это значение произвольной постоянной в (3), получим уравнение абсолютной траектории корабля

$$r = r_0 \frac{1 - v_e/v_1}{1 - (v_e/v_1)\cos\varphi}.$$

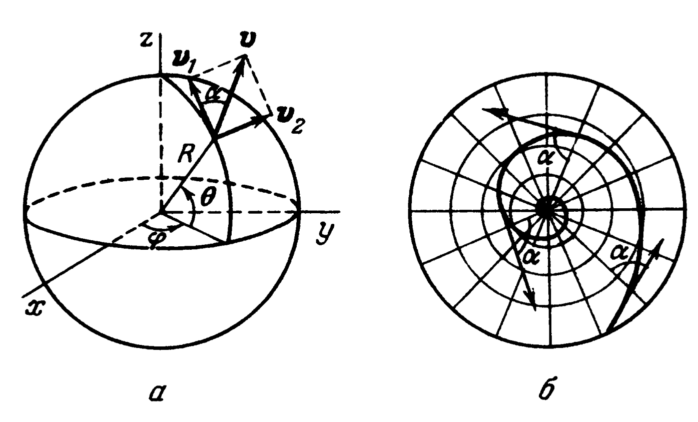
Это — полярное уравнение кривых второго порядка; эксцентриситет кривой $e = v_e/v_1$ равен коэффициенту при $\cos\varphi$.

Если $v_e/v_1 < 1$, то найденная траектория — эллипс с фокусом в точке B. Параметр эллипса $p = r_0(1 - v_e/v_1)$, с другой стороны, параметр эллипса определяется через эксцентриситет и большую полуось a формулой $p = a(1 - e^2)$. Приравнивая эти два значения параметра, находим длину большой полуоси, перпендикулярной к скорости течения,

$$a = \frac{r_0}{1 + v_e/v_1}.$$

При $v_e/v_1 > 1$ траектория – гипербола.

В силу принятых в задаче начальных условий ($\varphi = 0$) случай $v_e = v_1$ приводит к равенству нулю абсолютной скорости корабля в начальный момент. Следовательно, корабль останется в этом случае неподвижным, если ускорение корабля в начальном положении равно нулю. Однако можно показать, что при наличии других начальных данных случай $v_e/v_1 = 1$ соответствует параболической траектории движения корабля.



К задаче 5.18

Задача 5.18. Точка движется по поверхности Земли со скоростью **v**. Угол между скоростью и меридианом в каждой точке траектории постоянен и равен α. Определить траекторию точки.

Решение. Декартовы координаты точки, движущейся по сфере радиусом R, могут быть выражены через сферические координаты по формулам (рис. *а*)

$$x = R\cos\theta\cos\varphi,$$

$$y = R\cos\theta\sin\varphi,$$

$$z = R\sin\theta,$$

где θ – широта, φ – долгота местоположения точки на сфере. Найдем выражение скорости при постоянном радиусе R. Производные от декартовых координат по времени равны

$$\dot{x} = R(-\sin\theta\cos\varphi\cdot\dot{\theta} - \sin\varphi\cos\theta\cdot\dot{\varphi}),$$

$$\dot{y} = R(-\sin\theta\sin\varphi\cdot\dot{\theta} + \cos\varphi\cos\theta\cdot\dot{\varphi}),$$

$$\dot{z} = R\cos\theta\cdot\dot{\theta}.$$

Отсюда определяется модуль скорости

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = R\sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\cos^2\theta}.$$

Скорость v можно разложить на две составляющие:

$$v_1 = R\dot{\theta},$$

направленную по касательной к меридиану, и

$$v_2 = R\cos\theta \cdot \dot{\varphi},$$

направленную по касательной к параллели.

В общем случае движения точки по сфере модуль скорости будет $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

По условию задачи угол α, образованный скоростью с меридианом, постоянен. Этот угол связан с составляющими скорости точки соотношением

$$\frac{v_1}{v_2} = \operatorname{ctg}\alpha$$

или, после подстановки значений v_1 и v_2,

$$\frac{R\dot{\theta}}{R\cos\theta \cdot \dot{\varphi}} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Разделяя переменные, имеем

$$\frac{d\theta}{\cos\theta} = d\varphi \operatorname{ctg}\alpha.$$

Это – дифференциальное уравнение искомой траектории. Предположив, что точка начала движение из положения $\varphi_0 = 0$, $\theta_0 = 0$, интегрируя, находим

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos\theta} = \operatorname{ctg}\alpha \int_0^\varphi d\varphi,$$

или

$$\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \varphi,$$

откуда получаем уравнение траектории

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = e^{\varphi \operatorname{ctg}\alpha}.$$

Кривая на поверхности сферы, описываемая этим уравнением, называется *локсодромией*. Такова траектория судна, курс которого не меняется по отношению к меридиану.

Если $\operatorname{ctg}\alpha > 0$, то при неограниченном возрастании угла φ предельное значение угла θ определится из равенства

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = \infty$$

и, следовательно,

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2},$$

или

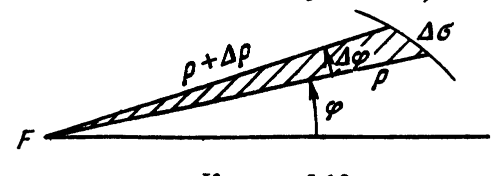
$$\theta = \pi/2.$$

Таким образом, в этом случае локсодромия будет сферической спиралью, закручивающейся вокруг Северного полюса.

Если же $\operatorname{ctg}\alpha < 0$, то, рассуждая аналогично предыдущему, найдем, что $\theta = -\pi/2$, и траектория будет сферической спиралью, закручивающейся вокруг Южного полюса.

На рис. *б* представлена локсодромия в проекции на плоскость, перпендикулярную к оси z.

Задача 5.19. Определить ускорение точки, движущейся в плоскости, если ее трансверсальное ускорение относительно центра O равно нулю (такое движение точки называется *центральным*).



К задаче 5.19

Р е ш е н и е. Воспользуемся проекциями ускорения на радиальное и трансверсальное направления, полученные в задаче 5.16,

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, \tag{1}$$

$$a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}). \tag{2}$$

Согласно условию трансверсальное ускорение равно нулю

$$a_\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) = 0 \tag{3}$$

и, следовательно, произведение $\rho^2\dot{\varphi}$ остается неизменным:

$$\rho^2\dot{\varphi} = c. \tag{4}$$

Величина $\rho^2\dot{\varphi}$ равна удвоенному значению секторной скорости. Действительно, приращение площади сектора, описанного радиусом-вектором точки за время Δt (см. рисунок), с точностью до величин первого порядка малости равно

$$\Delta S = \frac{1}{2}\rho\Delta\sigma = \frac{1}{2}\rho\rho\Delta\varphi = \frac{1}{2}\rho^2\Delta\varphi, \qquad (5)$$

где $\Delta\sigma$ – приращение дуги за промежуток времени Δt.

Предел отношения приращения площади к приращению времени

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi} \qquad (6)$$

и есть секторная скорость.

Перейдем далее, к преобразованию радиального ускорения точки, которое в случае центрального движения, рассматриваемого в задаче, является полным ускорением точки. Уравнение траектории точки в полярных координатах может быть представлено зависимостью

$$\rho = \rho(\varphi), \qquad (7)$$

и, следовательно, можно считать, что радиус-вектор зависит от времени через промежуточную переменную φ. Тогда

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\varphi}\dot{\varphi} \qquad (8)$$

или, исключив отсюда $\dot{\varphi}$ посредством (4), найдем

$$\dot{\rho} = \frac{c}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\varphi} = -c\frac{d(1/\rho)}{d\varphi} = -c\frac{du}{d\varphi}, \qquad (9)$$

где введена новая переменная

$$u = 1/\rho. \qquad (10)$$

Дифференцируя (9) еще раз по t и учитывая, что радиус-вектор зависит от времени через φ, имеем

$$\ddot{\rho} = -c\frac{d^2u}{d\varphi^2}\dot{\varphi} = -\frac{c^2}{\rho^2}\frac{d^2u}{d\varphi^2}. \qquad (11)$$

Здесь производная $\dot{\varphi}$ заменена ее значением из (4). Внося это значение второй производной радиуса-вектора по времени (11) в формулу (1), а также исключая $\dot{\varphi}$ согласно (4), получим

$$a_\rho = -c^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\varphi^2}\right). \qquad (12)$$

Это равенство определяет ускорение точки при центральном движении. Оно дает выражение для ускорения через элементы траектории в полярных координатах (7) и постоянную секторную скорость. Формула (12) носит название *формулы Бине,* но впервые ее получил И. Ньютон.

Задача 5.20. Определить ускорение планеты, движущейся согласно трем законам Кеплера.

1. Планеты обращаются вокруг Солнца по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

2. Площади, описываемые радиусом-вектором, идущим от Солнца к планете, пропорциональны временам, в течение которых они были пройдены.

3. Квадраты периодов обращения планет относятся, как кубы больших полуосей их орбит.

Планету и Солнце рассматривать как точки.

Решение. Задачу об ускорении небесного тела в кеплеровом движении будем решать в полярных координатах. Полярную ось направим из фокуса, где находится Солнце, вдоль большой оси эллипса. Уравнение эллипса в полярных координатах имеет вид

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}, \tag{1}$$

где $p = b_2^2/b_1$ — параметр эллипса, $e = c_1/b_1$ — эксцентриситет эллипса, b_1 и b_2 — большая и малая полуоси эллипса, c_1 — половина фокусного расстояния.

Второй закон Кеплера устанавливает постоянство секторной скорости

$$\rho^2\dot{\varphi} = c,$$

где c — постоянная, равная удвоенной секторной скорости.

Переходим непосредственно к вычислению ускорения планеты. В силу второго закона Кеплера движение любой планеты является центральным. Действительно, секторная скорость относительно Солнца постоянна и, следовательно, трансверсальная составляющая ускорения планеты равна нулю. Поэтому полное ускорение направлено по радиусу.

Таким образом, в силу второго закона Кеплера движение планет является центральным движением. Для нахождения ускорения планеты применим формулу Бине (см. предыдущую задачу)

$$a_\rho = -c^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\varphi^2}\right).$$

Из уравнения эллипса (1) находим

$$u = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos\varphi.$$

Тогда

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = -\frac{e}{p}\cos\varphi$$

и, следовательно,

$$u + \frac{d^2u}{d\varphi^2} = \frac{1}{p}.$$

Внося эти значения в формулу Бине, получим

$$a = a_\rho = -\frac{c^2}{\rho^2}\left(u + \frac{d^2u}{d\varphi^2}\right) = -\frac{c^2}{p\rho^2}. \qquad (2)$$

Итак, ускорение планеты, движущейся по законам Кеплера, направлено по радиусу-вектору точки к фокусу, т.е. к Солнцу, и по модулю обратно пропорционально квадрату расстояния до Солнца.

Этот вывод можно было получить из выражения для радиального ускорения (см. формулу (1) предыдущей задачи), не пользуясь формулой Бине, непосредственным дифференцированием уравнения эллипса (1) по времени. Однако этот путь более длинный.

Параметр $p = b_2^2/b_1$ в формуле (2) можно заменить, пользуясь третьим законом Кеплера, следующим образом. Третий закон Кеплера может быть записан так:

$$\frac{b_1^3}{T^2} = k, \qquad (3)$$

где b_1 — большая полуось, T — период обращения планеты. Через k обозначена постоянная величина отношения куба большой полуоси к квадрату периода обращения. Период обращения при постоянной секторной скорости можно вычислить, разделив площадь эллипса на эту скорость:

$$T = 2\pi b_1 b_2/c.$$

Подставляя значение периода в формулу (3), имеем

$$\frac{b_1 c^2}{4\pi^2 b_2^2} = k,$$

или

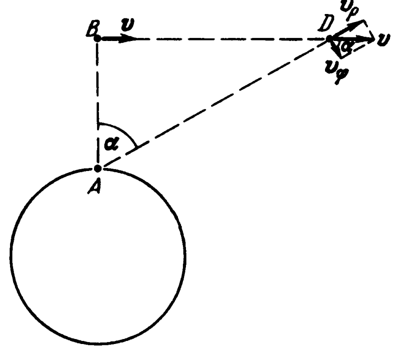
$$\frac{b_2^2}{b_1} = \frac{c^2}{3\pi^2 k}.$$

Внося это значение в формулу (2), получим

$$a = -\frac{4\pi^2 k}{\rho^2}.$$

Заметим, что в этом выражении постоянная k одинакова для всех планет Солнечной системы.

Задача 5.21. Самолет летит с постоянной по отношению к Земле по модулю и направлению скоростью, равной 3600 км/ч. Наблюдатель стоит на Земле неподвижно в точке A (см. рисунок). Когда самолет пролетает над наблюдателем, то расстояние AB до самолета, измеренное при помощи радиолокатора, оказалось равным 30 км. Определить угловую скорость радиуса, соединяющего самолет с точкой A в момент пролета точки B, а также в момент, когда луч AD, направленный на самолет, образует с вертикалью угол α.



К задаче 5.21

Р е ш е н и е. Для определения угловой скорости самолета по отношению к наблюдателю A разложим абсолютное движение самолета на относительное по радиусу-вектору (радиальное движение) и переносное движение вместе с радиусом-вектором (трансверсальное движение). Относительная скорость самолета будет направлена по радиусу-вектору, а переносная скорость – перпендикулярна к нему. В точке B скорость самолета перпендикулярна к радиусу-вектору AB. Следовательно, относительная скорость самолета в этом положении равна нулю. Итак, в точке B абсолютная скорость самолета равна его переносной скорости или трансверсальной скорости

$$v = v_e = v_\varphi = \rho\dot{\varphi}. \tag{1}$$

Подставляя заданные значения, находим

$$3600 = 30\dot{\varphi}, \tag{2}$$

откуда

$$\dot{\varphi} = 120 \text{ рад/ч}. \tag{3}$$

Это и есть угловая скорость самолета в момент пролета точки B. Переходим к определению угловой скорости самолета, когда он пролетает точку D. Для этого разложим (см. рисунок) абсолютную скорость на относительную (радиальную) и переносную (трансверсальную). Переносная (трансверсальная) скорость

$$v_{e_1} = v_{\varphi_1} = \rho_1\dot{\varphi}_1. \tag{4}$$

Замечая, что

$$v_{e_1} = v_{\varphi_1} = v\cos\alpha \tag{5}$$

и что

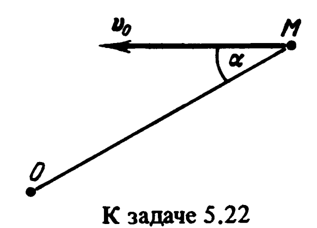
$$\rho_1 = AD = \frac{AB}{\cos\alpha}, \tag{6}$$

находим искомую угловую скорость:

$$\dot\varphi_1 = \frac{V_{e_1}}{\rho_1} = \frac{V\cos^2\alpha}{AB} = \frac{3600}{30}\cos^2\alpha = 120\cos^2\alpha. \tag{7}$$

Проведенный анализ показывает, что угловая скорость объекта, движущегося равномерно и прямолинейно, зависит только от трансверсальной составляющей скорости. Радиальная составляющая скорости на нее не влияет.

Задача 5.22. Точка совершает центральное движение, при котором ее трансверсальное ускорение относительно центра O равно нулю. Траектория точки – лемниската $\rho^2 = 2b^2\cos 2\varphi$, где ρ – расстояние точки от центра O, b – постоянная величина. В начальный момент $\rho = \rho_0$, скорость



К задаче 5.22

точки равна v_0 и образует угол α с прямой, соединяющей движущуюся точку с центром O. Определить ускорение точки.

Решение. Для решения воспользуемся полученной в задаче 5.19 формулой Бине

$$a_\rho = -c^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\varphi^2}\right), \tag{1}$$

где c – удвоенная секторная скорость (постоянная)

$$c = \rho^2\dot\varphi = \rho_0^2\dot\varphi_0. \tag{2}$$

С другой стороны, в начальный момент (см. рисунок), трансверсальная скорость

$$\rho_0\dot\varphi_0 = v_0\sin\alpha, \tag{3}$$

откуда

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{v_0 \sin\alpha}{\rho_0}$$

и, следовательно, согласно (2)

$$c = \rho_0 v_0 \sin\alpha. \tag{4}$$

Далее, находим

$$u = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{b\sqrt{2\cos 2\varphi}}, \tag{5}$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = \frac{1}{b\sqrt{2}}\left(\frac{2+\sin^2 2\varphi}{\cos^{2,5} 2\varphi}\right) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{2+\sin^2 2\varphi}{\cos^2 2\varphi}\right). \tag{6}$$

Внося значения (2), (5) и (6) в формулу Бине (1), получаем окончательно

$$a = a_\rho = -\rho_0 v_0 \sin\alpha \frac{1}{\rho^3}\left(\frac{\cos^2 2\varphi + 2 + \sin^2 2\varphi}{\cos^2 2\varphi}\right) =$$

$$= -\frac{12 b^4 \rho_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{\rho^7}. \tag{7}$$

Таким образом, ускорение точки является радиальным ускорением, а его модуль обратно пропорционален седьмой степени расстояния точки до неподвижного центра.

Задача 5.23. Точка M, двигаясь в плоскости, описывает кардиоиду, уравнение которой в полярных координатах имеет вид

$$\rho = b(1 + \cos\varphi). \tag{1}$$

Кардиоидой называется эпициклоида, т.е. кривая, описываемая точкой окружности, катящейся без скольжения по другой неподвижной окружности, в случае, когда радиусы обеих окружностей равны.

Трансверсальное ускорение точки равно нулю. Определить скорость, ускорение точки, радиус кривизны траектории и годограф скорости.

Решение. Трансверсальное ускорение точки по условию равно нулю, следовательно,

$$a_\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) = 0,$$

откуда удвоенное значение секторной скорости есть величина постоянная:

$$\rho^2\dot{\varphi} = \rho^2\frac{d\varphi}{dt} = c. \tag{2}$$

С другой стороны, определим квадрат скорости точки:

$$v^2 = v_\rho^2 + v_\varphi^2 = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2. \qquad (3)$$

Из (2) находим

$$dt = \frac{\rho^2 d\varphi}{c} \qquad (4)$$

и подставляем это значение в формулу (3). Тогда

$$v^2 = \frac{c^2}{\rho^2}\left[1 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2\right]. \qquad (5)$$

Дифференцируя (1) по переменной φ, имеем

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -b\sin\varphi. \qquad (6)$$

Это значение вносим в формулу (5), после чего получаем с учетом (1) зависимость скорости от радиуса-вектора

$$v^2 = \frac{c^2}{\rho^2}\left[1 + \frac{b^2\sin^2\varphi}{b^2(1+\cos\varphi)^2}\right] = \frac{c^2(2+2\cos\varphi)}{\rho^2(1+\cos\varphi)^2} =$$

$$= \frac{2c^2}{\rho^2}\left(\frac{1}{1+\cos\varphi}\right) = \frac{2bc^2}{\rho^3}. \qquad (7)$$

Переходим к определению ускорения точки, которое будем искать двумя способами.

Способ 1. Воспользуемся формулой Бине (см. задачу 5.19), определяющей ускорение точки при центральном движении

$$a_\rho = -c^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\varphi^2}\right), \qquad (8)$$

где

$$u = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{b(1+\cos\varphi)}.$$

Вычислим, далее,

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = \frac{d^2}{d\varphi^2}\left[\frac{1}{b(1+\cos\varphi)}\right] = \frac{1}{b}\,\frac{(1+\cos\varphi)\cos\varphi + 2\sin^2\varphi}{(1+\cos\varphi)^3}. \qquad (9)$$

Перейдем с помощью формулы (1) в выражении (9) опять к радиусу-

вектору. Тогда находим

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} = \frac{b^2}{\rho^3}\left\{\frac{\rho^2}{b^2} - \frac{\rho}{b} + 2\left[1 - \left(\frac{\rho}{b} - 1\right)^2\right]\right\} = \frac{b}{\rho^2}\left(3 - \frac{\rho}{b}\right). \qquad (10)$$

Вносяполученные значения в формулу (8), находим ускорение

$$a_\rho = -\frac{3bc^2}{\rho^4}. \qquad (11)$$

Таким образом, ускорение точки обратно пропорционально четвертой степени расстояния до начала координат.

Способ 2. Так как трансверсальное ускорение равно нулю по условию, то полное ускорение равно радиальному:

$$a = a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2. \qquad (12)$$

С помощью формулы (2) исключаем производную от полярного угла. Тогда находим

$$a = \ddot{\rho} - \frac{c^2}{\rho^3}. \qquad (13)$$

Чтобы представить ускорение как функцию радиуса-вектора, внесем в формулу для квадрата скорости

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2$$

значение $\dot{\varphi}$ из (2). Тогда получим

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \frac{c^2}{\rho^2}. \qquad (14)$$

Вычисляя от обеих частей этого равенства производную по времени, находим, с учетом (13),

$$\frac{d(v^2)}{dt} = 2\dot{\rho}\ddot{\rho} - \frac{2c^3}{\rho^3}\cdot\dot{\rho} = 2\dot{\rho}\left(\ddot{\rho} - \frac{c^2}{\rho^2}\right) = 2\frac{d\rho}{dt}a. \qquad (15)$$

Отсюда

$$a = \frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{d\rho}. \qquad (16)$$

Учитывая (7), перепишем предыдущее равенство:

$$a = bc^2\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho^3}\right) = -\frac{3bc^2}{\rho^4}, \qquad (17)$$

что совпадает с выражением (11), полученным первым способом.

Радиус кривизны траектории. Для определения радиуса кривизны найдем предварительно касательное ускорение точки.

Для этого вычислим производную по времени от квадрата скорости (14):

$$2v\frac{dv}{dt} = 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d^2\rho}{dt^2} - 2\frac{c^2}{\rho^3}\frac{d\rho}{dt}, \tag{18}$$

откуда

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{v}\frac{d\rho}{dt}\left(\frac{d^2\rho}{dt^2} - \frac{c^2}{\rho^3}\right). \tag{19}$$

Учитывая формулы для ускорения (13) и (17), получаем

$$a_\tau = -\frac{1}{v}\frac{d\rho}{dt}\frac{3bc^2}{\rho^4}. \tag{20}$$

Далее, преобразуем это выражение, с учетом (1) и (2):

$$a_\tau = -\frac{1}{v}\frac{d\rho}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\frac{3bc^2}{\rho^4} = \frac{1}{v}b\sin\varphi\frac{c}{\rho^2}\frac{3bc^2}{\rho^4}. \tag{21}$$

Тогда квадрат касательного ускорения

$$a_\tau^2 = \frac{9b^2c^4}{\rho^8v^2}b^2\sin^2\varphi\frac{c^2}{\rho^4}. \tag{22}$$

Заменяя

$$b^2\sin^2\varphi = b^2(1 - \cos^2\varphi) = b^2 - (b - \rho)^2 = \rho(2b - \rho) \tag{23}$$

и внося в (22) значение квадрата скорости (7), находим

$$a_\tau^2 = \frac{9bc^4}{2\rho^8}(2b - \rho). \tag{24}$$

Тогда нормальное ускорение находится согласно формуле

$$a_n^2 = a^2 - a_\tau^2 = \frac{9bc^4}{2\rho^7}. \tag{25}$$

Радиус кривизны траектории определяется из формулы

$$a_n = \frac{v^2}{r}, \text{ или } r = \frac{v^2}{a_n} = \frac{2\sqrt{2\rho}}{3}. \tag{26}$$

Годограф скорости. Найдем угол γ, который образует касательная к траектории точки с радиусом-вектором. Этот угол определяется

равенством

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{1+\cos\varphi}{-\sin\varphi} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}\right), \tag{27}$$

где $\rho' = d\rho/d\varphi = -\sin\varphi$. Искомый угол равен

$$\gamma = \pi/2 + \varphi/2. \tag{28}$$

Следовательно, с трансверсальной осью, перпендикулярной к радиусу-вектору, касательная образует угол $\varphi/2$. Тогда модуль скорости находится из равенства

$$v\cos(\varphi/2) = \rho\dot{\varphi} = c/\rho \tag{29}$$

или

$$v = \frac{c}{\rho\cos(\varphi/2)} = \frac{c}{2b\cos^3(\varphi/2)}. \tag{30}$$

Полярные координаты любой точки годографа определяются равенствами

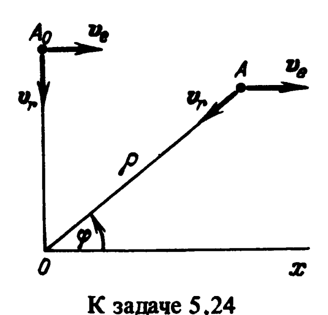
$$r_1 = \frac{c}{2b\cos^3(\varphi/2)}, \quad \varphi_1 = \varphi + \gamma = \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\varphi. \tag{31}$$

Исключая из этих двух уравнений угол φ, находим

$$r_1 = \frac{c}{2b\cos^3\dfrac{\varphi_1 - \pi/2}{3}}. \tag{32}$$

Это и есть уравнение годографа в полярных координатах.

Задача 5.24. Самолет вылетает из точки A_0 находящейся на перпендикуляре к оси x, на расстоянии a_0 от начала координат. Скорость само-



К задаче 5.24

лета $\mathbf{v}_r$ постоянна по модулю и все время направлена в точку O. На самолет действует ветер, направленный параллельно оси x. Скорость ветра постоянна и равна $\mathbf{v}_e$. Самолет принять за точку. Определить абсолютную траекторию самолета и время полета из A_0 в точку O (см. рис.).

Решение. Самолет участвует в двух движениях: в относительном движении по отношению к воздуху со скоростью $\mathbf{v}_r$ и в переносном дви-

жении вместе с воздухом со скоростью $\mathbf{v}_e$. Абсолютная скорость самолета по теореме сложения скоростей

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r. \qquad (1)$$

Введем полярные координаты самолета ρ и φ. Спроектируем абсолютную скорость самолета на полярные оси координат. Радиальная скорость самолета

$$\dot{\rho} = v_e \cos\varphi - v_r. \qquad (2)$$

Трансверсальная скорость самолета

$$\rho\dot{\varphi} = -v_e \sin\varphi. \qquad (3)$$

Для определения траектории, исключим из этих двух уравнений время, разделив уравнение (2) на (3):

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{v_r - v_e\cos\varphi}{v_e \sin\varphi}\, d\varphi = \left(\frac{\varphi_r}{v_e\sin\varphi} - \operatorname{ctg}\varphi\right) d\varphi. \qquad (4)$$

Переменные отделены. Интегрируя, находим

$$\ln\rho = \frac{v_r}{v_e}\ln \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - \ln\sin\varphi + c. \qquad (5)$$

Произвольную постоянную интегрирования c определим, воспользовавшись начальными условиями движения: при $t = 0$, $\rho = \rho_0$, $\varphi = \pi/2$

$$\ln\rho_0 = \frac{v_r}{v_e}\ln \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \ln\sin\frac{\pi}{2} + c, \qquad (6)$$

откуда

$$c = \ln\rho_0. \qquad (7)$$

Подставляя это значение произвольной постоянной в (5) и потенцируя, находим уравнение траектории:

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sin\varphi}\operatorname{tg}^k\frac{\varphi}{2}, \qquad (8)$$

где для краткости отношение относительной и переносной скорости обозначено

$$k = v_r/v_e. \qquad (9)$$

Из уравнения траектории самолета (8) следует, что самолет попадает в точку O при значении угла $\varphi = 0$, так как только в этом случае $\rho = 0$. Действительно, согласно (8) при $\varphi = 0$ значение радиуса-вектора обращается в неопределенность вида $0/0$. Раскроем ее по правилу Лопиталя.

Вычисляя производную по углу φ от числителя и знаменателя дроби, находим

$$\rho = \frac{\rho_0 \cdot k}{2\cos\varphi\cos^2(\varphi/2)} \operatorname{tg}^{k-1}\frac{\varphi}{2}. \tag{10}$$

Отсюда следует, что при $\varphi = 0$ радиус-вектор действительно обращается в нуль. Однако это верно только при $k > 1$, т.е. когда скорость самолета больше скорости ветра.

Переходим к определению времени полета. Из уравнения (3) находим

$$dt = -\frac{\rho d\varphi}{v_e \sin\varphi}. \tag{11}$$

Внесем в это уравнение значение радиуса-вектора из (8):

$$dt = -\frac{\rho_0}{v_e \sin^2\varphi} \operatorname{tg}^k \frac{\varphi}{2}\, d\varphi. \tag{12}$$

Заменим

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{4\sin^2(\varphi/2)\cos^2(\varphi/2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2(\varphi/2)} + \frac{1}{\cos^2(\varphi/2)}\right). \tag{13}$$

Тогда (12) примет вид

$$\frac{4v_e}{\rho_0} dt = -\left(\frac{1}{\sin^2(\varphi/2)} + \frac{1}{\cos^2(\varphi/2)}\right) \operatorname{tg}^k \frac{\varphi}{2}\, d\varphi, \tag{14}$$

или

$$\frac{2v_e}{\rho_0} dt = \operatorname{ctg}^{-k}\frac{\varphi}{2}\, d\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{tg}^k\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right). \tag{15}$$

Вычисляя определенный интеграл от φ до 0, находим

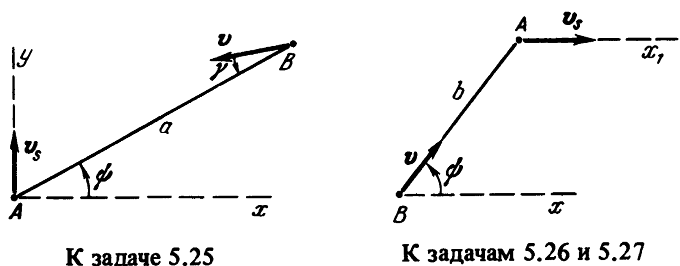
$$\frac{2t}{\rho_0} = \frac{1}{v_r - v_e} \operatorname{tg}^{k-1}\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{v_r + v_e} \operatorname{tg}^{k+1}\frac{\varphi}{2}. \tag{16}$$

Полагая в этом уравнении $\varphi = \pi/2$, определяем промежуток времени от начала движения (из точки A_0) до прилета в точку O:

$$T = \frac{\rho_0 v_r}{v_r^2 - v_e^2}. \tag{17}$$

Это время конечно только в случае $v_r > v_e$. В противном случае самолет в точку O не попадает.

Задача 5.25. При преследовании цели применяют метод параллельного сближения, при котором угол упреждения γ выбирается так, чтобы линия визирования, соединяющая точку B с целью A, оставалась во все время преследования цели параллельной своему первоначальному положению. Определить угол γ, если цель A движется прямолинейно и равномерно со скоростью v_s, положение точки B в начальный момент времени определяется расстоянием $A_0B_0 = b_0$ и углом ψ_0; скорость



К задаче 5.25 К задачам 5.26 и 5.27

точки B постоянна по величине и равна v. Определить также время от начала преследования до поражения цели (см. рисунок).

Решение. Рассмотрим абсолютное движение точки B как сложное движение, складывающееся из переносного движения вместе с целью и относительного движения по отношению к цели. Согласно теореме сложения скоростей

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_s + \mathbf{v}_r, \qquad (1)$$

где $\mathbf{v}_r$ – относительная скорость точки B. Воспользуемся полярной, относительной системой координат b, ψ с началом, совпадающим с положением цели в данный момент времени. Тогда проекции относительной скорости на оси полярной системы координат

$$v_{r\rho} = \dot{b}, \qquad (2)$$

$$v_{r\varphi} = b\dot{\psi}. \qquad (3)$$

С другой стороны, проектируя равенство (1) на эти оси, находим

$$\dot{b} = -(v\cos\gamma + v_s\sin\psi), \qquad (4)$$

$$b\dot{\psi} = v\sin\gamma - v_s\cos\psi. \qquad (5)$$

Так как по условию линия AB остается параллельной первоначальному положению, то угол $\psi = \psi_0 = \text{const}$ и его производная по времени $\dot{\psi}$ равна нулю. Уравнения (4) и (5) принимают вид

$$\dot{b} = -(v\cos\gamma + v_s\sin\psi_0), \qquad (6)$$

$$0 = v\sin\gamma - v_s\cos\psi_0. \qquad (7)$$

Из уравнения (7) определяется угол упреждения:

$$\sin\gamma = \frac{v_s}{v}\cos\psi_0 = \text{const}. \tag{8}$$

Отсюда следует, что правая часть уравнения (6) есть величина постоянная. Отделяя переменные, находим

$$db = -(v\cos\gamma + v_s\sin\psi_0)dt. \tag{9}$$

Интегрируя, имеем

$$b = -(v\cos\gamma + v_s\sin\psi_0)t + c, \tag{10}$$

где c – произвольная постоянная интегрирования. Определяем ее из начальных условий: $b = b_0$ при $t = 0$. Подставляя эти данные в уравнение (10), получаем, что

$$b_0 = c \tag{11}$$

и, следовательно, уравнение (10) принимает вид

$$b = b_0 - (v\cos\gamma + v_s\sin\psi_0)t. \tag{12}$$

Положив в этом уравнении $b = 0$, найдем время преследования T:

$$T = \frac{b_0}{v\cos\gamma + v_s\sin\psi_0}. \tag{13}$$

Задача 5.26. Точка A движется прямолинейно и равномерно со скоростью $\mathbf{v}_s$. Точка B преследует цель – точку A с постоянной по величине скоростью v. Вектор скорости точки B непрерывно направлен в точку A. Найти относительную траекторию точки B. Начальное положение точки B относительно цели определяется углом ψ_0 и расстоянием $A_0B_0 = b_0$. Определить также угловую скорость радиуса-вектора $\boldsymbol{b}$ (см. рисунок).

Решение. Выберем в качестве относительных координат, определяющих положение точки B по отношению к точке A, радиус-вектор $\boldsymbol{b}$ и его угол поворота ψ относительно прямой x, которая перемещается поступательно. Радиус-вектор $\boldsymbol{b}$ и угол ψ являются относительными полярными координатами. Прямая AB называется *линией визирования.*

Рассмотрим абсолютное движение точки B как составное, сложное движение, складывающееся из переносного движения вместе с целью и относительного движения по отношению к цели.

Согласно теореме сложения скоростей абсолютная скорость точки B равна векторной сумме ее переносной и относительной скоростей

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_s + \mathbf{v}_r. \tag{1}$$

Проекции относительной скорости точки B на радиус-вектор AB и на направление, перпендикулярное к нему, т.е. относительная радиальная

скорость и относительная трансверсальная скорость

$$v_{r\rho} = \dot{b}, \tag{2}$$

$$v_{r\varphi} = b\dot{\psi}. \tag{3}$$

Проектируя равенство (1) на эти два направления, находим

$$\dot{b} = -(v + v_s \sin\psi), \tag{4}$$

$$b\dot{\psi} = -v_s \cos\psi. \tag{5}$$

Для нахождения траектории исключим из этих уравнений время, разделив уравнение (4) на (5):

$$\frac{db}{b} = \left(\frac{v}{v_s \cos\psi} + \operatorname{tg}\psi\right) d\psi. \tag{6}$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\ln bc = \frac{v}{v_s} \ln(\sec\psi + \operatorname{tg}\psi) - \ln\cos\psi \tag{7}$$

или, освобождаясь от логарифмов, имеем

$$bc = \frac{(\sec\psi + \operatorname{tg}\psi)^p}{\cos\psi}, \tag{8}$$

где для краткости обозначено $v/v_s = p$.

Для определения произвольной постоянной интегрирования c подставим в уравнение (8) начальные данные:

$$b = b_0, \quad \psi = \psi_0 \text{ при } t = 0.$$

Тогда

$$c = \frac{(\sec\psi_0 + \operatorname{tg}\psi_0)^p}{b_0 \cos\psi_0}. \tag{9}$$

Внося это значение в уравнение (8), находим уравнение относительной траектории точки B в полярной системе координат, начало которой совпадает с целью:

$$\frac{b}{b_0} = \frac{\cos\psi_0}{\cos\psi}\left(\frac{\sec\psi + \operatorname{tg}\psi}{\sec\psi_0 + \operatorname{tg}\psi_0}\right)^p. \tag{10}$$

Угловая скорость радиуса-вектора определится из (5) подстановкой значения b из (10):

$$\dot{\psi} = -\frac{v_s \cos\psi}{b} = -\frac{v_s \cos^2\psi}{b_0 \cos\psi_0}\left(\frac{\sec\psi_0 + \operatorname{tg}\psi_0}{\sec\psi + \operatorname{tg}\psi}\right)^p. \tag{11}$$

Заметим, что при постоянной по модулю скорости точки B нормальное ускорение пропорционально угловой скорости радиуса-вектора $\boldsymbol{b}$, которая в данном случае совпадает с угловой скоростью вращения вектора скорости точки B:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = |v\dot{\psi}| = v\frac{v_s}{b_0}\frac{\cos^2\psi}{\cos\psi_0}\left(\frac{\sec\psi_0 + \operatorname{tg}\psi_0}{\sec\psi + \operatorname{tg}\psi}\right)^p. \qquad (12)$$

Задача 5.27. В предыдущей задаче найти угол ψ_1, при котором точка B настигает цель. Определить предельные значения угловой скорости вращения радиуса-вектора, радиуса кривизны траектории в момент попадания в цель (см. рисунок).

Решение. Для нахождения значения угла ψ_1, при котором произойдет попадание в цель, представим уравнение траектории точки B в виде

$$\frac{b}{b_0} = \frac{\cos\psi_0}{\cos\psi}\left(\frac{\sec\psi + \operatorname{tg}\psi}{\sec\psi_0 + \operatorname{tg}\psi_0}\right)^p = \frac{\cos\psi_0}{\cos\psi}\left(\frac{1+\sin\psi}{\cos\psi}\right)^p\left(\frac{\cos\psi_0}{1+\sin\psi_0}\right)^p. \qquad (1)$$

Возведя обе части уравнения в степень $1/p$, после несложных преобразований находим

$$\left(\frac{b}{b_0}\right)^{1/p} = \left(\frac{\cos\psi}{\cos\psi_0}\right)^{1-1/p}\cdot\frac{1-\sin\psi_0}{1-\sin\psi}. \qquad (2)$$

Из этого равенства следует, что $b = 0$ при $\psi_1 = -\pi$ и при условии $p > 1$. Исключение составляет единственный случай, когда начальный угол $\psi_0 = +\pi$ и точка B летит точно навстречу цели. Однако это движение неустойчиво в малом. При малейшем отклонении точки B от встречного курса она будет все дальше отклоняться и поразит цель при $\psi_1 = -\pi$, т.е. точно сзади.

В предыдущей задаче из выражения для угловой скорости радиуса-вектора

$$\dot{\psi} = -\frac{v_s\cos\psi}{b} \qquad (3)$$

следует, что $\dot{\psi} < 0$, так как угол ψ изменяется в пределах

$$-\pi \leqslant \psi \leqslant +\pi$$

и угол ψ непрерывно уменьшается от своего начального значения до $\psi_1 = -\pi$, когда точка B поражает цель.

Найдем предельные значения угловой скорости радиуса-вектора:

$$\dot{\psi} = -\frac{v_s}{b_0}\frac{\cos^2\psi}{\cos\psi_0}\left(\frac{\sec\psi_0 + \operatorname{tg}\psi_0}{\sec\psi + \operatorname{tg}\psi}\right)^p \tag{4}$$

и радиуса кривизны абсолютной траектории точки B (пользуясь формулой (12) предыдущей задачи)

$$\rho = \frac{bp}{\cos\psi} = \frac{b_0 p\cos\psi_0}{\cos^2\psi}\left(\frac{\sec\psi + \operatorname{tg}\psi}{\sec\psi_0 + \operatorname{tg}\psi_0}\right)^p . \tag{5}$$

Значения $\dot{\psi}$, a_n, ρ обращаются в неопределенность вида 0/0 в момент попадания точки B в цель, т.е. при $b = 0$, $\psi = \psi_1 = -\pi$. Неопределенность раскрываем по правилу Лопиталя, вычисляя отдельно производные от числителя и знаменателя. Для этого достаточно раскрыть неопределенность

$$\lim_{\psi \to -\pi}\frac{\cos^2\psi}{(\sec\psi + \operatorname{tg}\psi)^p}, \tag{6}$$

входящую множителем в выражения для $\dot{\psi}$, a_n, и делителем в формулу для ρ. Этот предел зависит от величины p.

1) Определим предел при $p = 2$:

$$\lim_{\psi \to -\pi}\left(\frac{\cos\psi}{\sec\psi + \operatorname{tg}\psi}\right)^2 = \lim_{\psi \to -\pi}\left(\frac{-\sin\psi}{\sec\psi\operatorname{tg}\psi + \sec^2\psi}\right)^2 =$$

$$= \lim_{\psi \to -\pi}\left(\frac{-\sin\psi\cos^2\psi}{1 + \sin\psi}\right)^2 = \lim_{\psi \to -\pi}(-\cos^2\psi + 2\sin^2\psi)^2 = 4. \tag{7}$$

При $p = 2$, когда скорость точки B в два раза больше скорости цели, предел конечен и равен 4.

2) Найдем предел при $p > 2$:

$$\lim_{\psi \to -\pi}\frac{\cos^2\psi}{(\sec\psi + \operatorname{tg}\psi)^p} =$$

$$= \lim_{\psi \to -\pi}\frac{\cos^2\psi}{(\sec\psi + \operatorname{tg}\psi)^2}\lim_{\psi \to -\pi}\frac{1}{(\sec\psi + \operatorname{tg}\psi)^{(p-2)}} =$$

$$= 4\lim_{\psi \to -\pi}\left(\frac{\cos\psi}{1 + \sin\psi}\right)^{p-2} = 4\lim_{\psi \to -\pi}\left(\frac{-\sin\psi}{\cos\psi}\right)^{p-2} = \infty. \tag{8}$$

3) Определим предел при $p < 2$:

$$\lim_{\psi \to -\pi} \frac{\cos^2 \psi}{(\sec \psi + \operatorname{tg} \psi)^p} = 4 \lim_{\psi \to -\pi} (\sec \psi + \operatorname{tg} \psi)^{2-p} =$$

$$= 4 \lim_{\psi \to -\pi} \left(\frac{1 + \sin \psi}{\cos \psi}\right)^{2-p} = 4 \lim_{\psi \to -\pi} \left(\frac{\cos \psi}{-\sin \psi}\right)^{2-p} = 0. \quad (9)$$

Внося значения этих пределов в выражения для угловой скорости радиуса-вектора, нормального ускорения и радиуса кривизны абсолютной траектории, находим их предельные значения в момент попадания в цель:

	$p>2$	$p=2$	$p<2$
$\dot{\psi}$	$-\infty$	$-\dfrac{4V_S}{b_0 \cos \psi_0}(\sec \psi_0 + \operatorname{tg} \psi_0)^{1/2}$	0
a_n	∞	$\dfrac{4VV_S}{b_0 \cos \psi_0}(\sec \psi_0 + \operatorname{tg} \psi_0)^{1/2}$	0
ρ	0	$\dfrac{b_0 p \cos \psi_0}{4} \dfrac{1}{(\sec \psi_0 + \operatorname{tg} \psi_0)^{1/2}}$	∞

Очевидно, что попадание в цель при $p > 2$ неосуществимо, так как невозможно обеспечить неограниченный рост нормального ускорения вблизи цели. Следовательно, точное попадание возможно только в случае, когда скорость точки B незначительно превышает скорость цели.

Траектория, описываемая точкой B, вектор скорости которой неизменно направлен на цель, называется *кривой погони*. Впервые задача о движении точки по кривой погони была поставлена гениальным итальянским художником, ученым и инженером эпохи Возрождения Леонардо да Винчи в 1510 г.

Независимо от Леонардо да Винчи, работа которого оставалась неизвестной до конца XIX века, эта проблема привлекла внимание выдающихся французских ученых Бугера и Мопертюи в 1732 г. Бугеру принадлежит первое решение задачи в случае прямолинейного и равномерного движения цели. Мопертюи сформулировал задачу в более общем виде, когда цель движется с постоянной по модулю скоростью по произвольной кривой.

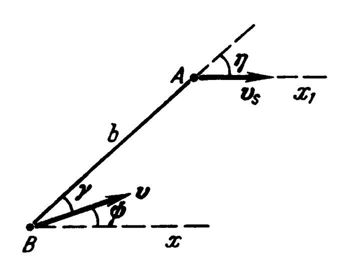
В дальнейшем этой проблемой занимались многие ученые. Кривую погони часто называли также собачьей кривой.

Задача 5.28. При пропорциональном сближении угловая скорость вращения вектора скорости точки B, преследующей цель, прямо пропорциональна угловой скорости линии визирования, соединяющей

точку B с целью A:

$$\dot{\psi} = \beta\dot{\eta}.$$

Здесь ψ – угол между скоростью точки B и некоторым неизменным направлением (в частности, направлением скорости цели, если она движется прямолинейно); η – угол поворота линии визирования, отсчитываемый от того же неизменного направления, что и угол ψ; β – коэффициент пропорциональности, называемый *навигационной постоянной.*



К задачам 5.28 и 5.29

Полагая, что цель A движется прямолинейно и равномерно со скоростью $\mathbf{v}_s$ и что скорость $\mathbf{v}$ точки B постоянна по модулю, определить уравнение относительной траектории точки B, если навигационная постоянная равна 2. Найти также нормальное ускорение точки B. Определить условия, при которых нормальное ускорение точки B вблизи цели неограниченно возрастает или стремится к нулю (см. рисунок).

Решение. Обозначим расстояние между точкой B и целью A через b, угол линии визирования с направлением движения цели через η, угол упреждения между скоростью точки B и линией визирования через γ, угол между скоростью точки B и направлением движения цели через ψ.

Рассмотрим абсолютное движение точки B как сложное, состоящее из переносного движения вместе с целью и относительного движения по отношению к цели.

Согласно теореме сложения скоростей имеем

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_s + \mathbf{v}_r, \tag{1}$$

где $\mathbf{v}_r$ – относительная скорость точки B по отношению к цели. Проекции относительной скорости на радиус-вектор, соединяющий точку B с целью, и на перпендикуляр к этому радиусу даются формулами

$$v_{r\rho} = \dot{b}, \tag{2}$$

$$v_{r\eta} = b\dot{\eta}. \tag{3}$$

С другой стороны, проектируя равенство (1) на те же оси координат,

имеем

$$v_{r\rho} = \dot b = v_s\cos\eta - v\cos(\eta - \psi), \tag{4}$$

$$v_{r\eta} = b\dot\eta = -v_s\sin\eta + v\sin(\eta - \psi). \tag{5}$$

К этим двум дифференциальным уравнениям следует добавить уравнение пропорционального сближения:

$$\dot\psi = 2\dot\eta. \tag{6}$$

Преобразуем эту систему дифференциальных уравнений, перейдя к переменным b и γ, где γ – угол упреждения. Имеем

$$\gamma + \psi = \eta \tag{7}$$

или

$$\dot\gamma + \dot\psi = \dot\eta. \tag{8}$$

Сопоставляя уравнения (6) и (8), находим, что

$$\dot\gamma = -\dot\eta = -\frac{1}{2}\dot\psi. \tag{9}$$

Уравнения (4), (5) могут быть представлены в виде замкнутой системы:

$$\dot b = v_s\cos(\gamma + \psi) - v\cos\gamma, \tag{10}$$

$$b\dot\eta = -v_s\sin(\gamma + \psi) + v\sin\gamma, \tag{11}$$

$$\dot\psi = 2\dot\eta = -2\dot\gamma. \tag{12}$$

Уравнение (12) интегрируется непосредственно:

$$\gamma = -\eta + c = -(\gamma + \psi) + c, \tag{13}$$

где $c = \gamma_0 + \eta_0$. Уравнения (10) и (11) могут быть представлены при помощи (13) так:

$$\dot b = v_s\cos(c - \gamma) - v\cos\gamma, \tag{14}$$

$$b\dot\eta = -v_s\sin(c - \gamma) + v\sin\gamma. \tag{15}$$

Разделив уравнение (14) на уравнение (15) и учитывая (12), находим

$$\frac{\dot b}{b} = \frac{v_s\cos(c - \gamma) - v\cos\gamma}{v_s\sin(c - \gamma) - v\sin\gamma}\dot\gamma. \tag{16}$$

Обозначая отношение скоростей точки B и цели $v/v_s = p$, имеем

$$\frac{\dot b}{b} = \frac{(p - \cos c)\cos\gamma - \sin c\sin\gamma}{(p + \cos c)\sin\gamma - \sin c\cos\gamma}\dot\gamma. \tag{17}$$

Это уравнение может быть проинтегрировано.

Полагая в начальный момент $b = b_0$ и $\gamma = \gamma_0$ при $t = 0$ и вычисляя от обеих частей равенства (17) определенный интеграл

$$\int_{b_0}^{b} \frac{db}{b} = \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{(p - \cos c)\cos\gamma - \sin c \sin\gamma}{(p + \cos c)\sin\gamma - \sin c\cos\gamma} d\gamma, \tag{18}$$

получаем

$$b = b_0 \left[\frac{p\sin\gamma + \sin(\gamma - c)}{p\sin\gamma_0 + \sin(\gamma_0 - c)} \right]^{\frac{p^2 - 1}{p^2 + 2p\cos c + 1}} e^{\frac{2p(\gamma_0 - \gamma)\sin c}{p^2 + 2p\cos c + 1}}. \tag{19}$$

Это и есть уравнение относительной траектории точки B, преследующей цель по методу пропорционального сближения.

Из уравнения (15), учитывая (19), находим угловую скорость линии визирования и угловую скорость поворота вектора скорости точки B:

$$\dot\eta = -\dot\gamma = \frac{v_s}{b_0}(p\sin\gamma_0 - \sin\eta_0)\left[\frac{b}{b_0}\right]^{\frac{2(1 + p\cos c)}{p^2 - 1}} e^{\frac{2p(\gamma - \gamma_0)\sin c}{p^2 - 1}}. \tag{20}$$

Из этого уравнения видно, что вблизи цели, когда $b \to 0$ (в предположении, что $p > 1$)

$$\lim_{b \to 0} \dot\eta = 0, \text{ если } p\cos c > -1, \tag{21}$$

$$\lim_{b \to 0} \dot\eta = \infty, \text{ если } p\cos c < -1. \tag{22}$$

Зная $\dot\eta$ и, следовательно, $\dot\psi$, находим модуль нормального ускорения точки B по формуле

$$a_n = |v\dot\psi| = |2v\dot\gamma|. \tag{23}$$

Задача 5.29. Найти траекторию точки B, управляемой по закону пропорционального сближения, если навигационная постоянная $\beta = 3$ и $\epsilon_0 = (\beta\eta_0 - \psi_0)/(\beta - 1) = 0$. Определить также угловую скорость вращения линии визирования (см. рисунок).

Решение. Преобразуем систему уравнений пропорциональной навигации:

$$\dot\psi = \beta\dot\eta, \tag{1}$$

$$\dot b = v_s\cos\eta - v\cos(\eta - \psi), \tag{2}$$

$$b\dot\eta = -v_s\sin\eta + v\sin(\eta - \psi), \tag{3}$$

исключив угол ψ. Интегрируя уравнение (1), находим

$$\psi = \beta\eta + \psi_0 - \beta\eta_0, \tag{4}$$

где ψ_0 и η_0 — начальные значения соответствующих переменных. Введем постоянную величину ϵ_0, определяемую равенством

$$\epsilon_0 = \frac{\beta\eta_0 - \psi_0}{\beta - 1}. \tag{5}$$

Тогда уравнения (2) и (3) примут вид

$$\dot{b} = v_s[\cos\eta - p\cos(\beta - 1)(\eta - \epsilon_0)], \tag{6}$$

$$b\dot{\eta} = -v_s[\sin\eta + p\sin(\beta - 1)(\eta - \epsilon_0)], \tag{7}$$

где, как и ранее, введено обозначение $p = v/v_s$.

Для нахождения траектории разделим (6) на (7):

$$\frac{db}{b} = \frac{p\cos[(\beta - 1)(\eta - \epsilon_0)] - \cos\eta}{p\sin[(\beta - 1)(\eta - \epsilon_0)] - \sin\eta}, \tag{8}$$

откуда

$$\ln\frac{b}{b_0} = \int\limits_{\eta_0}^{\eta} \frac{p\cos[(\beta - 1)(\eta - \epsilon_0)] - \cos\eta}{p\sin[(\beta - 1)(\eta - \epsilon_0)] + \sin\eta}. \tag{9}$$

Представим это равенство в виде

$$\ln\frac{b}{b_0} = \int\limits_{\eta_0}^{\eta} \frac{p\cos[(\beta - 1)(\eta - \epsilon_0)] + \dfrac{1}{\beta - 1}\cos\eta}{p\sin[(\beta - 1)(\eta - \epsilon_0)] + \sin\eta}\,d\eta -$$

$$- \int\limits_{\eta_0}^{\eta} \frac{\dfrac{1}{\beta - 1}\cos\eta + \cos\eta}{p\sin[(\beta - 1)(\eta - \epsilon_0)] + \sin\eta}\,d\eta =$$

$$= \frac{1}{\beta - 1}\ln\{p\sin[(\beta - 1)(\eta - \epsilon_0)] + \sin\eta\}\Big|_{\eta_0}^{\eta} -$$

$$- \frac{\beta}{\beta - 1}\int\limits_{\eta_0}^{\eta} \frac{\cos\eta\, d\eta}{p\sin[(\beta - 1)(\eta - \epsilon_0)] + \sin\eta}. \tag{10}$$

Внося в это равенство $\beta = 3$ и $\epsilon_0 = 0$, находим

$$\ln\frac{b}{b_0} = \frac{1}{2}\ln\frac{p\sin 2\eta + \sin\eta}{p\sin 2\eta_0 + \sin\eta_0} - \frac{3}{2}\int\limits_{\eta_0}^{\eta} \frac{\cos\eta\, d\eta}{p\sin 2\eta + \sin\eta}. \tag{11}$$

Для вычисления последнего интеграла применим подстановку

$$\cos\eta = z.$$

Тогда

$$\int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\cos\eta\,d\eta}{p\sin 2\eta + \sin\eta} = \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\cos\eta\,d\eta}{\sin\eta(1 + 2p\cos\eta)} = \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\cos\eta\sin\eta\,d\eta}{\sin^2\eta(1 + 2p\cos\eta)} =$$

$$= \int_{z_0}^{z} \frac{-z\,dz}{(1 - z^2)(1 + 2pz)} = \frac{1}{2(1 + 2p)}\ln(1 - \cos\eta) +$$

$$+ \frac{1}{2(1 - 2p)}\ln(1 + \cos\eta) + \frac{1}{4p^2 - 1}\ln(1 + 2p\cos\eta)\Big|_{\eta_0}^{\eta}. \qquad (12)$$

Подставляя это значение в (11) и учитывая, что

$$\frac{1}{2}\ln\sin\eta = \frac{1}{4}\ln(1 - \cos^2\eta) = \frac{1}{4}\ln(1 - \cos\eta) + \frac{1}{4}\ln(1 + \cos\eta),$$

находим окончательно уравнение относительной траектории точки:

$$\frac{b}{b_0} = \left|\frac{1 - \cos\eta}{1 - \cos\eta_0}\right|^{\frac{p-1}{2(1+2p)}} \times$$

$$\times \left|\frac{1 + \cos\eta}{1 + \cos\eta_0}\right|^{\frac{p+1}{2(2p-1)}} \left|\frac{1 + 2p\cos\eta}{1 + 2p\cos\eta_0}\right|^{\frac{2(p^2-1)}{4p^2-1}}. \qquad (13)$$

Далее находим, пользуясь (1) и (3), угловую скорость вращения линии визирования:

$$\dot\eta = -\frac{v_s}{b}\sin\eta(1 + 2p\cos\eta), \qquad (14)$$

где b определяется уравнением (13).

Пропорциональное сближение является обобщением ранее известных методов самонаведения. Действительно, если положить $\beta = 1$ и проинтегрировать уравнение $\dot\psi = \dot\eta$, то, считая произвольную постоянную интегрирования равной нулю, получим преследование по кривой погони; если же произвольная постоянная интегрирования не равна нулю, то точка B будет преследовать цель по кривой постоянного угла упреждения ($\gamma = \text{const}$). Если положить $\dot\eta = 0$, или $\beta = \infty$, то будет иметь место параллельное сближение.

Идея пропорциональной навигации заключается в борьбе с тенденцией к вращению линии визирования, соединяющей точку B с целью. Вследствие этого траектория точки B приближается к прямолинейной траектории параллельного сближения. Поэтому пропорциональное

сближение является одним из наиболее перспективных методов самонаведения.

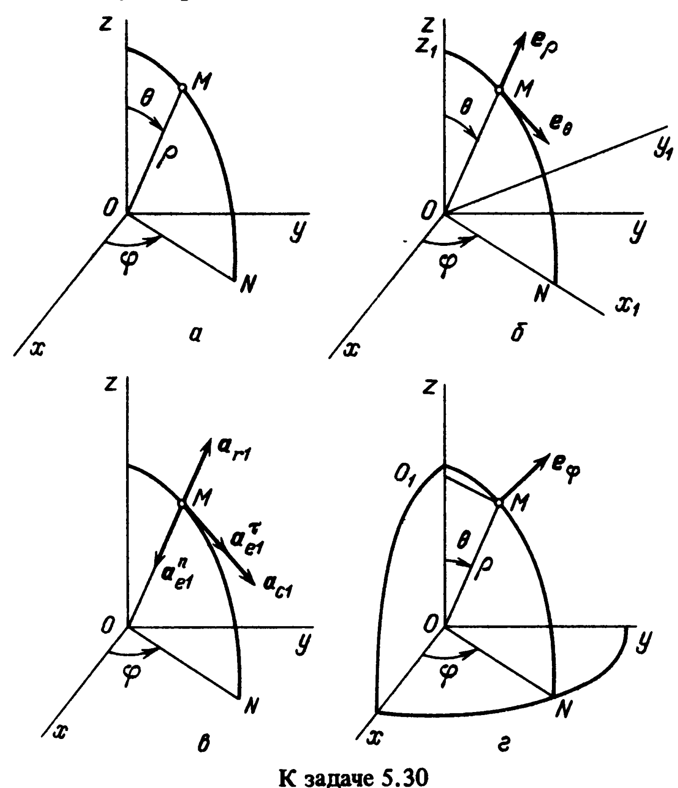
Задача 5.30. Движение точки задано в сферических координатах уравнениями

$$\rho = \rho(t), \tag{1}$$

$$\varphi = \varphi(t), \tag{2}$$

$$\theta = \theta(t). \tag{3}$$

Рассматривая движение точки как сложное, найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки.



К задаче 5.30

Р е ш е н и е. Изобразим (рис. *а*) точку M в произвольный момент времени. Одновременное изменение трех ее сферических координат во времени можно представить как сложное движение, состоящее из трех движений: 1) точка M движется вдоль своего радиуса OM согласно закону $\rho = \rho(t)$; 2) радиус OM вращается в плоскости zOM так, что угол $\theta = \theta(t)$; 3) плоскость zOM поворачивается вокруг оси z по закону $\varphi = \varphi(t)$.

Отметим линию ON – пересечение плоскости zOM с координатной плоскостью xOy (рис. *а*).

Движение будем рассматривать последовательно – сначала на первое движение наложим второе, а затем на полученное составное движение наложим третье движение.

Свяжем с плоскостью zON систему координат. Ось x_1 направим вдоль ON, ось z_1 совместим с осью z, ось y_1 направим так, чтобы получилась правая система координат. Эту систему координат назовем первой абсолютной. С движущимся радиусом OM свяжем подвижную систему координат, орты которой $\mathbf{e}_\rho$ и $\mathbf{e}_\theta$ показаны на рис. *б*. Движение точки вдоль радиуса OM по закону $\rho = \rho(t)$ является относительным движением, которое назовем первым относительным движением, и обозначим закон этого движения

$$s_{r1} = \rho(t). \tag{4}$$

Поворот радиуса OM с изменением угла $\theta = \theta(t)$, при котором движется система координат $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta)$, определяет переносное движение точки. Назовем поворот радиуса первым переносным движением

$$\theta_{e1} = \theta(t). \tag{5}$$

Заметим, что поворот на угол θ совершается вокруг оси y_1.

Движение точки M в плоскости zON, т.е. движение по отношению к системе координатных осей x_1, y_1, z_1, назовем первым абсолютным движением.

Вычислим составляющие скорости и ускорения точки M в ее первом относительном, первом переносном и первом абсолютном движениях.

Первая относительная скорость точки M по модулю равна

$$v_{r1} = \dot{s}_{r1} = \dot{\rho}. \tag{6}$$

Вектор первой относительной скорости направлен из точки M по продолжению радиуса OM (если $\dot{\rho} > 0$) или к центру O (если $\dot{\rho} < 0$) и может быть записан как

$$\mathbf{v}_{r1} = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho. \tag{7}$$

Первая переносная скорость точки M определяется как вращательная скорость:

$$v_{e1} = \omega_{e1} \cdot h_{e1}, \tag{8}$$

где ω_{e1} – угловая скорость переносного вращения, а h_{e1} – кратчайшее расстояние точки от оси переносного вращения, которая совпадает с осью y_1,

$$\omega_{e1} = \dot{\theta}, \tag{9}$$

$$h_{e1} = OM = \rho. \tag{10}$$

После подстановки (9) и (10) в (8) первая переносная скорость

$$v_{e1} = \rho\dot{\theta}. \tag{11}$$

Направлена эта скорость перпендикулярно радиусу OM в сторону изменения угла θ. Вектор первой переносной скорости может быть записан в виде

$$\mathbf{v}_{e1} = \rho\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta. \tag{12}$$

Согласно теореме сложения скоростей первая абсолютная скорость равна геометрической сумме первой относительной и первой переносной скоростей:

$$\mathbf{v}_{a1} = \mathbf{v}_{r1} + \mathbf{v}_{e1} = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta. \tag{13}$$

Согласно теореме сложения ускорений первое абсолютное ускорение равно

$$\mathbf{a}_{a1} = \mathbf{a}_{r1} + \mathbf{a}_{e1} + \mathbf{a}_{c1}, \tag{14}$$

где последнее слагаемое – кориолисово ускорение, которое равно

$$\mathbf{a}_{c1} = 2(\vec{\omega}_{e1} \times \mathbf{v}_{r1}). \tag{15}$$

Первое относительное ускорение $\mathbf{a}_{r1}$ имеет одну составляющую $\mathbf{a}^\tau_{r1}$, так как первое относительное движение – прямолинейное. По модулю

$$a^\tau_{r1} = \frac{dv_{r1}}{dt} = \frac{d^2 s_{r1}}{dt^2} = \ddot{\rho}. \tag{16}$$

Направлено это ускорение вдоль радиуса OM. Оно совпадает с вектором $\mathbf{e}_\rho$, если $\ddot{\rho} > 0$, и противоположно $\mathbf{e}_\rho$, если $\ddot{\rho} < 0$. Вектор первого относительного ускорения записываем в виде

$$\mathbf{a}_{r1} = \mathbf{a}^\tau_{r1} = \ddot{\rho}\mathbf{e}_\rho. \tag{17}$$

Первое переносное ускорение имеет две составляющие – касательную и нормальную. Первое переносное касательное ускорение равно

$$a^\tau_{e1} = \epsilon_{e1} h_{e1},$$

где ϵ_{e1} – угловое ускорение поворота радиуса OM – равно $\epsilon_{e1} = \ddot{\theta}$, а радиус первого переносного вращения равен $h_{e1} = \rho$.

Тогда (рис. *в*)

$$a^\tau_{e1} = \ddot{\theta}\rho. \tag{18}$$

Направление вектора $\mathbf{a}^\tau_{e1}$ совпадает с ортом $\mathbf{e}_\theta$, если $\ddot{\theta} > 0$. Можно записать вектор $\mathbf{a}^\tau_{e1}$ в виде (рис. *в*)

$$\mathbf{a}^\tau_{e1} = \ddot{\theta}\rho\mathbf{e}_\theta. \tag{19}$$

Первое переносное нормальное ускорение равно $a^n_{e1} = \omega^2_{e1} h_{e1} = \dot{\theta}^2\rho$ и

направлено по MO к центру, так что в векторной записи получается (рис. *в*)

$$a_{e1}^n = -\dot{\theta}^2 \rho e_\rho. \tag{20}$$

Определим теперь первое кориолисово ускорение по формуле (15). Вектор первой переносной угловой скорости ω_{e1} направлен вдоль оси y_1. Вектор первой относительной скорости $v_{r1} = \dot{\rho} e_\rho$ лежит в плоскости z_1Ox_1. Угол между $\vec{\omega}_{e1}$ и v_{r1} равен 90°. Применяя правило Жуковского, получаем, что первое кориолисово ускорение направлено по e_θ. По модулю оно равно $a_{c1} = 2\omega_{e1}v_{r1}\sin 90° = 2\dot{\theta}\dot{\rho}$. Вектор первого ускорения Кориолиса (рис. *в*)

$$a_{c1} = 2\dot{\theta}\dot{\rho}e_\theta. \tag{21}$$

Все четыре составляющие первого абсолютного ускорения изображены на рис. *в*. Подставляя их в (14), получаем векторную формулу

$$a_{a1} = \ddot{\rho}e_\rho + \ddot{\theta}\rho e_\theta - \dot{\theta}^2\rho e_\rho + 2\dot{\theta}\dot{\rho}e_\theta = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)e_\rho + (\ddot{\theta}\rho + 2\dot{\theta}\dot{\rho})e_\theta. \tag{22}$$

Заметим, что не имеет смысла находить модуль первого абсолютного ускорения, поскольку этот промежуточный результат не спрашивается в задаче.

Рассмотренное первое абсолютное движение составлено из двух движений – движения точки M вдоль радиуса по закону $\rho = \rho(t)$ и поворота радиуса с изменением угла по формуле $\theta = \theta(t)$. Наложим на это составное движение еще один вид движения – поворот плоскости zON при изменении ее угла с плоскостью xOz по заданному закону $\varphi = \varphi(t)$. Первое абсолютное движение точки – движение ее по отношению к плоскости zON – будем считать теперь относительным движением. Назовем его вторым относительным движением. Подвижную систему координат $x_1y_1z_1$, связанную с плоскостью zON, назовем второй относительной системой координат. Неподвижную систему координат xyz назовем второй абсолютной системой координат. Движение плоскости zON (и связанной с ней системы $x_1y_1z_1$) по отношению к абсолютной системе координат xyz – это вращательное движение вокруг оси z по закону $\varphi = \varphi(t)$. Это движение – второе переносное движение. При наложении на составное движение еще одного движения найденная ранее первая абсолютная скорость (13) становится второй относительной скоростью:

$$v_{a1} = v_{r2} = \dot{\rho}e_\rho + \rho\dot{\theta}e_\theta. \tag{23}$$

Первое абсолютное ускорение (22) становится в новом составе движений вторым относительным ускорением:

$$a_{r2} = a_{a1} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)e_\rho + (\ddot{\theta}\rho + 2\dot{\theta}\dot{\rho})e_\theta. \tag{24}$$

Запишем теорему сложения скоростей в новом составном движении:

$$v_{a2} = v_{r2} + v_{e2}. \tag{25}$$

Первая составляющая $\mathbf{v}_{r2}$ уже известна, определим $\mathbf{v}_{e2}$. Модуль этой вращательной скорости $v_{e2} = \omega_{e2} h_{e2}$, где $\omega_{e2} = \dot{\varphi}$ – угловая скорость поворота плоскости zON, а h_{e2} – кратчайшее расстояние точки M от оси второго переносного поворота z. Из рис. *г* видно, что $h_{e2} = O_1M = \rho \sin\theta$. Тогда

$$v_{e2} = \dot{\varphi}\rho \sin\theta. \tag{26}$$

Вектор $\mathbf{v}_{e2}$ направлен по касательной к окружности радиусом O_1M, параллельной плоскости xOy. Обозначим направление касательной единичным вектором $\boldsymbol{e}_\varphi$ (вектор $\boldsymbol{e}_\varphi$ направляем в сторону возрастания угла φ). Можно записать вектор второй переносной скорости в виде

$$\mathbf{v}_{e2} = \dot{\varphi}\rho \sin\theta \cdot \boldsymbol{e}_\varphi. \tag{27}$$

Подставляя (23) и (27) в (25), получаем

$$\mathbf{v}_{a2} = \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{\varphi}\rho \sin\theta \cdot \boldsymbol{e}_\varphi. \tag{28}$$

Все три слагаемых в правой части (28) взаимно перпендикулярны, поэтому модуль абсолютной скорости равен

$$v_a = v_{a2} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\theta})^2 + (\rho\dot{\varphi}\sin\theta)^2}. \tag{29}$$

Перейдем к нахождению абсолютного ускорения. Для второго абсолютного движения теорема сложения ускорений записывается в виде

$$\boldsymbol{a}_{a2} = \boldsymbol{a}_{r2} + \boldsymbol{a}_{e2} + \boldsymbol{a}_{c2}. \tag{30}$$

Второе относительное ускорение уже найдено и записано формулой (24). Определим второе переносное ускорение. Второе переносное движение – вращательное, так что ускорение может иметь две составляющие – касательную и нормальную. Второе переносное касательное ускорение по модулю равно

$$a_{e2}^\tau = \epsilon_{e2} h_{e2} = \ddot{\varphi}\rho \sin\theta$$

и направлено, как и вторая переносная скорость, вдоль касательной к параллели. Вектор $\boldsymbol{a}_{e2}$ совпадает с $\boldsymbol{e}_\varphi$, если $\ddot{\varphi} > 0$, и противоположен $\boldsymbol{e}_\varphi$, если $\ddot{\varphi} < 0$. Можно записать вектор $\boldsymbol{a}_{e2}^\tau$ в виде

$$\boldsymbol{a}_{e2}^\tau = \ddot{\varphi}\rho \sin\theta \cdot \boldsymbol{e}_\varphi. \tag{31}$$

Второе переносное нормальное ускорение равно

$$a_{e2}^n = \omega_{e2}^2 h_{e2} = \dot{\varphi}^2 \rho \sin\theta. \tag{32}$$

Вектор его направлен из точки M к оси переносного вращения z, по линии MO_1 (рис. *г*). Поскольку ранее найденные четыре составляющие абсолютного ускорения, лежащие в плоскости zON, направлены по осям с ортами $\boldsymbol{e}_\rho$, $\boldsymbol{e}_\theta$, удобно и вектор $\boldsymbol{a}_{e2}^n$ разложить по направлениям $\boldsymbol{e}_\rho$, $\boldsymbol{e}_\theta$. Из

рис. *б* легко определить проекции a^n_{e2} на направления векторов e_ρ и e_θ. Они соответственно равны $-a^n_{e2}\cos(90^\circ - \theta)$ и $-a^n_{e2}\cos\theta$. Вектор a^n_{e2} можно записать в виде

$$a^n_{a2} = -a^n_{e2}\sin\theta \cdot e_\rho - a^n_{e2}\cos\theta \cdot e_\theta.$$

Подставляя в это разложение величину a^n_{e2}, полученную в (32), находим

$$a^n_{e2} = -\dot\varphi^2\rho\sin^2\theta \cdot e_\rho - \dot\varphi^2\rho\sin\theta\cos\theta \cdot e_\theta. \tag{33}$$

Найдем последнюю составляющую второго абсолютного ускорения – второе кориолисово ускорение. Оно определяется формулой

$$a_{c2} = 2(\vec\omega_{e2} \times \mathbf{v}_{r2}). \tag{34}$$

Так как $\mathbf{v}_{r2} = \mathbf{v}_{a1} = \mathbf{v}_{r1} + \mathbf{v}_{e1}$, получаем

$$a_{c2} = 2[\vec\omega_{e2} \times (\mathbf{v}_{r1} + \mathbf{v}_{e1})]. \tag{35}$$

Вектор $\vec\omega_{e2}$ направлен вдоль оси z и его модуль равен $\dot\varphi$. Вектор $\mathbf{v}_{r1}$ направлен вдоль радиуса OM. Угол между этими двумя векторами равен θ. Векторное произведение их перпендикулярно плоскости zOM и совпадает по направлению с e_φ (или противоположно e_φ, в зависимости от знаков $\dot\varphi$ и $\dot\rho$). Вектор $\mathbf{v}_{e1}$ направлен вдоль орта e_θ и составляет с вектором $\vec\omega_{e2}$, направленным вдоль оси z, угол $90^\circ + \theta$. Векторное произведение $(\vec\omega_{e2} \times \mathbf{v}_{e1})$ направлено перпендикулярно плоскости zOM, т.е. вдоль e_φ. Можно записать второе кориолисово ускорение (35) в виде

$$a_{c2} = 2\omega_{e2}v_{r1}\sin\theta \cdot e_\varphi + 2\omega_{e2}v_{e1}\sin(90^\circ + \theta)\cdot e_\varphi =$$
$$= 2\omega_{e2}(v_{r1}\sin\theta + v_{e1}\cos\theta)e_\varphi.$$

Подставив сюда значения $\omega_{e2} = \dot\varphi$, $v_{r1} = \dot\rho$ и $v_{e1} = \dot\theta\rho$, получаем окончательный вид записи вектора второго кориолисова ускорения:

$$a_{c2} = (2\dot\varphi\dot\rho\sin\theta + 2\rho\dot\varphi\dot\theta\cos\theta)e_\varphi. \tag{36}$$

Подставим в формулу абсолютного ускорения (30) выражения (24), (31), (32) и (36) для векторов $a_{r2}, a^\tau_{e2}, a^n_{e2}$ и a_{c2} в порядке их следования

$$a_{a2} = \ddot\rho e_\rho + \ddot\theta\rho e_\theta - \rho\dot\theta^2 e_\rho + 2\dot\rho\dot\theta e_\theta + \ddot\varphi\rho\sin\theta \cdot e_\varphi - \dot\varphi^2\rho\sin^2\theta \cdot e_\rho -$$
$$- \dot\varphi^2\rho\sin\theta\cos\theta \cdot e_\theta + (2\dot\rho\dot\varphi\sin\theta + 2\rho\dot\varphi\dot\theta\cos\theta)e_\varphi. \tag{37}$$

Сгруппируем составляющие по отдельным ортам:

$$a_{a2} = (\ddot\rho - \rho\dot\theta^2 - \rho\dot\varphi^2\sin^2\theta)e_\rho + (\ddot\varphi\rho\sin\theta + 2\dot\varphi\dot\rho\sin\theta + 2\rho\dot\varphi\dot\theta\cos\theta)e_\varphi +$$
$$+ (\ddot\theta\rho + 2\dot\rho\dot\theta - \rho\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta)e_\theta. \tag{38}$$

Орты e_ρ, e_φ, e_θ взаимно перпендикулярны, так что модуль абсолютного

17 Заказ № 899

ускорения

$$a_{a2} = [(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 - \rho\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)^2 + (\ddot{\varphi}\rho\sin\theta + 2\dot{\varphi}\dot{\rho}\sin\theta + 2\rho\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta)^2 +$$

$$+ (\ddot{\theta}\rho + 2\dot{\rho}\dot{\theta} - \rho\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)^2]^{1/2}. \qquad (39)$$

Это и есть искомое абсолютное ускорение.

Указание. Для приобретения навыков в решении задач на сложение ускорений рекомендуется решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 23.1, 23.3, 23.5, 23.7, 23.9, 23.10, 23.12–23.14, 23.18–23.20, 23.24, 23.26, 23.27, 23.39, 23.47–23.49, 23.52, 23.56, 23.59, 23.62–23.65.

§ 5. КИНЕМАТИКА КОЛЕБАНИЙ

1. Гармонические колебания. *Колебаниями,* или колебательным процессом, называется такое изменение некоторой величины, при котором она последовательно возрастает и убывает. Простейшим и в то же время важнейшим типом колебаний является *гармоническое* колебательное движение.

Рассмотрим окружность радиусом b (рис. 5.4). Проведем через центр окружности точку O два взаимно перпендикулярных диаметра. Направление горизонтального диаметра примем за ось x, а ось y направим по вертикальному диаметру. Пусть радиус OA вращается равномерно вокруг центра O с угловой скоростью k. Положение радиуса OA_0 в начальный момент времени $t = 0$ определяется углом β. Тогда угол поворота радиуса OA определяется формулой

$$\varphi = kt + \beta. \qquad (1^*)$$

Опустим из точки A перпендикуляр на ось x и напишем уравнение движения точки B

$$x = b\sin(kt + \beta). \qquad (2^*)$$

Это – уравнение гармонических колебаний. Здесь b – амплитуда наибольшего удаления точки от ее среднего положения. Расстояние между крайними положениями точки называется *размахом* колебаний. Угол φ, определяемый формулой (1*), называется *фазой* колебания, а угол β – *начальной фазой.* Период колебания – промежуток времени, в течение которого точка совершает одно полное колебание, равен

$$T = \frac{2\pi}{k}. \qquad (3^*)$$

Обратная величина

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi} \tag{4*}$$

называется *частотой* колебаний и измеряется числом колебаний в единицу времени. Если за единицу времени принять секунду, то частота колебаний измеряется в *герцах* (в честь Г. Герца, первого исследователя электрических колебаний). Величина k называется *круговой* или *циклической*

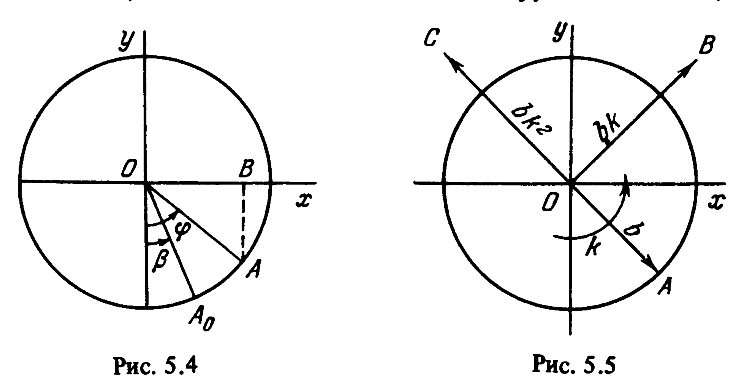


Рис. 5.4 Рис. 5.5

частотой. Как видно из (4*), величина k равна числу колебаний в 2π единиц времени (например, в 2π секунд).

Если рассматривать OA как вектор, вращающийся с угловой скоростью k, то гармоническое колебание изображается его горизонтальной проекцией, точкой B. Скорость точки при гармоническом колебании будет

$$v_x = \dot{x} = bk\cos(kt+\beta) \tag{5*}$$

и ее ускорение

$$a_x = \ddot{x} = -bk^2\sin(kt+\beta). \tag{6*}$$

Тогда перемещение, скорость и ускорение точки, совершающей гармонические колебания, могут быть представлены простой векторной диаграммой (рис. 5.5), где проекция v_x скорости движения представляется горизонтальной проекцией вектора $\overline{OB}$ длиной bk, повернутого на 90° по отношению к вектору $\overline{OA}$ длиной b в ту же сторону, что и направление вращения; проекция a_x ускорения точки представлена горизонтальной проекцией вектора $\overline{OC}$ длиной bk^2, повернутого на 180° по отношению к вектору $\overline{OA}$. Все эти три вектора вращаются с угловой скоростью k вокруг центра O. Таким образом, дифференцирование уравнения движения точки можно трактовать как поворот изображающего вектора на 90° в сторону вращения с одновременным его умножением на k.

У к а з а н и е. При решении задач на кинематику гармонического колебательного движения рекомендуется такая последовательность действий:

1) выбрать систему координат;

2) составить уравнения гармонического колебательного движения;

3) сложив гармонические колебательные движения, получить уравнение результирующего движения;

4) определить скорость и ускорение точки при гармонических колебаниях;

5) определить траекторию точки при сложении гармонических колебаний, не направленных по одной прямой.

Задача 5.31. Точка совершает гармонические колебания вдоль горизонтальной оси x. Размах колебаний равен 20 см. Продолжительность десяти размахов равна 5 с. Полагая, что точка в начальный момент $t = 0$ находилась в крайнем правом положении, составить уравнение движения точки.

Определить скорость и ускорение точки.

Р е ш е н и е. Уравнение гармонических колебаний точки имеет вид

$$x = b\sin(kt+\beta). \tag{1}$$

Найдем значения постоянных b, k, β, исходя из условий задачи. Амплитуда гармонических колебаний равна половине размаха колебаний. Следовательно,

$$b = 10 \text{ см}.$$

Период колебаний определится из условия, что продолжительность десяти размахов, т.е. пяти полных колебаний, равна 5 с. Следовательно, продолжительность одного полного колебания или период колебаний будет

$$T = 1 \text{ с}.$$

Коэффициент k определится из формулы (3*) для периода колебаний:

$$k = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \text{ рад/с}.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в (1), находим

$$x = 10\sin(2\pi t+\beta). \tag{2}$$

Для определения начальной фазы β воспользуемся начальным условием: при $t = 0$ точка находилась в крайнем правом положении. Следовательно, при $t = 0$ координата $x = b = 10$ см. Внося эти зачения в (2), получим

$$10 = 10\sin\beta,$$

откуда $\sin\beta = 1$ и $\beta = \pi/2$.

Теперь уравнение гармонического колебательного движения примет вид

$$x = 10\sin(2\pi t + \pi/2)$$

или, окончательно,

$$x = 10\cos 2\pi t.$$

При прямолинейном движении проекция скорости точки на ось равна первой производной от координаты по времени

$$v_x = \dot{x} = -20\pi \sin 2\pi t.$$

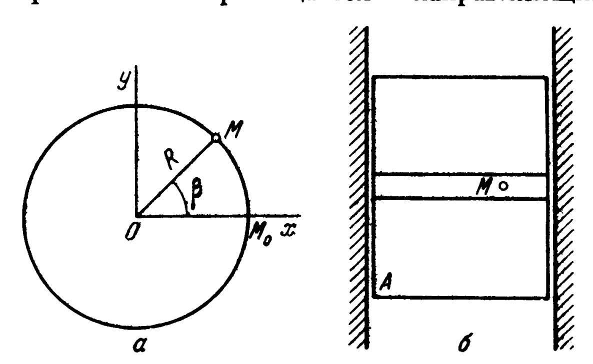
Проекция ускорения точки на ось x равна второй производной от координаты по времени

$$a_x = \ddot{x} = -40\pi^2 \cos 2\pi t = -4\pi^2 x. \qquad (3)$$

Из (3) следует, что ускорение точки при гармонических колебаниях всегда пропорционально отклонению и направлено к центру колебаний.

Задача 5.32. Точка M движется по окружности радиусом $R = 10$ см согласно уравнению $s = 5t$ см, где s – путь, пройденный по дуге.

В начальный момент точка M находилась в M_0 (рис. *а*). Описанное равномерное движение точки M по окружности может быть осуществлено при помощи механизма, представленного на рис. *б*. Механизм состоит из ползуна A, который может перемещаться в направляющих по вертикали.



К задаче 5.32

В ползуне имеется горизонтальный паз, в котором движется точка M, участвующая при одновременном движении ползуна и точки по пазу в сложном абсолютном движении.

Определить уравнения относительного и переносного движений, которые надо сообщить: первое относительное – точке M вдоль горизонтального паза, а второе поступательное – ползуну A в вертикальных направляющих, чтобы осуществить заданное абсолютное движение точки.

Р е ш е н и е. Определяем угол $M_0OM = \beta$, который составляет радиус OM с осью Ox:

$$\beta = \frac{\overset{\smile}{M_0M}}{R} = \frac{s}{R} = \frac{5t}{10} = 0{,}5t.$$

Зная угол β, находим уравнения относительного движения точки

$$x_1 = R\cos\beta = 10\cos 0{,}5t, \quad y_1 = 0.$$

Уравнения переносного движения основания механизма будут

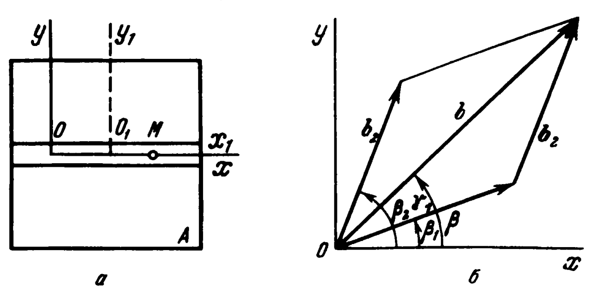
$$x_0 = 0, \quad y_0 = R\sin\beta = 10\sin 0{,}5t.$$

Таким образом, равномерное движение точки по окружности всегда может быть разложено на два взаимно перпендикулярных, прямолинейных гармонических колебательных движения.

Задача 5.33. Точка M движется прямолинейно в направляющих, прикрепленных жестко к доске A, по закону

$$b_1 = b_1\cos(kt + \beta_1),$$

совершая гармонические колебания около точки O_1 (рис. *а*). Доска движется в направлении, параллельном O_1x_1, совершая гармонические колебания той же частоты около неподвижной точки O.



К задаче 5.33

Определить абсолютное движение точки M, если закон колебаний доски A определяется уравнением

$$x_0 = b_2\cos(kt + \beta_2),$$

где $x_0 = OO_1$.

Р е ш е н и е. Выберем абсолютную систему координат xy с началом в неподвижной точке O так, чтобы ось x совпала с относительной осью x_1. Тогда абсолютное движение точки определится координатой

$$x = OM = x_0 + x_1 = b_1\cos(kt + \beta_1) + b_2\cos(kt + \beta_2). \quad (1)$$

Таким образом, задача сводится к сложению двух гармонических колеба-

ний одинаковой частоты и, следовательно, одинакового периода, отличающихся амплитудами и начальными фазами. Раскрывая в правой части (1) косинусы суммы двух углов, находим

$$x = (b_1 \cos\beta_1 + b_2 \cos\beta_2)\cos kt - (b_1 \sin\beta_1 + b_2 \sin\beta_2)\sin kt. \qquad (2)$$

Введем новые постоянные b и β, связанные с исходными величинами следующими равенствами:

$$b\cos\beta = b_1\cos\beta_1 + b_2\cos\beta_2, \quad b\sin\beta = b_1\sin\beta_1 + b_2\sin\beta_2. \qquad (3)$$

Тогда уравнение (2) примет вид

$$x = b\cos\beta\cos kt - b\sin\beta\sin kt = b\cos(kt+\beta). \qquad (4)$$

Таким образом, при сложении двух гармонических колебаний одинаковой частоты получается гармоническое колебание той же частоты. Амплитуда этого колебания b и начальная фаза β определяются из уравнений (3). Возводя эти уравнения в квадрат и складывая, находим амплитуду результирующего колебания

$$b^2 = b_1^2 + b_2^2 + 2b_1b_2(\cos\beta_1\cos\beta_2 + \sin\beta_1\sin\beta_2) =$$
$$= b_1^2 + b_2^2 + 2b_1b_2\cos(\beta_1 - \beta_2). \qquad (5)$$

Начальную фазу колебания находим, разделив второе из уравнений (3) на первое:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b_1\sin\beta_1 + b_2\sin\beta_2}{b_1\cos\beta_1 + b_2\cos\beta_2}. \qquad (6)$$

Из формул (5) и (6) вытекает следующий простой геометрический способ определения результирующего колебания. Отложим из начала координат O (рис. б) под углом β_1 к оси x вектор длиной b_1 и под углом β_2 к оси x вектор длиной b_2. Найдем сумму этих двух векторов как диагональ параллелограмма, построенного на этих векторах. Длина диагонали соответствует амплитуде результирующего колебания, а угол ее наклона к оси x определяет начальную фазу этого колебания.

Этот прием геометрического сложения двух гармонических колебаний *одинаковой частоты*, направленных по одной прямой, может быть легко распространен на сложение любого числа таких колебаний. Достаточно из некоторого произвольного полюса отложить векторы, пропорциональные амплитудам составляющих колебаний под углами наклона, равными их начальным фазам. Сумма этих векторов определит амплитуду результирующего колебания, а ее угол наклона — начальную фазу. Отсюда следует, что точка будет неподвижна, если сумма этих векторов равна нулю.

Задача 5.34. Точка M совершает прямолинейное гармоническое колебательное движение около центра O_1 согласно уравнению

$$x_1 = b_1 \cos(mt - \epsilon_1).$$

При этом основание механизма вместе с точкой O_1 совершает также прямолинейное, поступательное гармоническое колебательное движение около неподвижного центра O согласно уравнению

$$x_{O_1} = b_0 \cos(nt - \epsilon_0).$$

Оба колебания совпадают по направлению, а разность частот этих колебаний $m - n$ весьма мала по сравнению с самими частотами.

Определить уравнение абсолютного движения точки M.

Решение. Уравнение абсолютного движения точки находится по формуле

$$x = x_1 + x_{O_1} = b_1 \cos(mt - \epsilon_1) + b_0 \cos(nt - \epsilon_0). \quad (1)$$

Преобразуем этот результат следующим образом. Заметим тождественно

$$\cos(nt - \epsilon_0) = \cos[mt - (m - n)t - \epsilon_0], \quad (2)$$

тогда

$$x = b_1 \cos(mt - \epsilon_1) + b_0 \cos[mt - (m - n)t - \epsilon_0] =$$
$$= \{ b_1 \cos \epsilon_1 + b_0 \cos[(m - n)t + \epsilon_0] \} \cos mt +$$
$$+ \{ b_1 \sin \epsilon_1 + b_0 \sin[(m - n)t + \epsilon_0] \} \sin mt. \quad (3)$$

Введем новые переменные r и θ, удовлетворяющие равенствам

$$\begin{aligned} r \cos\theta &= b_1 \cos \epsilon_1 + b_0 \cos[(m - n)t + \epsilon_0], \\ r \sin\theta &= b_1 \sin \epsilon_1 + b_0 \sin[(m - n)t + \epsilon_0]. \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда уравнение абсолютного движения точки (3) может быть представлено в виде

$$x = r \cos(mt - \theta), \quad (5)$$

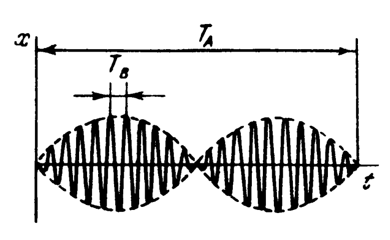
где r и θ определяются из (4). Возводим оба равенства в квадрат и складываем:

$$r^2 = b_1^2 + b_0^2 + 2 b_1 b_0 \cos[(m - n)t + \epsilon_0 - \epsilon_1]. \quad (6)$$

Деля равенства (4) одно на другое, находим

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{b_1 \sin \epsilon_1 + b_0 \sin[(m - n)t + \epsilon_0]}{b_1 \cos \epsilon_1 + b_0 \cos[(m - n)t + \epsilon_0]}.$$

Из формулы (5) следует, что результирующее колебание можно приближенно рассматривать как гармоническое, у которого амплитуда r и начальная фаза θ являются не постоянными величинами, а медленно меняющимися функциями времени. Частота изменения этих величин $m - n$ по условию весьма мала по сравнению с частотами составляющих колебаний. Из уравнения (6) следует, что амплитуда абсолютных колебаний изменяется в пределах $r_{max} = b_1 + b_0$, $r_{min} = b_1 - b_0$. Колебания этого вида,



К задаче 5.34

часто встречающиеся в различных областях техники, называются биениями. На рисунке буквами T_B обозначен период биения, а буквами T_A – период нарастания колебаний.

Указание. Для приобретения навыков в решении задач на гармонические колебания рекомендуется решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 10.8–10.11, 10.18–10.21, 11.1, 11.3, 12.14, 12.16.

2. Негармонические колебания. При сложении двух или нескольких гармонических колебаний разной частоты, происходящих по одной прямой, получается периодическое, но не гармоническое движение, если частоты слагаемых движений соизмеримы. Наряду с этим в природе и технике часто встречаются колебания непериодические. Следует напомнить, что периодическим движением называется такое движение, которое полностью повторяется через некоторый промежуток времени. Кинематика некоторых таких движений рассматривается в настоящем параграфе.

Указание. При решении задач в этом параграфе рекомендуется такая последовательность действий:

1) выбрать оси координат;

2) составить уравнения колебательного движения;

3) сложив колебательные движения, получить уравнения результирующего движения;

4) определить скорость и ускорение точки.

Задача 5.35. Точка движется согласно уравнению

$$x = b_1 \sin(k_1 t + \beta_1) + b_2 \sin(k_2 t + \beta_2), \qquad (1)$$

причем периоды слагаемых гармонических колебаний соизмеримы, т.е.

их отношение является рациональным числом:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{n_1}{n_2}, \qquad (2)$$

где n_1 и n_2 – целые числа, а дробь (2) несократима.

Определить период результирующего колебания.

Р е ш е н и е. Движение точки складывается согласно (1) из двух гармоник. Из равенства (2) следует, что

$$n_2 T_1 = n_1 T_2. \qquad (3)$$

Обозначая эти равные произведения буквой T, получим период результирующего колебания, так как за время T оба слагаемых в (1) вернутся к своим первоначальным значениям и за этот промежуток времени повторится наименьшее целое число периодов обеих гармоник.

Заметим, что если периоды слагаемых колебаний несоизмеримы, то не существует периода результирующего движения и движение в этом случае будет непериодическим.

Задача 5.36. Точка движется согласно уравнению

$$x = be^{-nt}\sin(\sqrt{k^2 - n^2}\,t + \beta).$$

Определить период колебаний, закон убывания амплитуды колебаний с течением времени, скорость и ускорение точки.

Р е ш е н и е. Прежде всего заметим, что это движение является колебательным, но не периодическим, так как не существует такого числа T, при котором будет выполняться равенство

$$x(t + T) = x(t).$$

Будем понимать под периодом колебаний промежуток времени, в течение которого происходит полное колебание, т.е. переменная x изменяется от одного максимума до другого.

Для нахождения периода найдем, прежде всего, моменты времени, когда переменная x принимает экстремальные значения. Для этого приравняем производную от x по времени нулю

$$\dot{x} = be^{-nt}[-n\sin(k_1 t + \beta) + k_1\cos(k_1 t + \beta)] = 0,$$

где обозначено для краткости $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$. Отсюда находим

$$\operatorname{tg}(k_1 t + \beta) = k_1/n. \qquad (1)$$

Обозначая последовательные значения времени, удовлетворяющие уравнению (1), через t_i и учитывая, что периодичность тангенса соответствует изменению аргумента на величину π, получим

$$k_1 t_{i+1} + \beta - (k_1 t_i + \beta) = \pi. \qquad (2)$$

Так как t_i и t_{i+1} отвечают максимуму и следующему за ним минимуму, то их разность равна половине периода. Тогда из (2) находим

$$\frac{T_1}{2} = t_{i+1} - t_i = \frac{\pi}{k_1}$$

или

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1}.$$

Переходим к определению закона убывания амплитуды колебаний с течением времени. Находим из (1) значение

$$\sin(k_1 t_i + \beta) = \pm \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + n^2}}.$$

Тогда соседние экстремальные значения переменной (амплитуды колебаний) будут

$$b_i = |x(t_i)| = be^{-nt_i}|\sin(k_1 t_i + \beta)| = be^{-nt_i}\frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + n^2}},$$

$$b_{i+1} = |x(t_{i+1})| = be^{-nt_{i+1}}\frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + n^2}}.$$

Отношение двух последовательных амплитуд равно

$$\frac{b_{i+1}}{b_i} = e^{-n(t_{i+1} - t_i)} = e^{-nT_1/2}.$$

Логарифм обратной величины $nT_1/2$ называется логарифмическим декрементом, характеризующим быстроту убывания амплитуды.

Найдем скорость точки

$$v_x = \dot{x} = be^{-nt}[k_1\cos(k_1 t + \beta) - n\sin(k_1 t + \beta)].$$

Ускорение точки определится как вторая производная от координаты по времени

$$a_x = \ddot{x} = be^{-nt}[-2nk_1\cos(k_1 t + \beta) + (n^2 - k_1^2)\sin(k_1 t + \beta)].$$

После несложных преобразований находим

$$a_x = -k^2 x - 2n\dot{x},$$

где обозначено, как и прежде,

$$k^2 = k_1^2 + n^2.$$

Таким образом, ускорение точки складывается из двух частей: ускорения, пропорционального отклонению точки от центра колебаний, и ускорения (замедления), пропорционального скорости.

Задача 5.37. Точка движется согласно уравнениям

$$x = b\sin(2\omega t - \pi/2), \quad y = b\sin(\omega t - \pi/2).$$

Определить траекторию, скорость и ускорение точки.

Решение. Запишем уравнения движения точки так:

$$x = -b\cos 2\omega t, \tag{1}$$

$$y = -b\cos\omega t. \tag{2}$$

Для исключения времени из этой системы уравнений преобразуем уравнение (1) следующим образом:

$$x = b(\sin^2\omega t - \cos^2\omega t) = b(1 - 2\cos^2\omega t).$$

Подставляя в это уравнение значение

$$\cos\omega t = -y/b,$$

получим

$$x = b\left(1 - 2\frac{y^2}{b^2}\right),$$

или

$$y^2 = \frac{b^2}{2}\left(1 - \frac{x}{b}\right). \tag{3}$$

Это уравнение параболы с вершиной в точке $(b, 0)$, у которой ось x является осью симметрии. Траекторией точки является отрезок этой параболы, заключенный в квадрате со стороной $2b$, как это следует из уравнений (1) и (2).

Проекции скорости точки найдем, дифференцируя уравнения движения (1) и (2),

$$v_x = \dot{x} = 2b\omega\sin 2\omega t, \tag{4}$$

$$v_y = \dot{y} = b\omega\sin\omega t. \tag{5}$$

Отсюда находим скорость точки

$$v = b\omega\sin\omega t(4\cos\omega t\cdot \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}).$$

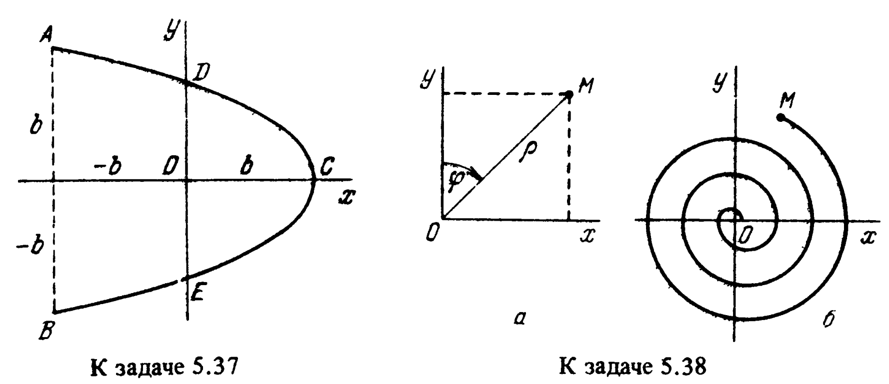
Проекции ускорения точки будут

$$a_x = \ddot{x} = 4b\omega^2\cos 2\omega t = -4\omega^2 x, \quad a_y = \ddot{y} = b\omega^2\cos\omega t = -\omega^2 y.$$

Следовательно

$$a = -\omega^2(4x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}). \tag{6}$$

Как видно из уравнения (3), точка колеблется по дуге параболы ACB (см. рисунок), причем координаты точек равны: $A(-b,\ b)$, $C(b,\ 0)$, $B(-b,\ -b)$. Парабола пересекает ось ординат в точках D, E с координатами: $0, \pm b\sqrt{2}/2$.



К задаче 5.37 К задаче 5.38

Найдем скорость и ускорение точки в те моменты времени, когда она проходит через A, C, B.

Подставляя в уравнения (1) и (2) координаты этих точек, находим

для точки A: $\cos 2\omega t = 1,\quad \cos\omega t = -1;$

для точки B: $\cos 2\omega t = 1,\quad \cos\omega t = 1;$

для точки C: $\cos 2\omega t = -1,\quad \cos\omega t = 0.$

Тогда из уравнений (4) и (5) имеем: скорости точки в A и B равны нулю, а в точке C

$$v_{Cx} = 0,\quad v_{Cy} = \pm b\omega,$$

причем знак зависит от того, в каком направлении движется точка – от A к B или наоборот.

Ускорения точки в указанных трех положениях находятся подстановкой координат в (6):

$$a_A = -\omega^2 b(-4i + j),\quad a_B = \omega^2 b(4i + j),\quad a_C = -4\omega^2 bi.$$

Задача 5.38. Точка движется в плоскости согласно уравнениям

$$x = be^{-nt}\sin(k_1 t + \beta),\quad y = be^{-nt}\cos(k_1 t + \beta), \tag{1}$$

где

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}.$$

Определить траекторию точки и ее уравнения движения в полярных координатах. Найти скорость и ускорение точки, если b, n, k – положительные постоянные, $k > n$, $\beta = \text{const}$.

Решение. Выберем полярную систему координат согласно рис. *а*. Зависимость между декартовыми и полярными координатами точки дается уравнениями

$$x = \rho \sin\varphi, \quad y = \rho\cos\varphi,$$

где полярные координаты ρ и φ с учетом заданных условием уравнений движения (1) будут

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = be^{-nt}, \quad \varphi = k_1 t + \beta. \tag{2}$$

Зависимости (2) и являются уравнениями движения точки в полярных координатах.

Уравнение траектории в полярных координатах в явном виде найдем, исключив из уравнений (2) время. Из второго уравнения имеем

$$t = \frac{\varphi - \beta}{k_1}.$$

Внося это значение времени в первое уравнение системы (1), получим:

$$\rho = b\exp\left(\frac{n\beta}{k_1} - \frac{n\varphi}{k_1}\right). \tag{3}$$

Это и есть уравнение траектории в полярных координатах. Траектория представлена на рис. *б*. Это скручивающаяся к центру спираль.

Обозначив для краткости постоянные

$$b\exp\frac{n\beta}{k_1} = d, \quad \frac{n}{k_1} = c,$$

запишем уравнение траектории в виде

$$\rho = de^{-c\varphi}. \tag{4}$$

Для нахождения проекций скорости точки на оси полярной системы координат воспользуемся уравнениями (см. задачу 5.16)

$$v_\rho = \dot\rho, \quad v_\varphi = \rho\dot\varphi. \tag{5}$$

Согласно уравнениям (2) проекции скорости точки на оси полярной системы координат в данном случае будут

$$v_\rho = -nbe^{-nt}, \quad v_\varphi = bk_1 e^{-nt}, \tag{6}$$

так как

$$\dot\varphi = k_1.$$

Модуль скорости точки равен

$$v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2} = be^{-nt}\sqrt{n^2 + (k^2 - n^2)} = bke^{-nt}. \tag{7}$$

Переходим к определению проекций ускорения точки на оси полярной системы координат. Согласно задаче 5.16 эти проекции определяются формулами

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \dot{\varphi}^2 \rho, \qquad a_\varphi = \ddot{\varphi}\rho + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}. \tag{8}$$

Первое уравнение определяет радиальное ускорение, второе – трансверсальное ускорение точки. В условиях задачи находим производные:

$$\ddot{\rho} = n^2 b e^{-nt}, \qquad \ddot{\varphi} = 0. \tag{9}$$

Подставляя все значения в формулы (8), находим

$$\begin{aligned} a_\rho &= n^2 b e^{-nt} - (k^2 - n^2) b e^{-nt} = (2n^2 - k^2) b e^{-nt}, \\ a_\varphi &= -2nbe^{-nt} k_1 . \end{aligned} \tag{10}$$

Модуль ускорения равен

$$a = \sqrt{a_\rho^2 + a_\varphi^2} = k^2 b e^{-nt}. \tag{11}$$

Из уравнений движения (2) видно, что точка неограниченно приближается к началу координат по спирали. Соответственно модули скорости и ускорения точки стремятся к нулю при неограниченном возрастании времени.

Указание. Для приобретения навыков в решении задач на негармонические колебания рекомендуется решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 10.22, 11.12, 12.16.

Глава 6

ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 1. УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

1. Определение уравнений плоского движения твердого тела и уравнений движения точки плоской фигуры. *Плоским* (*плоскопараллельным*) называется движение твердого тела, при котором траектории всех его точек лежат в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости. При таком движении все точки твердого тела, лежащие на перпендикуляре, восставленном к этой плоскости, имеют одинаковые траектории, скорости и ускорения. Следовательно, при изучении плоского движения твердого тела достаточно исследовать движение плоской фигуры, являющейся сечением твердого тела плоскостью, параллельной неподвижной.

Всякое перемещение плоской фигуры можно разложить на поступательное движение вместе с произвольно выбранной точкой O_1, называемой *полюсом*, и на вращение фигуры вокруг этой точки (рис. 6.1).

Выбирая неподвижную систему координат xy и систему координат x_1y_1, жестко связанную с плоской фигурой, с началом в полюсе O_1, имеем уравнения плоского движения твердого тела:

$$x_{O_1} = f_1(t), \quad y_{O_1} = f_2(t), \qquad \varphi = f_3(t). \tag{1*}$$

В этих уравнениях x_{O_1}, y_{O_1} – координаты полюса – начала подвижной системы осей; угол φ – угол поворота подвижных осей координат относительно неподвижных. Полагая систему координат правой, т.е. ось z направленной перпендикулярно к плоскости xy на читателя, имеем положительное направление отсчета угла φ против хода часовой стрелки.

Если выбрать за полюс не точку O_1, а какую-либо другую точку плоской фигуры K, то уравнения движения полюса

$$x_K = f_4(t), \quad y_K = f_5(t), \tag{1**}$$

характеризующие поступательное движение фигуры вместе с полюсом, будут отличаться от аналогичных первых двух уравнений в (1*). Угол поворота плоской фигуры не зависит от выбора полюса. Поэтому третье уравнение, определяющее вращение плоской фигуры, может отличаться для различных полюсов только на постоянное слагаемое. Если же для

всех полюсов начальные значения угла поворота выбрать одинаковыми, то уравнения вращения плоской фигуры будут тождественны.

Система уравнений (1*) полностью определяет положение плоской фигуры в любой момент времени.

Уравнения движения произвольной точки М плоской фигуры имеют вид

$$x = x_{O1} + x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi, \quad y = y_{O1} + x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi. \qquad (2^*)$$

В этих уравнениях: x, y – координаты точки M в неподвижной системе координат; x_{O1}, y_{O1} – координаты полюса O_1; x_1, y_1 – координаты точки M в системе координат $x_1 y_1$, жестко связанной с плоской фигурой; φ – угол поворота подвижной системы координат. Координаты x_1, y_1 – это два постоянных, неизменных во время движения числа, определяющих рассматриваемую точку плоской фигуры. Остальные величины,

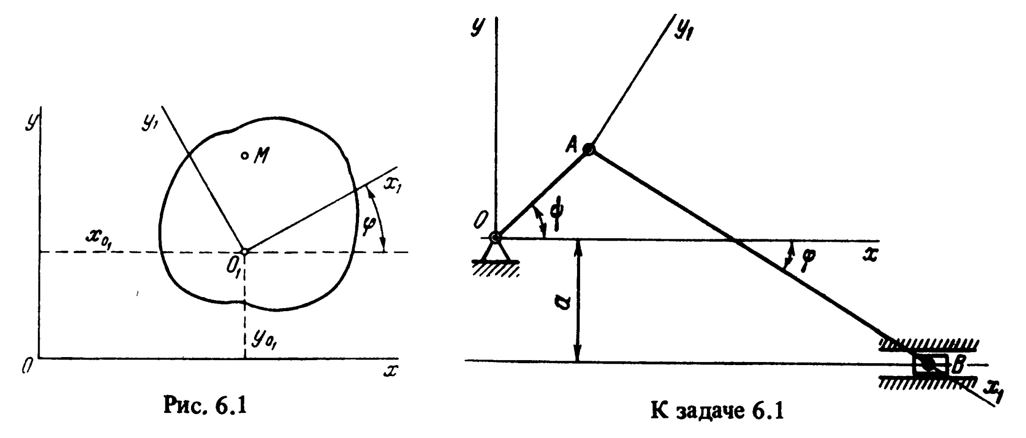


Рис. 6.1

К задаче 6.1

входящие в уравнения (2*), являются функциями времени, которые определяются посредством уравнений (1*).

Указание. При решении задач на определение уравнений плоского движения твердого тела, уравнений движения и траекторий точек плоской фигуры рекомендуется такая последовательность действий:

1) выбираем две системы координат, неподвижную и подвижную, жестко связанную с плоской фигурой;

2) составляем уравнения движения плоской фигуры;

3) находим уравнения движения точки твердого тела;

4) исключая из уравнений движения точки время, определяем уравнение траектории точки.

Задача 6.1. В кривошипно-ползунном механизме центр вращения кривошипа O находится на расстоянии a от траектории ползуна B. Угол поворота кривошипа изменяется согласно закону $\psi = kt$, где k – постоянный коэффициент. Длина кривошипа $OA = r$, шатуна $AB = l$ (см. рисунок).

Определить уравнения плоского движения шатуна AB.

Решение. Выбираем неподвижную систему координат с началом в точке O. Ось x направляем вправо по горизонтали, ось y – по вертикали вверх. Подвижную систему координат берем с началом в точке A, принадлежащей и кривошипу и шатуну. Ось x_1 проводим по шатуну AB, ось y_1 – перпендикулярно к нему. Таким образом, точка A шатуна (начало подвижной системы координат) является полюсом. Уравнения движения полюса имеют вид

$$x_A = OA\cos\psi = r\cos kt, \qquad y_A = OA\sin\psi = r\sin kt.$$

Для нахождения третьего уравнения движения, зависимости угла поворота шатуна от времени, спроектируем отрезок AB на ось y.

Обозначая через φ угол между осями x_1 и x, находим

$$AB\sin\varphi = OA\sin\psi + a,$$

или, так как $AB = l$, $OA = r$, $\psi = kt$, имеем:

$$\sin\varphi = \frac{r}{l}\sin kt + \frac{a}{l}.$$

Отсюда находится угол φ как функция времени:

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{r}{l}\sin kt + \frac{a}{l}\right).$$

Задача 6.2. Жесткий прямой угол AMC движется так, что точка A остается все время на оси Oy, тогда как стержень MC проходит через неподвижную точку B. Отрезок $AM = OB = l$ (см. рисунок).

Определить траекторию точки M.

Решение. Для определения траектории точки M выберем полярную систему координат с началом в точке B. Обозначая радиус-вектор BM через r и угол OBM через α, имеем

$$AM\cdot\sin\alpha + BM\cdot\cos\alpha = OB, \tag{1}$$

или

$$l\sin\alpha + r\cos\alpha = l. \tag{2}$$

Углы OBM и OAM равны как образованные взаимно перпендикулярными сторонами. Из (2) находим

$$\frac{r}{l} = \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}. \tag{3}$$

Из (3) получаем

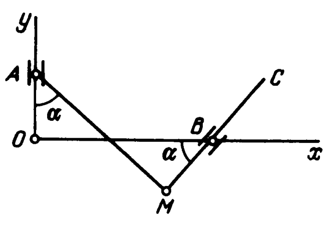
$$r\cos\alpha = l(1-\sin\alpha), \tag{4}$$

$$r(1+\sin\alpha) = l\cos\alpha. \tag{5}$$

Вычитая из (4) уравнение (5), после несложных преобразований имеем

$$\frac{l-r}{l+r} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}. \tag{6}$$

Это и есть уравнение траектории точки M – полярное уравнение строфоиды.



К задаче 6.2

2. Определение положения центра конечного поворота плоской фигуры. Любое непоступательное перемещение плоской фигуры может быть осуществлено поворотом вокруг некоторой точки, называемой центром конечного поворота. Это теорема Эйлера–Шаля. Однако позднее было установлено, что эта теорема была известна Паппу (III–IV век нашей эры).

Для построения положения центра конечного поворота необходимо выбрать две произвольные точки плоской фигуры A и B (рис. 6.2, *а*).

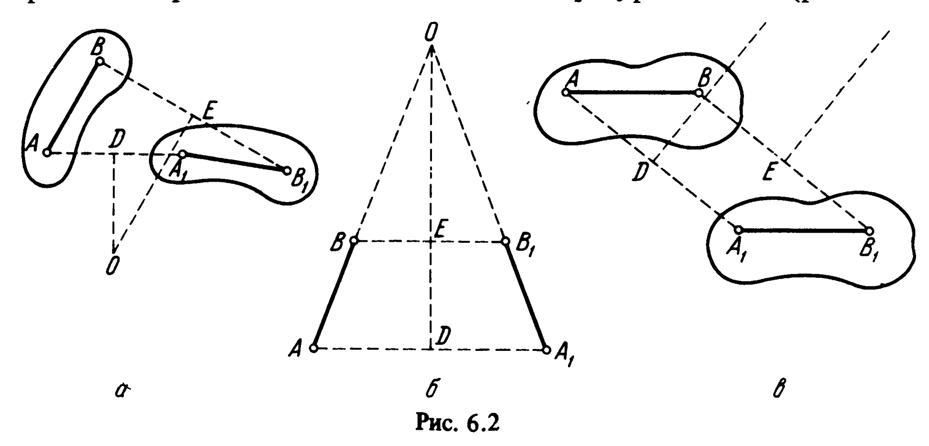


Рис. 6.2

Пусть после перемещения эти точки оказались в A_1 и B_1. Соединяя точки A и A_1, B и B_1 прямыми линиями, найдем точки D и E, делящие отрезки AA_1 и BB_1 пополам. В этих точках восставляем перпендикуляры соответственно к прямым AA_1 и BB_1. Точка пересечения этих перпендикуляров O и является положением центра конечного поворота плоской фигуры.

Это построение не приводит к цели только в том случае, если второе положение плоской фигуры является зеркальным отображением первого

(рис. 6.2, *б*), так как при этом перпендикуляры, восставленные в серединах отрезков AA_1 и BB_1, сливаются в одну прямую линию.

В этом случае для нахождения положения центра конечного поворота плоской фигуры необходимо продолжить прямые AB и A_1B_1. Точка их пересечения и будет искомым центром поворота.

Если же (рис. 6.2, *в*) перпендикуляры, восставленные к прямым, соединяющим точки A и A_1, B и B_1, в их серединах D и E, параллельны, то центра конечного поворота нет.

Указание. При решении задач на определение положения центра конечного поворота рекомендуется такая последовательность действий:

1) выбираем две точки в начальном положении плоской фигуры;

2) находим положение этих же точек после конечного перемещения фигуры;

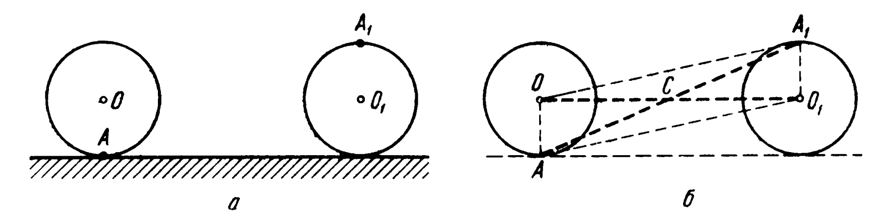
3) соединяем прямыми линиями начальное и конечное положения каждой из двух точек фигуры;

4) восставляем в середине этих отрезков перпендикуляры к прямым и в точке пересечения перпендикуляров находим искомый центр конечного поворота плоской фигуры.

Задача 6.3. Колесо катится по прямолинейному рельсу.

Найти положение центра конечного поворота, если колесо совершило такое перемещение, что точка соприкосновения колеса с рельсом стала наиболее удаленной от рельса точкой (рис. *а*).

Решение. Соединим начальное и конечное положения центра колеса O и O_1 прямой (рис. *б*). Проведем прямую между точками A и A_1. Эти прямые пересекутся в точке, которую обозначим через C. Проводя

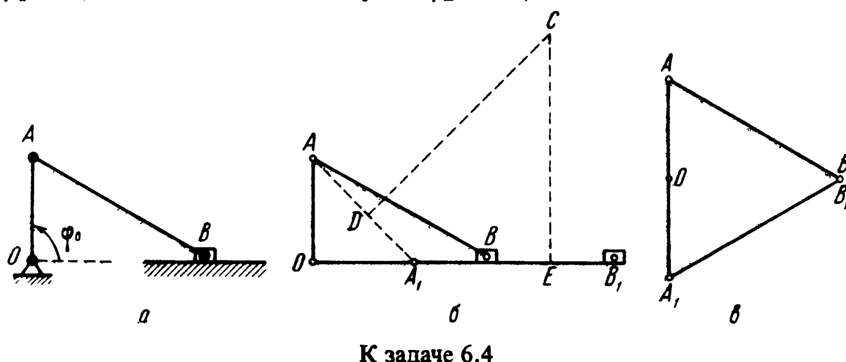


К задаче 6.3

прямые OA, OA_1, O_1A_1, O_1A (рис. *б*), замечаем, что OAO_1A_1 – параллелограмм. Прямые OO_1 и AA_1 являются диагоналями этого параллелограмма. Следовательно, точка их пересечения C делит отрезки OO_1 и AA_1 пополам. Если восставить в точке C перпендикуляры к OO_1 и AA_1, то единственной точкой их пересечения и будет C. Значит, C и является центром конечного поворота при перемещении колеса из первого положения во второе.

Задача 6.4. Движение звеньев кривошипно-ползунного механизма определяется углом φ, который образует кривошип OA с прямой OB. В начальном положении угол $\varphi_0 = \pi/2$ (рис. a).

Определить положение центра конечного поворота шатуна AB при перемещении кривошипа OA из начального положения в положение, когда угол $\varphi_1 = 0$, в положение, когда угол $\varphi_2 = 3\pi/2$.



К задаче 6.4

Р е ш е н и е. Для нахождения положения центра конечного поворота шатуна AB при перемещении из положения $\varphi_0 = \pi/2$ в положение $\varphi_1 = 0$ изображаем (рис. $б$) оба положения шатуна. Соединяем начальное и конечное положения точек A и B, т.е. проводим прямые AA_1 и BB_1. Далее, находим середины этих отрезков, точки D и E. В этих точках восставляем перпендикуляры к рассматриваемым отрезкам. Пересечение перпендикуляров, точка C, и является центром конечного поворота шатуна.

Переходим к определению положения центра конечного поворота при перемещении шатуна из положения $\varphi_0 = \pi/2$ в положение $\varphi_2 = 3\pi/2$ (рис. $в$). Как видно из построения, точки B и B_1 в этом случае совпадают. Точка O является серединой отрезка AA_1. Если восставить в точке O перпендикуляр к отрезку AA_1, то на нем должен находиться центр конечного поворота. Ввиду того, что конечное положение шатуна является зеркальным отображением его начального положения, конечным центром поворота является точка B, где пересекаются прямые AB и A_1B_1.

У к а з а н и е. Для приобретения навыков в решении задач на составление уравнений движения плоской фигуры и ее точек рекомендуется решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 15.1–15.6, 15.8–15.10.

§ 2. СКОРОСТИ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Скорости точек плоской фигуры могут быть определены аналитическими, графическими или же графоаналитическими методами. В этом параграфе рассмотрим нахождение скоростей точек плоской фигуры аналити-

ческим и графоаналитическим способами. Графический метод определения скоростей точек, заключающийся в построении плана скоростей, будет рассмотрен отдельно.

Аналитический метод. При аналитическом методе должны быть заданы уравнения движения плоской фигуры (рис. 6.3)

$$x_{O1} = f_1(t), \quad y_{O1} = f_2(t) \quad \varphi = f_3(t). \tag{1*}$$

Проекции скорости точки M на неподвижные оси координат определяются равенствами:

$$v_x = v_{O1x} - \omega_z(y - y_{O_1}), \tag{2*}$$

$$v_y = v_{O1y} + \omega_z(x - x_{O_1}). \tag{3*}$$

В этих формулах v_x, v_y – искомые проекции скорости точки M на неподвижные оси координат; $v_{O1x} = \dot{x}_{O1}$, $v_{O1y} = \dot{y}_{O1}$ – проекции скорости полюса, начала подвижной системы координат $x_1 y_1$ на неподвижные оси координат; $\omega_z = \dot{\varphi}$ – проекция угловой скорости на ось z, перпендикулярную к плоскости движения; x, y – координаты точки M в неподвижной системе координат; x_{O_1}, y_{O_1} – координаты полюса O_1 в неподвижной системе осей. Определение координат x, y точки M по заданным уравнениям движения плоской фигуры (1*) производится по формулам (2*) § 1

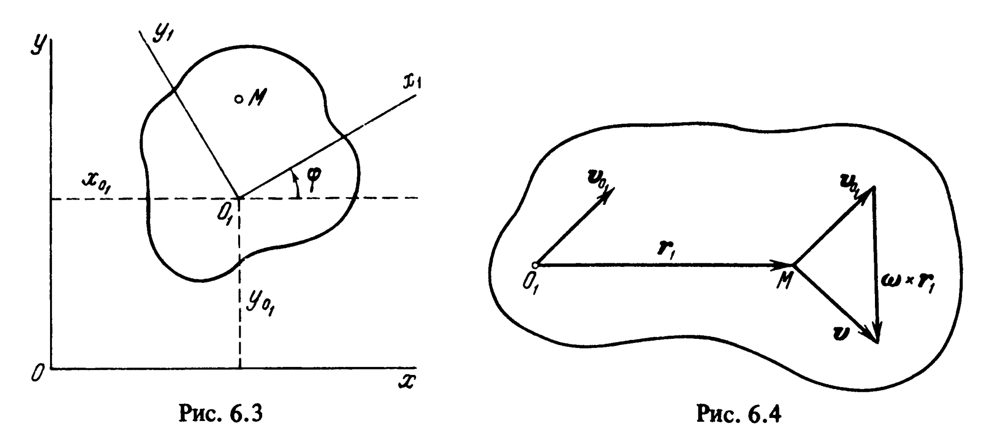


Рис. 6.3 Рис. 6.4

этой главы. Проекции скорости точки M на подвижные оси координат находятся по формулам:

$$v_{x_1} = v_{O1x}\cos\varphi + v_{O1y}\sin\varphi - \omega_z y_1, \tag{4*}$$

$$v_{y_1} = -v_{O1x}\sin\varphi + v_{O1y}\cos\varphi + \omega_z x_1. \tag{5*}$$

В этих формулах v_{x_1}, v_{y_1} – искомые проекции скорости точки M на оси x_1, y_1 подвижной системы координат, жестко связанной с плоской фигу-

рой; x_1, y_1 – координаты точки M в подвижной системе осей; остальные величины имеют то же значение, что и в уравнениях (2*), (3*).

Модуль скорости точки M по известным проекциям определяется формулой

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2}. \tag{6*}$$

Направляющие косинусы даются равенствами

$$\cos(\widehat{\mathbf{v}, x}) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\widehat{\mathbf{v}, y}) = \frac{v_y}{v}, \tag{7*}$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{v}, x_1}) = \frac{v_{x_1}}{v}, \quad \cos(\widehat{\mathbf{v}, y_1}) = \frac{v_{y_1}}{v}. \tag{8*}$$

Графоаналитические методы. Первый графоаналитический способ определения скорости точек плоской фигуры основан на формуле распределения скоростей (рис. 6.4)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O1} + \vec{\omega} \times \mathbf{r}_1. \tag{9*}$$

В этой формуле $\mathbf{v}$ – искомая скорость точки M; $\mathbf{v}_{O1}$ – скорость полюса O_1, $\vec{\omega}$ – угловая скорость плоской фигуры; $\mathbf{r}_1$ – радиус-вектор, проведенный из полюса O_1 в точку M.

Таким образом, зная скорость какой-либо точки плоской фигуры, выбираем эту точку за полюс. Далее, откладываем от точки M, скорость которой подлежит определению, вектор, равный скорости полюса, и вектор $\vec{\omega} \times \mathbf{r}_1$, направленный перпендикулярно к $\mathbf{r}_1$ и равный ωr_1. Векторная сумма этих слагаемых и дает искомую скорость точки M. Если скорость точки M известна по направлению, то можно не знать модуль скорости $\vec{\omega} \times \mathbf{r}_1$ точки B при вращении вокруг полюса A, так как и эта скорость, и искомая скорость точки M определяются пересечением прямой, совпадающей с направлением скорости точки M, проведенной из M, и прямой, перпендикулярной к линии O_1M, проведенной из конца вектора $\mathbf{v}_{O_1}$, отложенного из точки M.

После того как треугольник или параллелограмм скоростей, выражающий равенство (9*), построен, задача может считаться решенной. Модуль и направление скорости точки M могут быть найдены по рисунку (рис. 6.4) или получены из решения этого треугольника.

Формула распределения скоростей (9*) записывается часто в другом виде:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}, \tag{9**}$$

где $\mathbf{v}_B$ – искомая скорость точки B; $\mathbf{v}_A$ – известная скорость точки A, избранной за полюс, а

$$\mathbf{v}_{BA} = \vec{\omega} \times \overline{AB}, \quad v_{BA} = \omega \cdot BA \tag{9***}$$

– скорость точки B при вращении вокруг полюса A, равная по модулю произведению мгновенной угловой скорости плоской фигуры на расстояние от точки до полюса и направленная перпендикулярно к отрезку прямой BA в сторону мгновенного вращения фигуры.

Многие задачи могут быть решены при помощи теоремы о равенстве проекций скоростей концов отрезка плоской фигуры на направление отрезка (рис. 6.4).

Проецируя векторное равенство (9*) на направление отрезка O_1M (рис. 6.4) и учитывая, что векторное произведение $\vec{\omega} \times \boldsymbol{r}_1$ перпендикулярно отрезку O_1M, имеем

$$\text{пр. } \mathbf{v} = \text{пр. } \mathbf{v}_{O_1}.$$

Второй графоаналитический метод определения скоростей точек плоской фигуры основан на использовании мгновенного центра скоростей этой фигуры. При непоступательном движении плоской фигуры ($\omega \neq 0$) в каждый данный момент существует точка тела, скорость которой равна нулю. Эта точка называется *мгновенным центром скоростей* и обычно обозначается через P. Единственным исключением является случай так называемого мгновенно-поступательного движения ($\omega = 0$), который будет рассмотрен отдельно. Выбирая мгновенный центр за полюс, имеем закон распределения скоростей в плоской фигуре:

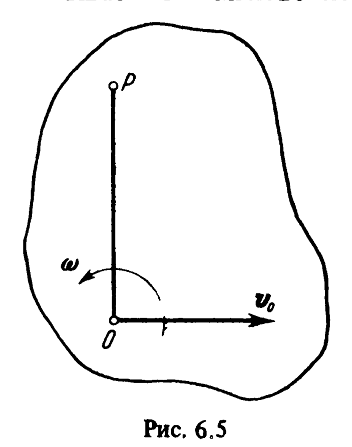


Рис. 6.5

$$\mathbf{v} = \vec{\omega} \times \boldsymbol{r}_1, \quad v = \omega \cdot MP, \tag{10*}$$

где $\mathbf{v}$ – искомая скорость произвольной точки M; $\vec{\omega}$ – угловая скорость плоской фигуры; $\boldsymbol{r}_1$ – радиус-вектор, проведенный из мгновенного центра скоростей в точку M, называемый *мгновенным радиусом*. Таким образом скорости всех точек плоской фигуры являются в данный момент скоростями при вращении вокруг мгновенного центра скоростей. Их модули равны произведению модуля угловой скорости на модуль мгновенного радиуса, а направлены они перпендикулярно к мгновенному радиусу. Таким образом, модули скоростей точек плоской фигуры пропорциональны модулям мгновенных радиусов:

$$\frac{v_B}{BP} = \frac{v_A}{AP} = \ldots = \omega. \tag{11*}$$

Методы нахождения положения мгновенного центра скоростей:

а) известны скорость одной точки O и угловая скорость плоской фигуры (рис. 6.5); мгновенный центр скоростей находится на перпендику-

ляре, восставленном к скорости точки O, на расстоянии

$$OP = v_O/\omega; \qquad (12^*)$$

направление перпендикуляра находим, поворачивая v_O на угол $\pi/2$ в сторону вращения;

б) известны направления скоростей двух точек плоской фигуры A и B (рис. 6.6); мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения перпендикуляров, восставленных в точках A и B к скоростям этих точек;

в) скорости двух точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу, перпендикулярны к отрезку AB, направлены в одну сторону и не равны; мгновенный центр находится на продолжении AB со стороны той точки, чья скорость меньше; расстояния от точек до мгновенного центра скоростей пропорциональны скоростям точек; для определения мгновенного центра скоростей необходимо знать не только направления, но и модули скоростей точек A и B (рис. 6.7);

г) скорости двух точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу, перпендикулярны к отрезку AB и направлены в разные стороны;

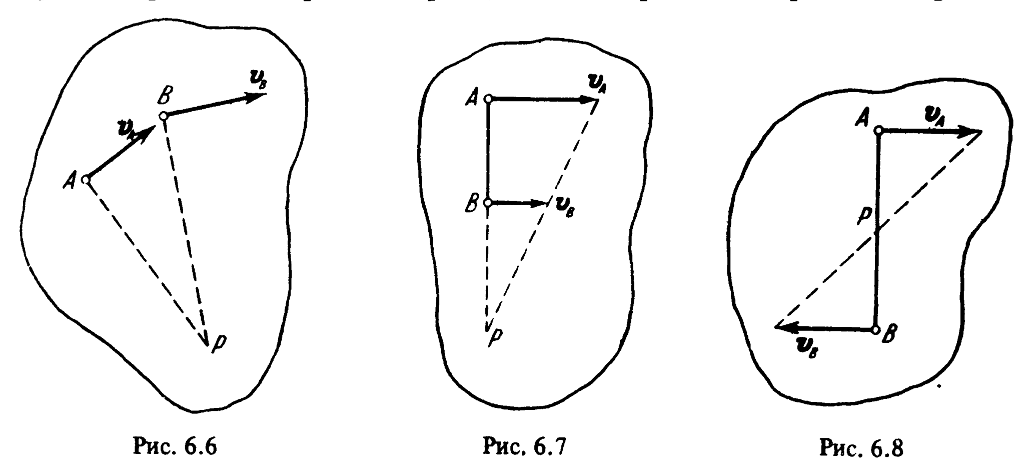


Рис. 6.6 Рис. 6.7 Рис. 6.8

мгновенный центр скоростей лежит на отрезке AB и делит этот отрезок на части, пропорциональные скоростям; для нахождения мгновенного центра скоростей необходимо знать и модули и направления скоростей обеих точек (рис. 6.8);

д) плоская фигура катится без скольжения по неподвижной кривой (рис. 6.9); мгновенный центр скоростей P находится в точке соприкосновения фигуры с кривой, так как скорости точек фигуры и неподвижной кривой, находящихся в соприкосновении, равны между собой и, следовательно, равны нулю. При этом точка P плоской фигуры, скорость которой в данный момент равна нулю, и будет *мгновенным центром скоростей*. Точка P неподвижной фигуры, совпадающая в данный момент с

мгновенным центром скоростей плоской фигуры, называется *мгновенным центром вращения*.

Если скорости двух точек плоской фигуры параллельны друг другу и не перпендикулярны к отрезку, соединяющему обе точки (рис. 6.10), или скорости двух точек фигуры параллельны, равны друг другу и перпендикулярны к отрезку, соединяющему обе точки (рис. 6.11), то мгновенного центра скоростей в данный момент не существует или можно сказать,

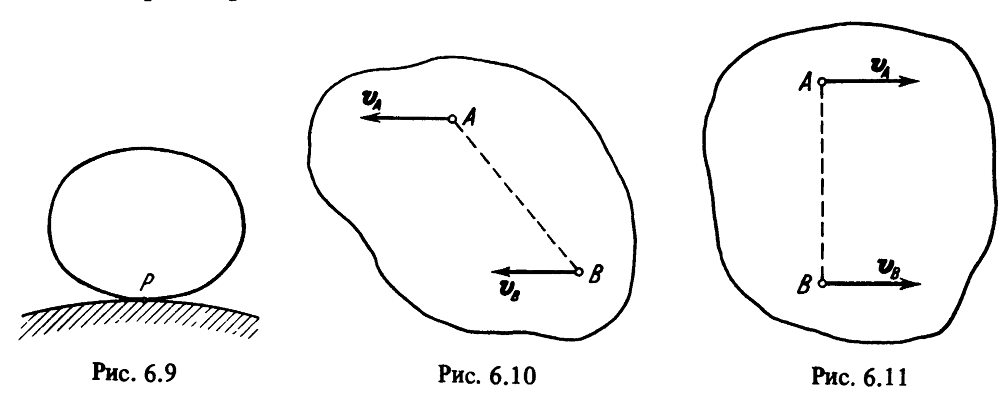


Рис. 6.9 Рис. 6.10 Рис. 6.11

что он находится в бесконечности. Угловая скорость плоской фигуры в данный момент равна нулю, движение называется *мгновенно-поступательным*, скорости всех точек плоской фигуры в этот момент равны.

При мгновенно-поступательном движении ускорения точек плоской фигуры, вообще говоря, не равны друг другу и траектории точек плоской фигуры также неодинаковы.

Положение мгновенного центра скоростей может быть также определено аналитически. В *неподвижной системе* осей *координаты мгновенного центра* определяются формулами

$$x_P = x_{O_1} - \frac{v_{O_1 y}}{\omega_z}, \qquad y_P = y_{O_1} + \frac{v_{O_1 x}}{\omega_z}. \qquad (13^*)$$

В этих формулах x_P, y_P — координаты мгновенного центра скоростей в неподвижной системе координат; x_{O_1}, y_{O_1} — координаты полюса, начала подвижной системы осей; $v_{O_1 x}, v_{O_1 y}$ — проекции скорости полюса на неподвижные оси координат; ω_z — проекция угловой скорости фигуры на ось, перпендикулярную к плоскости, в которой происходит движение. В *подвижной системе* осей, жестко связанной с плоской фигурой, *координаты мгновенного центра скоростей* определяются так:

$$x_{1P} = \frac{v_{O_1 x}\sin\varphi - v_{O_1 y}\cos\varphi}{\omega_z}, \qquad (14^*)$$

$$y_{1P} = \frac{v_{O_1 x}\cos\varphi + v_{O_1 y}\sin\varphi}{\omega_z}. \qquad (15^*)$$

Здесь x_{1P}, y_{1P} – координаты мгновенного центра скоростей в подвижной системе осей; φ – угол поворота подвижной системы координат по отношению к неподвижной. Остальные величины те же, что и в (13*).

Формулами (13*), (14*), (15*) целесообразно пользоваться, когда заданы уравнения движения плоской фигуры (1*).

При решении задач на определение скоростей точек плоской фигуры приходится находить ее угловую скорость.

Если заданы уравнения движения плоской фигуры, то модуль угловой скорости определяется как производная от угла поворота по времени:

$$\omega = \left| \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \right| = |\dot{\vec{\varphi}}|. \qquad (16^*)$$

Вектор угловой скорости направлен перпендикулярно к плоскости движения в ту сторону, чтобы наблюдатель, стоящий вдоль вектора, видел вращение плоской фигуры происходящим против хода часовой стрелки.

Часто направление угловой скорости плоской фигуры задают дуговой стрелкой. Направление дуговой стрелки может быть определено по знаку производной $\dot{\varphi}$. Если $\dot{\varphi} > 0$, то дуговая стрелка направлена против хода часовой стрелки, при $\dot{\varphi} < 0$ – в противоположную сторону, по ходу часовой стрелки.

В ряде задач направление угловой скорости может быть определено следующим образом. Находим одним из вышеуказанных методов мгновенный центр скоростей и далее выбираем направление дуговой стрелки так, чтобы она соответствовала направлению скоростей точек плоской фигуры.

Аналитический метод определения скоростей целесообразно применять, если известны по условию или могут быть без особых затруднений составлены уравнения движения плоской фигуры (1*). Аналитический метод позволяет, вообще говоря, найти скорость точки плоской фигуры как функцию времени. Однако получить такое решение в обозримом виде не всегда возможно.

Указания. При *аналитическом методе* решение задач рекомендуется вести в следующем порядке:

1) выбрать неподвижную и подвижную системы координат; начало подвижной системы осей взять в такой точке, уравнения движения которой известны или могут быть составлены без особых затруднений;

2) составить уравнения движения плоской фигуры: два уравнения движения полюса и уравнение вращения фигуры вокруг полюса;

3) пользуясь уравнениями движения плоской фигуры, получить уравнения движения точки, скорость которой требуется найти;

4) определить проекции скорости на неподвижные или подвижные оси координат и найти модуль и направление искомой скорости.

Графоаналитические способы нахождения скоростей точек плоской фигуры целесообразно применять в тех случаях, когда требуется найти скорости различных точек плоской фигуры в данный момент времени при определенном положении плоской фигуры.

Решение задач при помощи мгновенного центра скоростей при этом эффективнее других графоаналитических методов, если требуется определить скорости нескольких точек, причем вычисление мгновенных радиусов может быть произведено без сложных выкладок. Если же согласно условию задачи необходимо найти скорость какой-либо одной точки плоской фигуры, то обычно быстрее к цели ведет применение теоремы о распределении скоростей (9*) или теоремы о равенстве проекций скоростей концов отрезка плоской фигуры на направление самого отрезка.

При *графоаналитических методах* решения задач рекомендуется такая последовательность действий:

1) выбрать за полюс ту точку плоской фигуры, скорость которой известна или легко определяется из условия задачи;

2) найти другую точку плоской фигуры, направление скорости которой известно;

3) пользуясь формулой распределения скоростей, найти скорость этой точки плоской фигуры;

4) исходя из формулы распределения скоростей, определить значение угловой скорости плоской фигуры в данный момент времени;

5) зная угловую скорость фигуры и скорость полюса, найти с помощью формулы распределения скоростей искомые скорости других точек фигуры.

При графоаналитическом методе решения задач может быть применен и *метод проекций*. В этом случае может быть рекомендован следующий порядок решения задач:

1) выбрать за полюс точку плоской фигуры, скорость которой известна;

2) пользуясь формулой распределения скоростей, построить скорость другой точки плоской фигуры, у которой известно направление ее скорости;

3) спроектировать полученный треугольник скоростей на направление прямой, соединяющей обе точки, и найти скорость второй точки;

4) спроектировать треугольник скоростей на направление, перпендикулярное к прямой, соединяющей обе точки, и найти вращательную скорость второй точки по отношению к полюсу;

5) разделив вращательную скорость на расстояние от точки до полюса, найти мгновенную угловую скорость плоской фигуры;

6) зная мгновенную угловую скорость фигуры, можно найти скорости любых точек плоской фигуры, пользуясь формулой распределения скоростей.

Если же задача решается при помощи *мгновенного центра скоростей*, то рекомендуется такая последовательность действий:

1) определить положение мгновенного центра плоской фигуры одним из вышеуказанных способов;

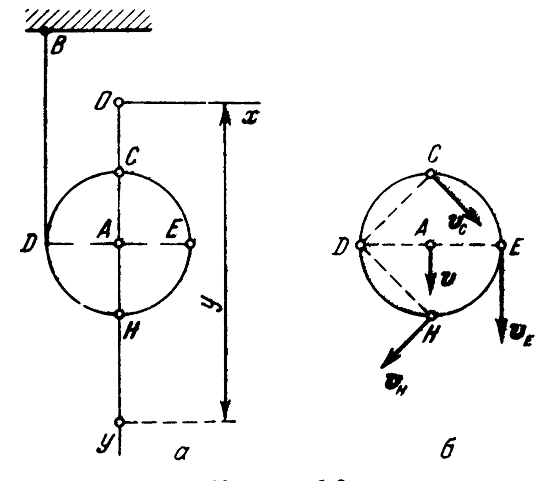
2) найти модуль мгновенного радиуса той точки плоской фигуры, скорость которой известна, и определить угловую скорость плоской фигуры, разделив модуль скорости точки на модуль мгновенного радиуса;

3) найти искомые величины скоростей точек плоской фигуры, умножая угловую скорость на мгновенный радиус соответствующей точки или используя формулу (11*).

Задача 6.5. Круглый цилиндр A обмотан тонкой нитью, конец которой B закреплен неподвижно. Цилиндр падает без начальной скорости, разматывая нить (рис. *а*). Значение скорости оси цилиндра определяется формулой

$$v = \frac{2}{3}\sqrt{3gy}, \qquad (1)$$

где g – ускорение силы тяжести; y – расстояние, пройденное центром цилиндра, отсчитываемое от начального положения, т.е. координата точки A. Точка A движется прямолинейно по вертикали. Радиус цилиндра равен r.



К задаче 6.5

Определить скорости четырех точек на ободе цилиндра, расположенных на концах взаимно перпендикулярных диаметров, изображенных на чертеже.

Решение. Выбираем неподвижную систему координат с началом в точке O, где центр цилиндра находился в начале движения. Ось y направляем по вертикали вниз, ось x – по горизонтали вправо. Тогда проекция скорости центра цилиндра на вертикальную ось, равная производной от координаты y по времени, будет

$$v_y = \dot{y} = \frac{2}{3}\sqrt{3gy}. \qquad (2)$$

Разделяя переменные, находим

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{2}{3}\sqrt{3g}\,dt. \tag{3}$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (3), получаем

$$2\sqrt{y} = \frac{2}{3}\sqrt{3g}\,t + C_1. \tag{4}$$

Произвольная постоянная интегрирования C_1 определяется по начальным данным: при $t = 0$ $y = 0$. Внося эти данные в уравнение (4), находим $C_1 = 0$. Следовательно, окончательный вид уравнения движения центра цилиндра будет

$$y = \frac{g}{3}t^2. \tag{5}$$

Переходим к определению второго уравнения движения – зависимости угла поворота цилиндра от времени. Мгновенный центр скоростей цилиндра находится в точке D. Следовательно,

$$\omega_z = \frac{v_y}{r} = \frac{2}{3r}\sqrt{3gy}. \tag{6}$$

Внося в это уравнение значение y из (5), находим

$$\omega_z = \frac{2g}{3r}t. \tag{7}$$

Но $\omega_z = d\varphi/dt$, следовательно,

$$d\varphi = \frac{2g}{3r}t\,dt. \tag{8}$$

Переменные разделены. Интегрируя, находим

$$\varphi = \frac{gt^2}{3r} + C_2. \tag{9}$$

Произвольная постоянная C_2 определяется начальными условиями движения: угол поворота $\varphi = 0$ в начальный момент времени $t = 0$. Внося эти значения в уравнение (9), находим $C_2 = 0$. Итак, окончательно второе уравнение движения цилиндра имеет вид

$$\varphi = \frac{g}{3r}t^2. \tag{10}$$

Переходим к определению скоростей точек цилиндра. Мгновенный центр скоростей цилиндра находится в точке D, где неподвижная часть нити BD соприкасается с цилиндром. В этом месте скорости точек нити и цилиндра, находящихся в соприкосновении, равны между собой и, следовательно, равны нулю. Скорости остальных точек пропорциональны расстояниям до мгновенного центра скоростей и перпендикулярны к мгновенным радиусам. Модуль скорости точки E определится из пропорции

$$\frac{v}{r} = \frac{v_E}{2r},$$

откуда, учитывая (1), находим, что

$$v_E = \frac{4}{3}\sqrt{3gy}. \tag{11}$$

Направление скорости точки E перпендикулярно к мгновенному радиусу DE, т.е. параллельно скорости точки A. Скорости точек C и H равны по модулю, так как они отстоят от мгновенного центра скоростей, точки D, на одинаковых расстояниях $DC = DH = r\sqrt{2}$. Модули этих скоростей определяются из пропорции

$$\frac{v}{r} = \frac{v_C}{r\sqrt{2}},$$

откуда

$$v_C = v_H = \frac{2}{3}\sqrt{6gy}; \tag{12}$$

направлены эти скорости перпендикулярно к мгновенным радиусам CD и HD (рис. *б*).

Формулы (11) и (12) определяют модули скоростей точек C, E, H как функции пройденного центром цилиндра расстояния y. Найдем модули этих скоростей как функции времени.

Уравнение движения центра диска (5)

$$y = \frac{g}{3}t^2.$$

Подставляя это значение расстояния y в формулы (11) и (12), получаем

$$v_E = \frac{4}{3}gt, \quad v_C = v_H = \frac{2\sqrt{2}}{3}gt.$$

Модуль скорости точек C и H можно также найти на основании теоремы о равенстве проекций скоростей двух точек плоской фигуры на пря-

мую, соединяющую эти точки. Скорости точек C и H составляют углы 45° с линией CAH, а скорость точки A направлена по этой прямой. Следовательно,

$$v_C \cos 45^\circ = v_H \cos 45^\circ = v,$$

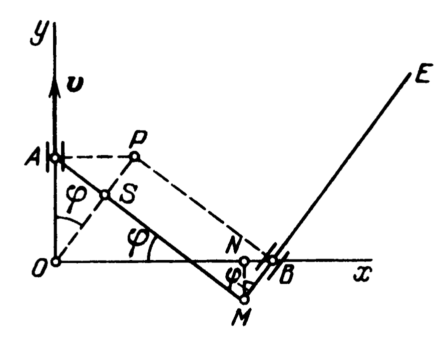
откуда

$$v_C = v_H = \frac{v}{\cos 45^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{3gy} = \frac{2}{3}\sqrt{6gy} = \frac{2\sqrt{2}}{3}gt.$$

Задача 6.6. Прямой угол AME движется так, что точка A перемещается прямолинейно по оси Oy, а стержень ME проходит через вращающиеся направляющие B. Расстояние $AM = OB = b$. Скорость точки A известна и равна $\mathbf{v}$.

Определить мгновенную угловую скорость прямого угла как функцию угла φ. Угол φ образован стержнем AM с осью Ox. Найти скорость той точки стержня ME, которая в данный момент проходит через паз B. Определить также уравнения движения прямого угла AME, если скорость точки A постоянна, а в начальный момент времени точка A совпадала с точкой O.

Решение. Мгновенный центр скоростей прямого угла AME находится на пересечении перпендикуляров к скоростям двух точек. Перпендикуляр к скорости точки A параллелен оси x. Найдем на жестком прямом угле AME другую точку, направление скорости которой известно.



К задаче 6.6

Это будет точка стержня ME, которая в данный момент времени проходит через вращающуюся направляющую B. Скорость этой точки направлена вдоль стержня. Действительно, скорость любой точки стержня ME можно рассматривать как геометрическую сумму двух скоростей: поступательной скорости (вместе с точкой B), направленной по стержню ME, и вращательной скорости (вокруг точки B), равной по модулю произведению угловой скорости прямого угла AME на расстояние рассматривае-

мой точки от центра вращения точки B. Следовательно, для точки стержня ME, проходящей в данный момент времени через центр вращения – точку B, вращательная составляющая скорости равна нулю, и скорость этой точки направлена по стержню ME.

Итак, мгновенный центр скоростей прямого угла AME находится в точке P (см. рис.), на пересечении указанных перпендикуляров. Тогда модуль скорости точки A

$$v = AP \cdot \omega, \tag{1}$$

откуда модуль мгновенной угловой скорости AME

$$\omega = \frac{v}{AP}. \tag{2}$$

Найдем зависимость AP от угла φ, образованного стержнем AM осью x. Для этого опустим из точки M перпендикуляр на ось Ox. Тогда (см. рисунок)

$$NB = OB - ON = b - AM \cdot \cos\varphi = b(1 - \cos\varphi). \tag{3}$$

Далее находим

$$AP = \frac{MB}{\sin\varphi} = \frac{NB}{\sin^2\varphi} = \frac{b(1-\cos\varphi)}{1-\cos^2\varphi} = \frac{b}{1+\cos\varphi}. \tag{4}$$

Подставляя это значение мгновенного радиуса в уравнение (2), имеем

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{v}{b}(1+\cos\varphi). \tag{5}$$

Переходим к определению скорости точки стержня, проходящей через паз B. Опуская из точки O перпендикуляр OS на стержень AM, находим

$$AS = AM - OB \cdot \cos\varphi = b(1 - \cos\varphi). \tag{6}$$

Далее имеем

$$PB = \frac{AO}{\sin\varphi} = \frac{AS}{\sin^2\varphi} = \frac{b}{1+\cos\varphi} = AP. \tag{7}$$

Следовательно, скорости точек A и точки стержня ME, проходящей через вращающийся паз B, равны:

$$v = v_B. \tag{8}$$

Таким образом, скорости точек A и B прямого угла AME равны по модулю при любом положении жесткого прямого угла. Для определения уравнений движения прямого угла AME выбираем точку A за полюс.

Уравнения движения полюса будут:

$$x_A = 0, \tag{9}$$

$$y_A = vt. \tag{10}$$

Для нахождения третьего уравнения (зависимости угла поворота плоской фигуры от времени) применим уравнение (5), записав его в следующей форме:

$$\frac{dy}{1+\cos\varphi} = \frac{v}{b}dt. \tag{11}$$

Интегрируя это уравнение, находим

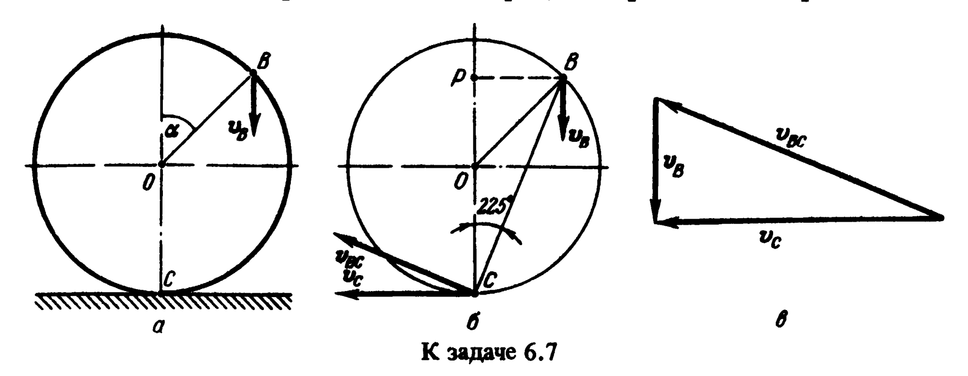
$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{v}{b}t + C_1, \tag{12}$$

где C_1 – произвольная постоянная интегрирования. Ее определяем по начальным условиям движения: при $t = 0$ угол $\varphi = 0$ и, следовательно, $C_1 = 0$.

Итак, окончательно, третье уравнение плоского движения

$$\varphi = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{v}{b}t\right).$$

Задача 6.7. Цилиндр радиусом $R = 2$ м катится по горизонтальной плоскости с угловой скоростью $\omega = 20$ рад/с. Определить скорость точки C



К задаче 6.7

касания цилиндра с плоскостью, если известно, что скорость точки B направлена вертикально вниз, а угол $\alpha = 45°$ (рис. *а*).

Решение. Решим данную задачу графическим способом. Скорость точки C состоит из двух слагаемых (рис. *б*)

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{BC}. \tag{1}$$

Известны направления всех трех векторов, входящих в (1), а модуль скорости $\mathbf{v}_{BC}$

$v_{BC} = BC \cdot \omega.$

Угол OCB находится из равнобедренного треугольника OBC, две стороны которого равны: $OC = OB$. Он равен

$\angle OCB = 22{,}5°.$

Из треугольника OBC находим $BC = 2R$ co   Следовательно,

$v_{BC} = \omega 2R \cos 22{,}5° = 20 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 0{,}92$ м/с.

Этих условий достаточно для построения треугольника скоростей. Построив треугольник в выбранном масштабе, получаем (рис. *в*)

$v_C \approx 68$ м/с.

Решим данную задачу другим способом. Для этого спроектируем равенство (1) на горизонтальную ось. Получим

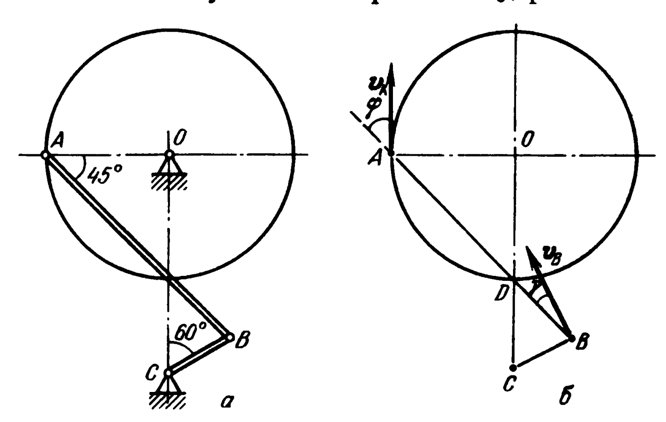
$v_C = v_{BC} \cos 22{,}5° = 73{,}8 \cdot 0{,}922 = 68{,}28$ м/с.

Можно решить данную задачу третьим способом. Найдем мгновенный центр скоростей P. Тогда

$v_C = \omega \cdot PC.$

Из треугольника BCP находим $PC = R + R\cos 45°$.

Задача 6.8. Колесо радиусом R = 6 см вращается вокруг неподвижного центра O с постоянной угловой скоростью ω_0, равной 10 об/мин. Шатун



К задаче 6.8

AB = 12 см соединен шарнирно с кривошипом BC, который может вращаться вокруг точки C, лежащей на одной вертикали с O. Найти угловую скорость ω_C кривошипа в положении, указанном на рисунке.

Решение. Модуль скорости точки A, участвующей во вращательном движении колеса и плоском движении шатуна AB, определяется

выражением

$$v_A = \omega_0 R.$$

Проекции скоростей точек A и B на прямую, их соединяющую, т.е. на прямую AB, равны

$$v_A \cos\varphi = v_B \cos\gamma,$$

откуда

$$v_B = \frac{v_A \cos\varphi}{\cos\gamma} = \frac{\omega_0 R \cos\varphi}{\cos\gamma}. \qquad (1)$$

Из условия (рис. a) находим $\varphi = 45°$, $\gamma = 15°$. Действительно, угол $BDC = 45°$ как равный углу $ADO = 45°$. Тогда $\angle DBC = 180° - 60° - 45° = 75°$, $\gamma = 90° - 75° = 15°$.

Зная скорость точки B и длину кривошипа BC, можно определить ω_C:

$$\omega_C = \frac{v_B}{BC}; \qquad (2)$$

BC находим из треугольника BCD:

$$\frac{BC}{\sin 45°} = \frac{BD}{\sin 60°},$$

где $BD = AB - AD = AB - R\dfrac{1}{\cos 45°}$.

Пользуясь теоремой синусов, получим

$$BC = \frac{\left(AB - \dfrac{R}{\cos 45°}\right)\sin 45°}{\sin 60°}. \qquad (3)$$

Внося выражения (3) и (1) в выражение (2) и выполнив необходимые преобразования, получим

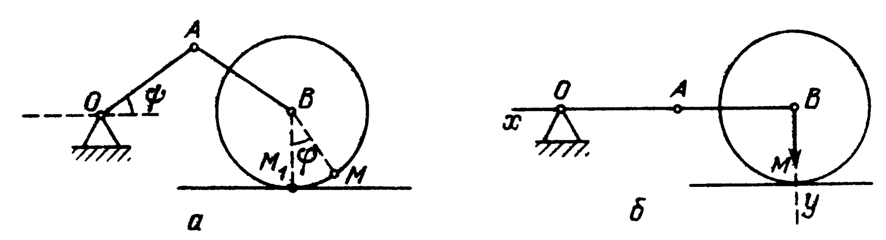
$$\omega_C = \frac{\omega_0 R \sin 60°}{\left(AB - \dfrac{R}{\cos 45°}\right)\cos 15°}.$$

Подставив сюда числовые значения, найдем

$$\omega_C = \frac{2\pi \cdot 10 \cdot 6\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{60(12 - 6\sqrt{2}) \cdot 0{,}96} \approx 1{,}52 \text{ рад/с}.$$

Задача 6.9. Кривошипно-ползунный механизм состоит из кривошипа OA и шатуна AB одинаковой длины r. Угол ψ (рис. *а*) изменяется по закону $\psi = kt$, где $k = \text{const}$. Конец шатуна B шарнирно прикреплен к центру колеса. Колесо радиусом b катится без скольжения по горизонтальной плоскости, параллельной прямой OB. Расстояние горизонтальной неподвижной плоскости, по которой катится колесо, от прямой OB равно радиусу колеса b.

Определить уравнения движения колеса, а также уравнения движения той точки обода M, которая соприкасается с неподвижной плоскостью,



К задаче 6.9

когда точка B находится в крайнем правом положении. Найти скорость точки M и мгновенную угловую скорость колеса.

Решение. Выберем начало неподвижной системы декартовых координат в крайнем правом положении точки B (рис. *б*). Ось x направим по горизонтали влево, ось y – по вертикали вниз. Точку B примем за полюс. Тогда уравнения движения полюса будут:

$$x_B = 2r - 2r\cos kt = 2r(1 - \cos kt), \qquad (1)$$

$$y_B = 0. \qquad (2)$$

Третье уравнение плоского движения колеса найдем, приравняв перемещение центра колеса точки B произведению угла поворота колеса φ на радиус вращения b (это верно при качении колеса по плоскости без скольжения (рис. *а*)):

$$x_B = \overset{\frown}{M_1M} = b\varphi. \qquad (3)$$

Решая совместно уравнения (1) и (3), находим третье уравнение плоского движения колеса

$$\varphi = \frac{2r(1 - \cos kt)}{b}. \qquad (4)$$

Проекция мгновенной угловой скорости колеса на ось z равна производной от угла поворота φ по времени:

$$\omega_z = \dot{\varphi} = \frac{2rk}{b}\sin kt. \qquad (5)$$

Переходим к определению уравнений движения точки M. Рассмотрим произвольное положение точки M. Пусть угол поворота радиуса BM равен углу M_1BM (рис. a). Тогда координаты точки M определятся следующими уравнениями:

$$x_M = x_B - b\sin\varphi, \tag{6}$$

$$y_M = b\cos\varphi. \tag{7}$$

Внося в эти уравнения ранее найденные значения x_B и φ, получим

$$x_M = 2r(1-\cos kt) - b\sin\left[\frac{2r}{b}(1-\cos kt)\right], \tag{8}$$

$$y_M = b\cos\left[\frac{2r}{b}(1-\cos kt)\right]. \tag{9}$$

Таковы уравнения движения точки M. Эти уравнения являются параметрическими уравнениями траектории точки M, дуги циклоиды.

Проекции скорости точки M на оси декартовых координат определяются как производные от координат по времени

$$v_{xM} = \dot{x}_M = 2rk\sin kt - 2rk\sin kt\cos\left[\frac{2r}{b}(1-\cos kt)\right], \tag{10}$$

$$v_{yM} = \dot{y}_M = -2rk\sin kt\sin\left[\frac{2r}{b}(1-\cos kt)\right]. \tag{11}$$

Задача 6.10. Антипараллелограмм образован стержнями (рис. a): $AD = BO = l$ и $AB = OD = k$, соединенными между собой шарнирами. Звено AB укреплено неподвижно. Угловая скорость стержня BO равна ω_0, угол ABO в данный момент равен $0{,}5\pi$.

Определить длины стержней OH и DH, которыми точка H скрепляется со стержнем OD, если скорость точки H равна $\omega_0 l$ и направлена перпендикулярно к AB.

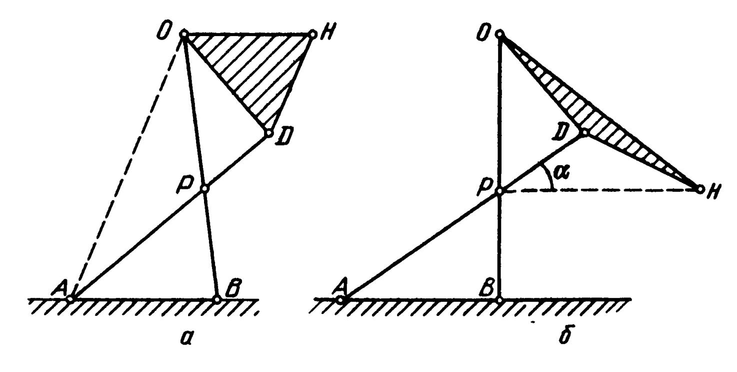
Р е ш е н и е. Скорость точки O перпендикулярна к стержню BO. Скорость точки D перпендикулярна к стержню AD. Следовательно, перпендикуляры, восставленные к скоростям точек O и D, пересекаются в точке P. Таким образом, точка P является мгновенным центром скоростей для стержня OD или, что то же самое, для плоской фигуры ODH.

Модуль скорости точки O (если рассматривать ее принадлежащей стержню BO) равен $v_0 = \omega_0 l$. Если считать точку O принадлежащей плоской фигуре ODH, то модуль ее скорости равен $v_0 = \omega_{\text{мг}} \cdot OP$, где $\omega_{\text{мг}}$ — модуль мгновенной угловой скорости треугольника ODH. Приравнивая

эти два выражения скорости одной и той же точки O, находим:

$$v_0 = \omega_0 l = \omega_{\text{мг}} \cdot OP. \tag{1}$$

Определим расстояние OP. Для этого соединим штриховой линией точки A и O. Треугольники AOD и AOB равны, так как их стороны равны. Тогда



К задаче 6.10

$\angle OAD = \angle AOB$, и треугольник AOP – равнобедренный: $OP = AP$. Следовательно, и $PB = PD$. Отсюда следует, что

$$OP = PD = l. \tag{2}$$

Из равенства треугольников ADO и ABO следует также, что угол ADO прямой. Поэтому

$$(OP)^2 = (PD)^2 + (OD)^2. \tag{3}$$

Из равенства (2) и (3) после несложных вычислений находим, что

$$OP = \frac{l^2 + k^2}{2l}, \tag{4}$$

$$PD = \frac{l^2 - k^2}{2l}. \tag{5}$$

Откладываем от мгновенного центра P перпендикулярно к OB отрезок $PH = OP$. Скорость точки H (рис. б), построенной таким образом, и будет равна $\omega_0 l$ и перпендикулярна к AB.

Определим, далее, длину стержня OH. Так как треугольник OPH – прямоугольный и равнобедренный, то

$$OH = \sqrt{(PO)^2 + (PH)^2} = \frac{l^2 + k^2}{l\sqrt{2}}. \tag{6}$$

Для нахождения длины стержня DH обозначим угол DOH через α. Тогда

из треугольника ODH имеем

$$(DH)^2 = (OD)^2 + (OH)^2 - 2 \cdot OD \cdot OH \cdot \cos\alpha. \qquad (7)$$

Из треугольника OPD аналогично следует:

$$(OD)^2 = (OP)^2 + (PD)^2 - 2 \cdot OP \cdot PD \cdot \cos(90^\circ - \alpha). \qquad (8)$$

Решая совместно уравнения (7) и (8) относительно неизвестных α и DH, после несложных преобразований находим

$$DH = \frac{1}{l\sqrt{2}} \sqrt{l^2 + k^2 - 2lk(l^2 - k^2)}. \qquad (9)$$

Указание. Для приобретения навыков в решении задач на определение скоростей точек плоской фигуры рекомендуется решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И. В. Мещерского: 16.1, 16.2, 16.7, 16.9–16.12, 16.15, 16.16, 16.19, 16.20, 16.27–16.30, 16.32–16.34, 16.38, 16.41.

§ 3. ПОДВИЖНАЯ И НЕПОДВИЖНАЯ ЦЕНТРОИДЫ

Геометрическое место мгновенных центров вращения, отмеченных на неподвижной плоскости, называется *неподвижной центроидой.*

Геометрическое место мгновенных центров скоростей плоской фигуры, отмеченных на движущемся теле, называется *подвижной центроидой.*

При плоском движении твердого тела подвижная центроида катится без скольжения по неподвижной. Точка соприкосновения подвижной и неподвижной центроид является в данный момент мгновенным центром скоростей. С течением времени каждая из точек неподвижной и подвижной центроид будет становиться мгновенным центром скоростей и мгновенным центром вращения в тот момент, когда две точки обеих центроид будут соприкасаться. Центроиды можно определить геометрическим построением или аналитически.

Геометрический способ нахождения подвижной и неподвижной центроид заключается в следующем. Для произвольного положения плоской фигуры или механизма построением находится мгновенный центр скоростей. Далее, из построения определяется геометрическое место мгновенных центров при заданном движении плоской фигуры как по отношению к неподвижной системе координат, так и по отношению к осям, жестко связанным с движущейся фигурой.

Аналитическое определение подвижной и неподвижной центроид производится при помощи формул, дающих значение координат мгновенного центра скоростей и мгновенного центра вращения. Координаты мгновенно-

го центра вращения в неподвижной системе осей выражаются так:

$$x_P = x_O - \frac{\dot y_O}{\omega_z}, \tag{1*}$$

$$y_P = y_O + \frac{\dot x_O}{\omega_z}. \tag{2*}$$

Координаты мгновенного центра скоростей в системе координат, жестко связанной с плоской фигурой, определяются формулами

$$x_{1P} = \frac{\dot x_O \sin\varphi - \dot y_O \cos\varphi}{\omega_z}, \tag{3*}$$

$$y_{1P} = \frac{\dot x_O \cos\varphi + \dot y_O \sin\varphi}{\omega_z}. \tag{4*}$$

В этих формулах: x_O, y_O – координаты полюса, начала подвижной системы координат; $\dot x_O$, $\dot y_O$ – проекции скорости полюса на неподвижные оси; φ – угол поворота подвижной системы координат по отношению к неподвижной; ω_z – проекция угловой скорости плоской фигуры на ось z, перпендикулярную к плоскости, в которой происходит движение.

Переменные, находящиеся в правой части этих формул, являются явными функциями времени или выражаются через параметры, зависящие от времени. Решая совместно уравнения (1*), (2*) и исключая время, находим уравнение неподвижной центроиды. Решая систему уравнений (3*), (4*), исключая время, определяем зависимость между координатами x_{1P} и y_{1P}, т.е. уравнение подвижной центроиды в явной форме.

В некоторых задачах для нахождения уравнений неподвижной и подвижной центроид удобнее пользоваться полярной системой координат.

Указание. При решении задач на определение подвижной и неподвижной центроид рекомендуется такая последовательность действий:

1) выделить плоскую фигуру, для которой требуется найти подвижную и неподвижную центроиды;

2) выбрать две системы координат, неподвижную и подвижную, жестко связанную с движущейся плоской фигурой;

3) найти построением или с помощью формул (1*), (2*) мгновенный центр скоростей для произвольного положения плоской фигуры;

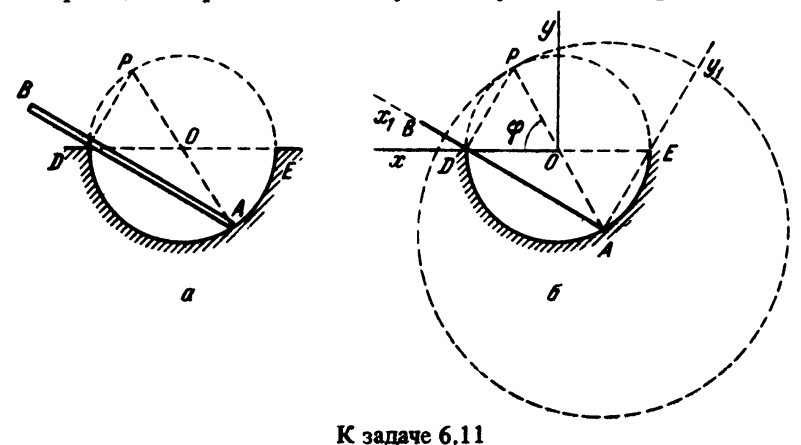
4) составить зависимость координат мгновенного центра вращения в неподвижной системе осей от какого-либо переменного параметра движения;

5) решив совместно уравнения для координат мгновенного центра, исключить переменный параметр и найти уравнение неподвижной центроиды в явном виде;

6) пользуясь формулами (3*), (4*) или геометрическим построением мгновенного центра скоростей, составить зависимость координат мгновенного центра скоростей в подвижной системе координат от какого-либо переменного параметра движения;

7) решив совместно эти уравнения и исключив переменный параметр, определить уравнение подвижной центроиды в явном виде.

Задача 6.11. Стержень AB движется в плоскости чертежа так, что его конец A непрерывно скользит по полуокружности EAD, а сам стержень все время проходит через неподвижную точку D диаметра ED.



К задаче 6.11

Определить неподвижную и подвижную центроиды стержня AB (рис. a).

Решение. Скорость точки A, описывающей дугу окружности, направлена по касательной к данной окружности. Мгновенный центр скоростей стержня AB лежит на перпендикуляре, восставленном в точке A к направлению ее скорости, т.е. на радиусе OA или его продолжении. Так как стержень AB скользит по углу D, не отрываясь от него, то скорость точки стержня, совпадающей в данный момент с точкой D, направлена вдоль стержня. Восставляя перпендикуляр к стержню в точке D, находим мгновенный центр скоростей стержня AB в пересечении перпендикуляров к скоростям точек A и D, т.е. в точке P. Эта точка лежит на окружности EAD, так как прямой угол ADP опирается на диаметр окружности AP. Следовательно, мгновенный центр скоростей P при движении стержня AB перемещается по окружности $PDAE$.

Геометрическое место мгновенных центров вращения, отмеченных в неподвижном пространстве, таким образом, есть полуокружность с центром O и радиусом OA. Это – неподвижная центроида стержня.

Подвижная центроида является геометрическим местом мгновенных центров скоростей отмеченных на движущейся плоской фигуре. Точка P

находится от точки стержня A на постоянном расстоянии $AP = 2 \cdot OA$, следовательно, точка P описывает вокруг движущейся точки A часть окружности радиуса вдвое большего, чем радиус полуокружности EAD. Это – подвижная центроида стержня.

Найдем уравнения центроид. С этой целью выбираем две системы координат: неподвижные оси с началом в точке O, ось x направляем влево по диаметру AB, ось y – вертикально вверх, и подвижную систему координат с началом в точке A, ось x_1 направляем по стержню AB, ось y_1 – перпендикулярно к стержню по прямой AE (рис. *б*). Тогда уравнение неподвижной центроиды будет:

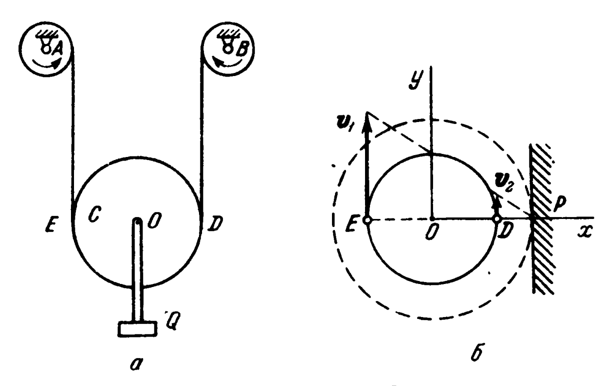
$$x_P^2 + y_P^2 = r^2$$

(окружность с центром в точке O), а уравнение подвижной центроиды

$$x_{1P}^2 + y_{1P}^2 = 4r^2$$

(окружность с центром в точке A).

Задача 6.12. Груз Q подвешен на блоке C с подвижной осью O (рис. *а*). Груз поднимается при помощи троса, перекинутого через два блока, A и B, с неподвижными осями. Радиусы неподвижных блоков одинаковы и равны



К задаче 6.12

$r = 20$ см. Блок A делает $n_1 = 60$ об/мин, блок B делает $n_2 = 15$ об/мин. Диаметр блока O равен $d = 75$ см.

Определить подвижную и неподвижную центроиды блока C.

Решение. Найдем скорость v_1, с которой движутся точки обода блока A и точки троса, расположенные на вертикали, касательной к блоку A. Модуль искомой скорости

$$v_1 = r\omega_1 = 20 \cdot 60 \cdot \frac{2\pi}{60} = 40\pi \text{ см/с}.$$

Модуль скорости v_2, с которой движутся точки обода блока B и точки

троса, расположенные на вертикали, касательной к блоку B,

$$v_2 = r\omega_2 = 20 \cdot 15 \cdot \frac{2\pi}{60} = 10\pi \text{ см/с}.$$

Эти скорости являются скоростями точек E, D блока C, где трос сходит по касательной с обода (рис. *б*). Таким образом, известны скорости двух точек плоской фигуры, E и D. Эти скорости параллельны между собой и перпендикулярны к линии ED, соединяющей обе точки. Мгновенный центр скоростей блока должен находиться на пересечении перпендикуляров, восставленных к скоростям E и D. В данном случае эти перпендикуляры совпадают. Положение мгновенного центра тем не менее может быть определено, так как скорости точек E и D известны по модулю. Эти скорости пропорциональны расстояниям точек E и D до мгновенного центра скоростей. Следовательно, обозначив неизвестное расстояние от точки D до мгновенного центра скоростей P через l (рис. *б*), получим

$$v_1 = (d+l)\omega, \quad v_2 = l\omega.$$

Решая совместно эти два уравнения, находим, что

$$l = \frac{dv_2}{v_1 - v_2} = 25 \text{ см}. \tag{1}$$

Положение мгновенного центра скоростей P можно определить и другим способом, путем геометрического построения. Для этого необходимо, отложив в избранном масштабе скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, соединить их концы прямыми. Эти прямые пересекаются в точке P — мгновенном центре скоростей. Из подобия треугольников, образованных скоростями $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1$ и этими прямыми, следует, что

$$\frac{DP}{EP} = \frac{v_2}{v_1}, \quad \text{или} \quad \frac{l}{d+l} = \frac{v_2}{v_1},$$

что совпадает с (1).

После того как определено место мгновенного центра скоростей для произвольного положения блока, находим неподвижную и подвижную центроиды. Выбираем неподвижные оси координат: ось x направим по горизонтали вправо, ось y направим по вертикали вверх, вдоль прямой, по которой перемещается ось подвижного блока. При подъеме груза мгновенный центр вращения P будет перемещаться в неподвижном пространстве по прямой, параллельной оси ординат, отстоящей от последней на расстояние $l + d/2$. Эта прямая и является неподвижной центроидой.

Для нахождения подвижной центроиды увеличим мысленно размеры блока, описав окружность радиусом $l + d/2$ с центром O. Все точки, лежащие на ободе блока радиусом $l + d/2$, с течением времени будут становить-

ся мгновенными центрами скоростей. Следовательно, окружность радиусом $l + d/2$ с центром O и будет подвижной центроидой — геометрическим местом мгновенных центров, отмеченных на движущейся плоской фигуре.

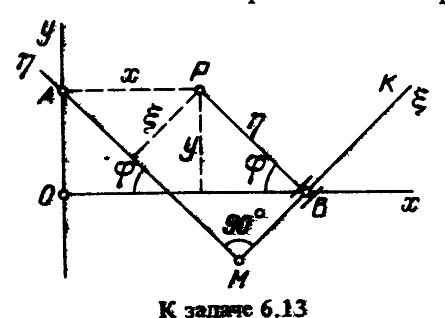
Движение блока O можно рассматривать как качение без скольжения подвижной центроиды, окружности радиусом $l + d/2$, по неподвижной центроиде — вертикали, проходящей через точку P.

Задача 6.13. Прямой угол AMK движется так, что точка A перемещается по неподвижной оси y. Стержень MK проходит все время через вращающийся паз B. Расстояния $AM = OB = l$.

Определить неподвижную и подвижную центроиды прямого угла AMK.

Р е ш е н и е. Найдем положение мгновенного центра скоростей прямого угла AMK. Скорость точки A направлена по оси y, так как согласно условию задачи эта точка движется прямолинейно по оси y. Перпендикуляр к скорости точки A параллелен оси x. Вторая точка прямого угла AMK, направление скорости которой известно, это — точка стержня MK, проходящая в данный момент через шарнир B. Действительно, скорость любой точки стержня MK можно рассматривать как геометрическую сумму двух скоростей: поступательной скорости (вместе с точкой B), направленной по стержню MK, и вращательной скорости (вокруг точки B), равной по модулю произведению угловой скорости прямого угла AMK на расстояние рассматриваемой точки от центра вращения точки B.

Следовательно, для точки стержня MK, которая в данный момент времени проходит через точку B, вращательная составляющая скорости равна нулю и скорость этой точки направлена по стержню MK. Восставляя



К задаче 6.13

перпендикуляр к этой скорости в точке B, находим на пересечении точку P — мгновенный центр скоростей прямого угла AMK (см. рисунок).

Обозначим координаты точки P в неподвижной системе координат x, y и в подвижной системе координат ξ, η. Угол, образованный стержнем AM с осью x, обозначим φ. Тогда

$$x + y \operatorname{ctg} \varphi = l = OB, \tag{1}$$

$$x \cos \varphi + \frac{y}{\sin \varphi} = l = AM. \tag{2}$$

Исключая из этих уравнений угол φ, находим уравнение неподвижной центроиды

$$y^2 = l(2x - l). \tag{3}$$

Это – уравнение параболы с фокусом в точке B.

Уравнение подвижной центроиды найдем, проектируя координаты мгновенного центра скоростей $P(\xi, \eta)$ на оси подвижной системы координат

$$\eta + \xi \operatorname{ctg} \varphi = l = AM, \tag{4}$$

$$\eta \cos \varphi + \frac{\xi}{\sin \varphi} = l = OB. \tag{5}$$

Исключая из этих уравнений φ, находим уравнение подвижной центроиды

$$\xi = l(2\eta - l)^2. \tag{6}$$

Это – парабола с фокусом в точке A.

Плоское движение прямого угла AMK можно представить как качение без скольжения подвижной центроиды (параболы с фокусом A) по неподвижной центроиде (параболе с фокусом в точке B).

Указание. Для приобретения навыков в решении задач на определение центроид плоской фигуры рекомендуется решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 17.1, 17.3–17.5, 17.7–17.11.

§ 4. УСКОРЕНИЯ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Ускорения точек плоской фигуры могут быть определены аналитическими, графоаналитическими и графическими методами. В этом параграфе рассматриваются аналитические и графоаналитические способы определения ускорений точек плоской фигуры. Графический метод нахождения ускорений точек плоской фигуры, заключающийся в построении плана ускорений, будет рассмотрен отдельно.

Аналитический метод. Проекции ускорения любой точки плоской фигуры на неподвижные декартовы оси координат выражаются уравнениями

$$a_x = a_{O_1x} - \epsilon_z(y - y_{O_1}) - \omega_z^2(x - x_{O_1}), \tag{1*}$$

$$a_y = a_{O_1y} + \epsilon_z(x - x_{O_1}) - \omega_z^2(y - y_{O_1}). \tag{2*}$$

В этих формулах a_x, a_y – искомые проекции ускорения точки M на неподвижные оси координат x, y; $a_{O_1x} = \ddot{x}_{O_1}$, $a_{O_1y} = \ddot{y}_{O_1}$ – проекции ускорения полюса (начала подвижной системы координат) на неподвижные

оси координат; $\omega_z = \dot\varphi$ и $\epsilon_z = \ddot\varphi$ – проекции угловой скорости и углового ускорения на ось z, перпендикулярную к плоскости движения; x, y – координаты точки M; x_{O_1}, y_{O_1} – координаты полюса O_1 в неподвижной системе осей (рис. 6.12). Все величины правой части уравнений (1*) и (2*) легко находятся, если заданы уравнения движения плоской фигуры.

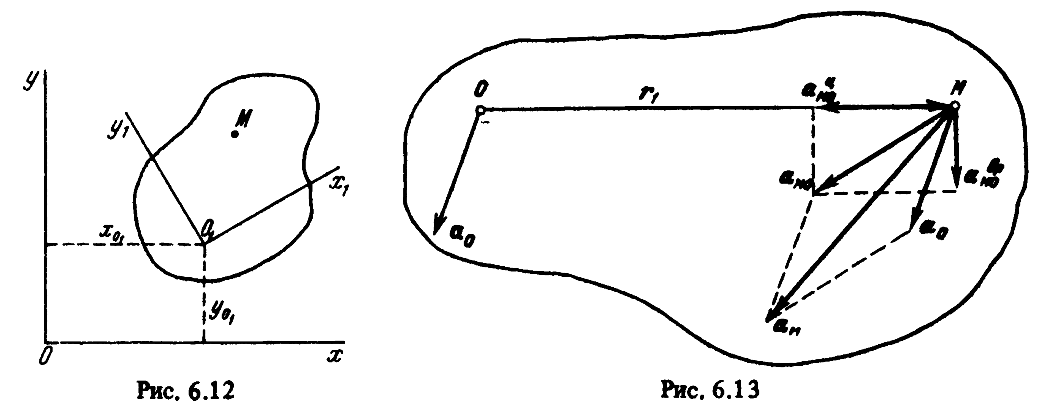


Рис. 6.12 Рис. 6.13

Проекции ускорения точки M на подвижные оси координат определяются формулами:

$$a_{x1} = a_{O1x1} - \epsilon_z y_1 - \omega_z^2 x_1, \tag{3*}$$

$$a_{y1} = a_{O1y1} + \epsilon_z x_1 - \omega_z^2 y_1. \tag{4*}$$

В этих уравнениях a_{x1}, a_{y1} – проекции ускорения точки M на подвижные оси x_1, y_1; a_{O1x1}, a_{O1y1} – проекции ускорения полюса O_1 на подвижные оси x_1, y_1; x_1, y_1 – координаты точки M в подвижных осях; ω_z, ϵ_z – те же, что и в уравнениях (1*), (2*).

Модуль ускорения точки M по известным проекциям определяется формулой

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_{x1}^2 + a_{y1}^2}. \tag{5*}$$

Направляющие косинусы находятся по равенствам:

$$\cos(\widehat{a, x}) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(\widehat{a, y}) = \frac{a_y}{a}, \tag{6*}$$

$$\cos(\widehat{a, x_1}) = \frac{a_{x_1}}{a}, \quad \cos(\widehat{a, y_1}) = \frac{a_{y_1}}{a}. \tag{7*}$$

Графоаналитические методы. Первый графоаналитический способ нахождения ускорений точек плоской фигуры основан на формуле распределения ускорений (рис. 6.13)

$$a_M = a_O + a_{MO}^{\text{вр}} + a_{MO}^{\text{ц}}. \tag{8*}$$

В этой формуле a_M – полное ускорение произвольной точки M плоской фигуры; a_O – ускорение полюса O; $a^{ц}_{MO}$ – центростремительное ускорение при вращении фигуры вокруг полюса, а $a^{вр}_{MO}$ – вращательное ускорение вокруг полюса. При этом

$$a^{ц}_{MO} = -\omega^2 r_1, \quad a^{ц}_{MO} = \omega^2 \cdot OM; \tag{9*}$$

$$a^{вр}_{MO} = \epsilon \times r_1, \quad a^{вр}_{MO} = \epsilon \cdot OM, \tag{10*}$$

где r_1 – радиус-вектор точки M, проведенный из полюса O.

Относительное ускорение

$$a_{MO} = a^{ц}_{MO} + a^{вр}_{MO}, \tag{11*}$$

т.е. равно векторной сумме центростремительного и вращательного ускорений. Центростремительное ускорение $a^{ц}_{MO}$ направлено от точки M к полюсу O. Вращательное ускорение $a^{вр}_{MO}$ направлено перпендикулярно к радиусу-вектору r_1 в сторону вращения плоской фигуры, если вращение ускоренное, и в обратную сторону, если вращение замедленное.

Таким образом, для определения ускорения произвольной точки M необходимо знать ускорение какой-либо точки плоской фигуры, принимаемой за полюс, мгновенную угловую скорость $\vec{\omega}$ плоской фигуры и, наконец, $\vec{\epsilon}$ – ее мгновенное угловое ускорение. Тогда, складывая три вектора a_O, $a^{ц}_{MO}$, $a^{вр}_{MO}$ (рис. 6.13), находим искомое ускорение точки M как сумму этих векторов.

Такой способ решения может быть применен, если угол поворота плоской фигуры φ является известной функцией времени, так как тогда, вычисляя первую и вторую производные от угла поворота по времени можно определить ω_z и ϵ_z.

Во многих задачах зависимость угловой скорости от времени неизвестна. Тогда мгновенная угловая скорость $\vec{\omega}$ может быть найдена только для данного момента, для данного положения плоской фигуры. В этом случае $\vec{\epsilon}$ – мгновенное угловое ускорение – не может быть найдено непосредственно. Задачи на определение ускорений точек плоской фигуры тем не менее могут быть решены, если известно направление ускорения какой-либо точки плоской фигуры. Проектируя в этом случае равенство (8*) на направление r_1, получаем уравнение с одним неизвестным a_M, так как $a^{вр}_{MO}$ перпендикулярно к r_1 и его проекция на r_1 равна нулю. После того как значение a_M определено из уравнения проекций на r_1, составляем второе уравнение проекций на направление $a^{вр}_{MO}$, перпендикулярное к r_1. В этом уравнении единственным неизвестным будет $a^{вр}_{MO}$, после определения которого находится угловое ускорение плоской фигуры $\vec{\epsilon}$ в данный момент. Нахождение ускорений других точек плоской фигуры может далее производиться по формуле (8*).

Одна из точек плоской фигуры, направление ускорения которой может быть определено, совпадает с мгновенным центром скоростей. Ускорение этой точки является касательным ускорением, так как ее нормальное ускорение $a_n = v^2/\rho$ равно нулю, ибо $v = 0$. Это ускорение направлено по общей нормали к неподвижной и подвижной центроидам, так как подвижная центроида катится без скольжения по неподвижной.

Рассмотрим пример. Пусть изображенное на рис. 6.14 колесо катится без скольжения по рельсу. В этом случае обод колеса является подвижной центроидой, рельс – неподвижной. Ускорение точки колеса C

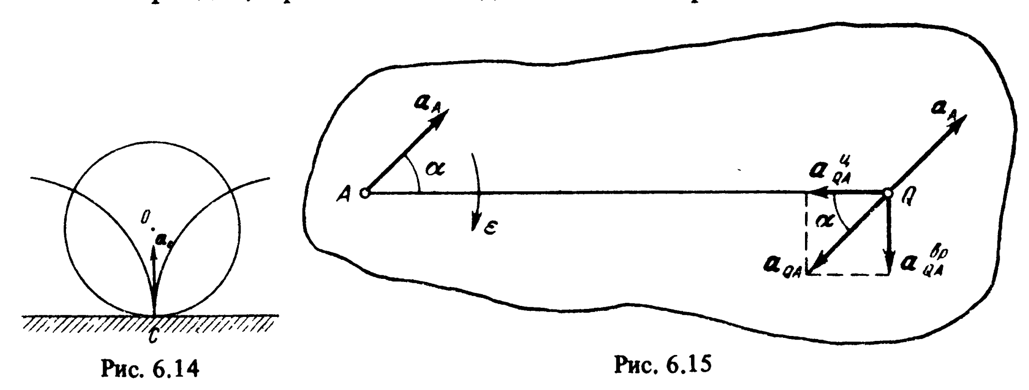


Рис. 6.14 Рис. 6.15

направлено по нормали к центроидам, т.е. к центру колеса O. Действительно, скорость мгновенного центра скоростей точки C равна нулю. Ее нормальное ускорение поэтому равно нулю. Таким образом, полное ускорение точки C колеса является касательным ускорением. На рисунке показаны отрезки циклоиды, являющиеся траекторией точки C. Ускорение a_C, естественно, направлено по касательной к этим кривым. Пользуясь тем, что направление ускорения точки тела, совпадающей в данный момент с мгновенным центром скоростей, известно, можно решать многие задачи.

Не следует смешивать нормальное ускорение точки с центростремительным ускорением относительно полюса, а касательное ускорение – с вращательным ускорением относительно полюса. Действительно, нормальное ускорение любой точки плоской фигуры не зависит от выбора полюса; оно направлено перпендикулярно к скорости точки, т.е. по мгновенному радиусу к мгновенному центру скоростей. Центростремительное ускорение при вращении фигуры относительно полюса зависит от выбора полюса и направлено всегда к полюсу. Касательное ускорение направлено по скорости точки или прямо противоположно скорости, т.е. перпендикулярно к мгновенному радиусу, и не зависит также от выбора полюса. Вращательное ускорение относительно полюса зависит от выбора полюса и направлено перпендикулярно к прямой, соединяющей точку с полюсом.

Если ускорение какой-либо точки находится по формуле распределения ускорений, то для определения нормального ускорения надо спроектировать все составляющие ускорения на направление мгновенного радиуса и вычислить их алгебраическую сумму. Для нахождения касательного ускорения точки следует вычислить алгебраическую сумму проекций составляющих ускорений на направление, перпендикулярное к мгновенному радиусу.

Решение некоторых задач по определению ускорений точек плоской фигуры облегчается тем, что иногда известно нормальное ускорение какой-либо точки плоской фигуры. Тогда задача ставится в таком виде: даны ускорения одной точки плоской фигуры – полюса O, значение мгновенной угловой скорости фигуры $\vec{\omega}$ и, кроме того, нормальное ускорение какой-либо точки M. Проектируя векторное равенство (8*) на направление нормального ускорения точки M, получаем уравнение с одним неизвестным $a^{\text{вр}}_{MO}$, которое из него и определяется. Зная $a^{\text{вр}}_{MO}$, вычисляем мгновенное угловое ускорение ϵ и, далее, пользуясь формулой распределения ускорений (8*), находим ускорение любой точки плоской фигуры.

Одним из графоаналитических методов, нашедшим широкое применение при определении ускорений точек плоской фигуры, является метод, использующий понятие мгновенного центра ускорений.

Мгновенным центром ускорений называется точка плоской фигуры, ускорение которой в данный момент равно нулю. Положение мгновенного центра ускорений Q определяется формулами:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\epsilon}{\omega^2}, \tag{12*}$$

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}}. \tag{13*}$$

Таким образом, откладывая угол α от ускорения (в сторону мгновенного вращения, если оно ускоренное, и в противоположную сторону, если оно замедленное), получаем полупрямую, на которой на расстоянии AQ лежит мгновенный центр ускорений Q (рис. 6.15). При этом если за полюс принять мгновенный центр ускорений, то ускорение любой точки плоской фигуры находится по формуле

$$a_M = a^{\text{ц}}_{MQ} + a^{\text{вр}}_{MQ} = -\omega^2 r_1 + \vec{\epsilon} \times r_1. \tag{14*}$$

Ускорение любой точки составляет с радиусом-вектором, проведенным из мгновенного центра ускорений, один и тот же угол α (12*). Модули ускорений точек плоской фигуры пропорциональны расстояниям до мгновенного центра ускорений (рис. 6.16). Модуль ускорения определяет-

ся формулой

$$a_A = AQ\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}. \qquad (15^*)$$

Положение мгновенного центра ускорений, мгновенная угловая скорость и мгновенное угловое ускорение могут быть найдены, если известны ускорения двух точек плоской фигуры (рис. 6.17) и расстояние между этими точками.

Мгновенный центр ускорений находится путем следующего геометрического построения. Принимая точку A за полюс, имеем:

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA},$$

или

$$\boldsymbol{a}_{BA} = \boldsymbol{a}_B - \boldsymbol{a}_A. \qquad (16^*)$$

Находим (рис. 6.17) сумму $\boldsymbol{a}_B$ и $-\boldsymbol{a}_A$, равную $\boldsymbol{a}_{BA}$. Угол между $\boldsymbol{a}_{BA}$ и AB равен $\alpha = \operatorname{arctg}(\epsilon/\omega^2)$. Откладываем под углом α к $\boldsymbol{a}_A$ и $\boldsymbol{a}_B$ прямые. Точка пересечения этих прямых и является мгновенным центром ускорений.

Определение мгновенной угловой скорости и мгновенного углового ускорения проще всего производится аналитически. Для этого достаточно

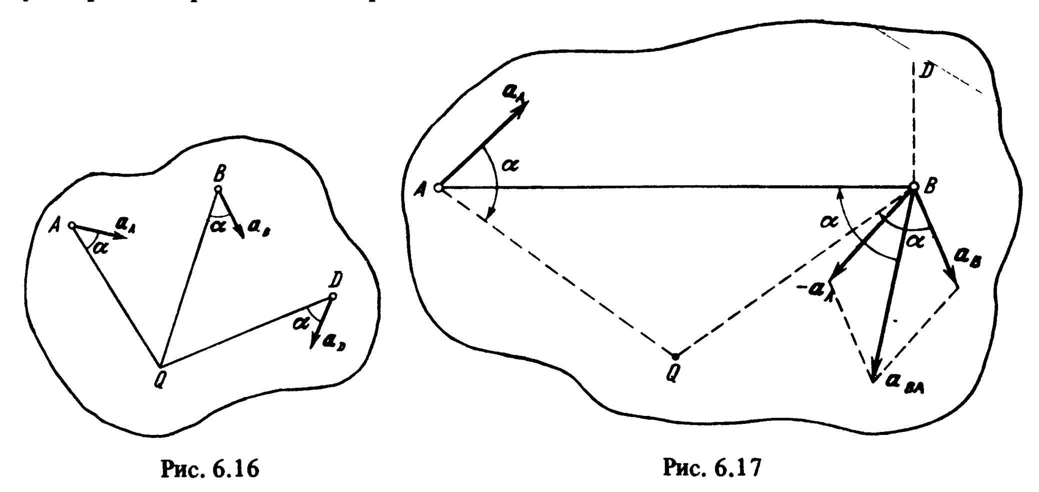


Рис. 6.16 Рис. 6.17

спроектировать второе из равенств (16*) на направление AB и на перпендикулярную к AB ось BD (рис. 6.17):

$$AB \cdot \omega^2 = a_{BA}^{\text{ц}} = \text{пр}_{AB}(\boldsymbol{a}_B) - \text{пр}_{AB}(\boldsymbol{a}_A), \qquad (17^*)$$

$$AB \cdot \epsilon_z = a_{BA}^{\text{вр}} = \text{пр}_{BD}(\boldsymbol{a}_B) - \text{пр}_{BD}(\boldsymbol{a}_A). \qquad (18^*)$$

Угловое ускорение — вектор, перпендикулярный плоскости, в которой происходит движение. Если вращение ускоренное, т.е. угловая скорость

возрастает (по модулю), то угловое ускорение совпадает с угловой скоростью. Если же вращение замедленное, т.е. угловая скорость уменьшается (по модулю), то угловое ускорение направлено противоположно угловой скорости.

Направление углового ускорения можно указывать дуговой стрелкой. В этом случае направление дуговой стрелки можно определить, если известно вращательное ускорение некоторой точки B вокруг точки A. Дуговая стрелка в этом случае рисуется около точки A в направлении, соответствующем направлению вращательного ускорения точки B.

Если известен мгновенный центр ускорений и направление ускорения какой-либо точки плоской фигуры, то направление дуговой стрелки, указывающей направление углового ускорения вокруг мгновенного центра ускорений, находится из соответствия этих величин.

Указание. При решении задач на определение ускорений точек плоской фигуры рекомендуется такая последовательность действий.

А. Заданы скорость и ускорение одной точки плоской фигуры и направление скорости и ускорения другой точки фигуры. Требуется определить ускорения точек плоской фигуры.

1) Находим мгновенный центр скоростей, восставляя перпендикуляры к скоростям двух точек плоской фигуры, и определяем мгновенную угловую скорость фигуры;

2) определяем центростремительное ускорение второй точки вокруг первой;

3) приравнивая нулю сумму проекций всех слагаемых ускорений на ось, перпендикулярную к известному направлению ускорения, находим из этого равенства модуль неизвестного вращательного ускорения;

4) определяем мгновенное угловое ускорение плоской фигуры по найденному вращательному ускорению;

5) находим ускорение любой точки плоской фигуры при помощи формулы распределения ускорений.

Б. Заданы ускорения двух точек плоской фигуры. Требуется определить положение мгновенного центра ускорений и ускорение любой точки плоской фигуры.

1) Рассматривая первую точку как полюс, проектируем на прямую AB, соединяющую обе точки, равенство

$$a_B = a_A + a_{BA}^{\text{вр}} + a_{BA}^{\text{ц}};$$

2) находим из полученного равенства величину $a_{BA}^{\text{ц}}$ и, далее, величину мгновенной угловой скорости плоской фигуры;

3) проектируя то же векторное равенство на направление, перпендикулярное к AB, находим величину вращательного ускорения точки B и, далее, мгновенное угловое ускорение плоской фигуры;

4) находим ускорение любой точки плоской фигуры, пользуясь формулой распределения ускорений;

5) находим положение мгновенного центра ускорений, используя формулы (12*) и (13*).

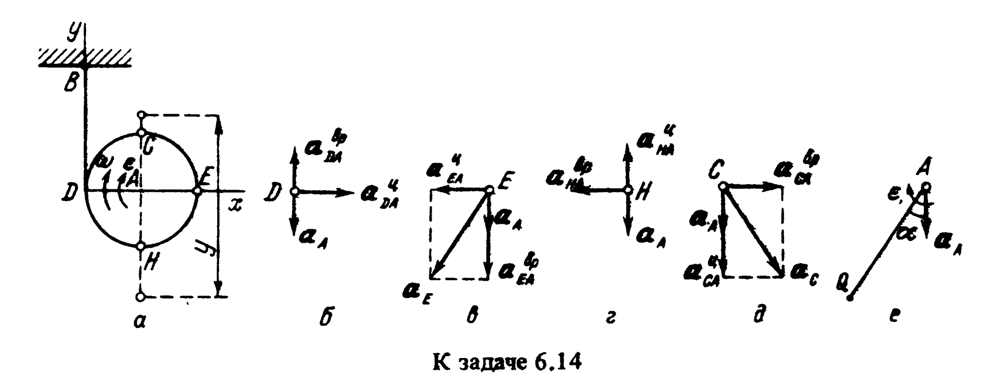
При других известных данных могут быть без особых затруднений составлены аналогичные последовательности действий для решения задач.

Задача 6.14. Цилиндр A падает, разматывая нить (рис. a). Модуль скорости оси цилиндра равен

$$v_A = \frac{2}{3}\sqrt{3gy},$$

где y – расстояние, пройденное центром цилиндра. Радиус цилиндра равен r.

Определить ускорение точек D, C, E, H цилиндра, а также положение мгновенного центра ускорений цилиндра.



К задаче 6.14

Р е ш е н и е. Находим угловую скорость цилиндра, учитывая, что мгновенный центр скоростей цилиндра находится в точке D:

$$\omega_z = \frac{v_A}{r} = \frac{2}{3r}\sqrt{3gy}. \qquad (1)$$

Подставляя в это уравнение значение y, найденное в задаче 6.5,

$$y = \frac{g}{3}t^2,$$

получим

$$\omega_z = \frac{2}{3}\frac{g}{r}t.$$

Находим, далее, проекцию углового ускорения цилиндра как производную от проекции угловой скорости по времени

$$\epsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{2}{3}\,\frac{g}{r}\,.$$

Переходим к определению ускорения точки A. Из формулы (1) имеем

$$v_A = \frac{2}{3}\,gt.$$

Точка A движется прямолинейно по вертикали, следовательно,

$$a_A = \frac{dv_A}{dt}\,,$$

или

$$a_A = \frac{2}{3}\,g. \tag{2}$$

Таким образом, ускорение точки A найдено. Это – единственная точка цилиндра, ускорение которой известно, и, следовательно, ее и надо принять за полюс.

Переходим к определению ускорения мгновенного центра скоростей цилиндра – точки D. Ускорение точки D складывается геометрически из трех ускорений: ускорения полюса, центростремительного и вращательного ускорений при вращении фигуры вокруг полюса (рис. *б*):

$$\boldsymbol{a}_D = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}^{\text{ц}}_{DA} + \boldsymbol{a}^{\text{вр}}_{DA}.$$

Ускорение полюса $\boldsymbol{a}_A$ направлено по вертикали вниз. Откладываем этот вектор от точки D. Находим, далее, модуль вращательного ускорения точки D вокруг полюса

$$a^{\text{вр}}_{DA} = \epsilon r = \frac{2}{3}\,g. \tag{3}$$

Дуговые стрелки угловой скорости и углового ускорения цилиндра направлены по часовой стрелке. Это следует из рассмотрения скорости точки A как вращательной скорости вокруг мгновенного центра скоростей D. Следовательно, вращательное ускорение направлено от точки D по вертикали вверх, в сторону, противоположную $\boldsymbol{a}_A$. Сопоставляя равенства (3) и (2), находим, что по модулю $a_A = a^{\text{вр}}_{DA}$ и, следовательно, эти две составляющие ускорения точки D взаимно уничтожаются.

Центростремительное ускорение точки D вокруг A по модулю равно

$$a^{\text{ц}}_{DA} = \omega^2 r = \frac{4}{9}\,\frac{g^2}{r}\,t^2. \tag{4}$$

Это ускорение направлено от точки D к полюсу A. Таким образом, абсолютное ускорение точки D равно по модулю центростремительному ускорению

$$a_D = \frac{4}{9}\frac{g^2}{r}t^2.$$

Неподвижной центроидой цилиндра является прямая BD, точки которой становятся с течением времени мгновенными центрами скоростей, отмеченными на неподвижной плоскости. Подвижная центроида цилиндра – окружность $CEHD$. Таким образом, ускорение мгновенного центра скоростей точки D направлено по нормали к неподвижной и подвижной центроидам.

Переходим к определению ускорения точки E. Приняв точку A как и ранее, за полюс, имеем (рис. *в*)

$$\boldsymbol{a}_E = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{EA}^{\text{ц}} + \boldsymbol{a}_{EA}^{\text{вр}}.$$

Модуль ускорения $\boldsymbol{a}_{EA}^{\text{ц}}$ равен модулю $\boldsymbol{a}_{DA}^{\text{ц}}$ (4); это ускорение направлено от точки E к полюсу A. Модуль $\boldsymbol{a}_{EA}^{\text{вр}}$ равен модулю $\boldsymbol{a}_{DA}^{\text{вр}}$. Направлено $\boldsymbol{a}_{EA}^{\text{вр}}$ так же, как и $\boldsymbol{a}_A$, по вертикали вниз. Таким образом, модуль ускорения точки E

$$a_E = \sqrt{(a_A + a_{EA}^{\text{вр}})^2 + (a_{EA}^{\text{ц}})^2} = \frac{4}{3}g\sqrt{1 + \frac{g^2t^4}{9r^2}}.$$

Направление $\boldsymbol{a}_E$ определится по формулам

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}_E, x}) = \frac{a_x}{a_E} = -\frac{a_{EA}^{\text{ц}}}{a_E} = -\frac{gt^2}{3r\sqrt{1 + \frac{g^2t^4}{9r^2}}},$$

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}_E, y}) = \frac{a_y}{a_E} = \frac{a_A + a_{EA}^{\text{вр}}}{a_E} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{g^2t^4}{9r^2}}}.$$

Переходим к определению ускорения точки H (рис. *г*):

$$\boldsymbol{a}_H = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{HA}^{\text{ц}} + \boldsymbol{a}_{HA}^{\text{вр}}.$$

Направления составляющих ускорения точки H представлены на рис. *г*, модули их известны. Они подсчитываются по формулам, аналогичным (2), (3), (4). Модуль ускорения точки H

$$a_H = \sqrt{(a_{HA}^{\text{ц}} - a_A)^2 + (a_{HA}^{\text{вр}})^2} = \frac{2}{3}g\sqrt{\left(1 - \frac{2}{3}\frac{gt^2}{r}\right)^2 + 1}.$$

Направление ускорения определится формулами

$$\cos(\widehat{a_H, x}) = \frac{a_x}{a_H} = -\frac{a_{HA}^{\text{вр}}}{a_H} = -\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{2}{3}\frac{gt^2}{r}\right)^2 + 1}},$$

$$\cos(\widehat{a_H, y}) = \frac{a_y}{a_H} = \frac{a_{HA}^{\text{ц}} - a_A}{a_H} = \frac{\frac{2}{3}\frac{gt^2}{r} - 1}{\sqrt{\left(1 - \frac{2}{3}\frac{gt^2}{r}\right)^2 + 1}}.$$

Аналогично (рис. *д*)

$$a_C = \sqrt{(a_A + a_{CA}^{\text{ц}})^2 + (a_{CA}^{\text{вр}})^2} = \frac{2}{3}g\sqrt{\left(1 + \frac{2}{3}\frac{gt^2}{r}\right)^2 + 1},$$

$$\cos(\widehat{a_C, x}) = \frac{a_x}{a_C} = -\frac{a_{CA}^{\text{вр}}}{a_C} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{2}{3}\frac{gt^2}{r}\right)^2 + 1}},$$

$$\cos(\widehat{a_C, y}) = \frac{a_y}{a_C} = -\frac{a_A + a_{CA}^{\text{ц}}}{a_C} = -\frac{1 + \frac{2}{3}\frac{gt^2}{r}}{\sqrt{\left(1 + \frac{2}{3}\frac{gt^2}{r}\right)^2 + 1}}.$$

Переходим к определению положения мгновенного центра ускорений. Угол, составляемый направлением на мгновенный центр ускорений с ускорением любой точки плоской фигуры, определяется из формулы

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\epsilon}{\omega^2} = \frac{3r}{2gt^2}.$$

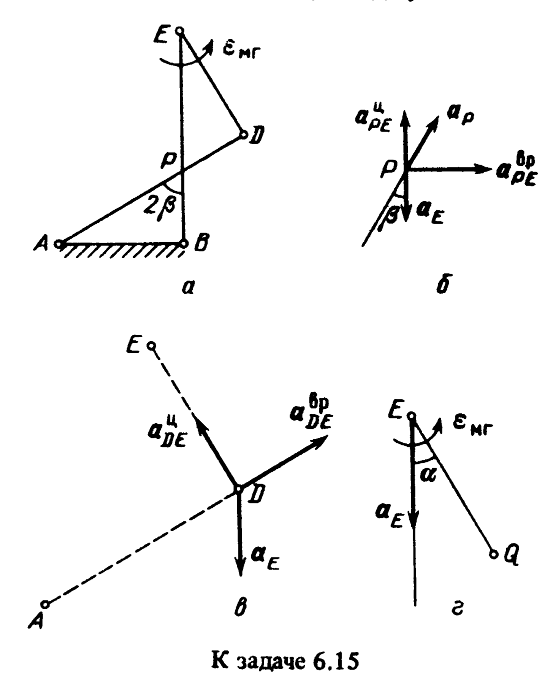
Расстояние от точки A до мгновенного центра ускорений Q

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}} = \frac{r}{\sqrt{1 + \frac{4}{9}\frac{g^2t^4}{r^2}}}.$$

Откладываем угол α от направления ускорения точки A в сторону дуговой стрелки ϵ, т.е. по часовой стрелке. В этом направлении отклады-

ваем от точки A отрезок AQ, конец которого и будет являться мгновенным центром ускорений.

Задача 6.15. Антипараллелограмм образован стержнями: $AD = BE = 10$ см и $AB = ED = 10/\sqrt{3}$ см, соединенными шарнирами (рис. *а*). Звено AB неподвижно. Угловая скорость стержня BE равна по модулю $\omega_0 = \text{const} = 2\ \text{с}^{-1}$. В положении механизма, когда угол $ABE = 0{,}5\pi$, определить



К задаче 6.15

угловое ускорение стержня ED, а также угловую скорость и угловое ускорение стержня AD. Найти положение мгновенного центра ускорений стержня ED.

Решение. Ускорение точки E по модулю равно

$$a_E = \omega_0^2 \cdot BE = 4 \cdot 10 = 40\ \text{см/с}^2 \qquad (1)$$

и направлено от точки E к точке B. Мгновенный центр скоростей стержня ED находится на пересечении перпендикуляров к скоростям точек E и D. Это точка P – мгновенный центр скоростей стержня ED. Возьмем точку E, ускорение которой известно по модулю и по направлению, за полюс.

Рассмотрим ускорение точки P, направление которого известно, так как оно всегда направлено по нормали к центроиде. Как было доказано в задаче 6.10,

$$AP + PB = AD = 10\ \text{см}. \qquad (2)$$

Таким образом, в условиях данной задачи сумма расстояний от точки P, мгновенного центра скоростей стержня ED, до двух неподвижных точек A и B есть величина постоянная. Следовательно, точка P описывает на неподвижной плоскости эллипс, фокусами которого являются точки A и B. Этот эллипс является неподвижной центроидой. По свойству эллипса нормаль к нему в какой-либо точке является биссектрисой внутреннего угла между фокальными радиусами, т.е. биссектрисой угла APB. Таким образом, ускорение точки P, мгновенного центра скоростей прямой ED, направлено по биссектрисе угла APB. Не следует при этом смешивать мгновенный центр скоростей стержня ED с точкой P, принадлежащей стержню BE.

Ускорение этой точки складывается из трех ускорений: ускорения полюса, точки E, центростремительного и вращательного ускорений вокруг полюса:

$$a_P = a_E + a_{PE}^{\text{ц}} + a_{PE}^{\text{вр}}. \tag{3}$$

Строим (рис. *б*) эти ускорения. Ускорение a_E, равное 40 см/с^2, откладываем от точки P по стержню EB. Для определения $a_{PE}^{\text{ц}}$ найдем вначале мгновенную угловую скорость стержня ED. Рассматривая точку E как принадлежащую стержням BE и ED, имеем

$$v_E = \omega_0 \cdot BE = \omega_{\text{мг}} \cdot EP, \tag{4}$$

откуда

$$\omega_{\text{мг}} = \omega_0 \frac{BE}{EP} = 2 \cdot \frac{10}{20} \cdot 3 = 3 \text{ с}^{-1}. \tag{5}$$

В этой формуле, как было показано при решении задачи 6.10,

$$AP = EP = \frac{(AD)^2 + (AB)^2}{2AD} = \frac{20}{3} \text{ см}. \tag{6}$$

Теперь определяем центростремительное ускорение точки P:

$$a_{PE}^{\text{ц}} = EP \cdot \omega_{\text{мг}}^2 = \frac{20}{3} \cdot 9 = 60 \text{ см/с}^2. \tag{7}$$

Это ускорение направлено от точки P к полюсу, к точке E. Вращательное ускорение $a_{PE}^{\text{вр}}$ направлено перпендикулярно к $a_{PE}^{\text{ц}}$; величина этого ускорения неизвестна.

Так как угол APB, как легко показать из рассмотрения треугольника APB, равен 60°, то ускорение точки P составляет угол $\beta = 30°$ с линией PB. Проектируя геометрическое равенство (3) на направление, перпендикулярное к a_P, находим:

$$40 \cos 60° - 60 \cos 60° + a_{PE}^{\text{вр}} \cos 30° = 0, \tag{8}$$

откуда

$$a_{PE}^{\text{вр}} = \frac{20 \cdot 0{,}5 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{20}{\sqrt{3}} \text{ см/с}^2. \tag{9}$$

Следовательно,

$$\epsilon = \frac{a_{PE}^{\text{вр}}}{PE} = \frac{20}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{20} = \sqrt{3} \text{ с}^{-2}. \tag{10}$$

Переходим к определению угловой скорости и углового ускорения стержня AD. Для этого определим ускорение точки D, принадлежащей одновременно стержням ED и AD (рис. *в*). Ускорение точки D как принадлежащей стержню ED определяется формулой

$$\boldsymbol{a}_D = \boldsymbol{a}_E + \boldsymbol{a}_{DE}^{\text{ц}} + \boldsymbol{a}_{DE}^{\text{вр}}. \tag{11}$$

Ускорение $\boldsymbol{a}_{DE}^{\text{ц}}$ направлено от точки D к точке E и его модуль

$$a_{DE}^{\text{ц}} = DE \cdot \omega_{\text{мг}}^2 = \frac{10}{\sqrt{3}} \cdot 9 = 30 \cdot \sqrt{3} \text{ см/с}^2. \tag{12}$$

Ускорение $\boldsymbol{a}_{DE}^{\text{вр}}$ направлено перпендикулярно к $\boldsymbol{a}_{DE}^{\text{ц}}$ и его модуль

$$a_{DE}^{\text{вр}} = DE \cdot \epsilon = \frac{10}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{1} = 10 \text{ см/с}^2. \tag{13}$$

Ускорение $\boldsymbol{a}_E$ известно по модулю (1) и направлению. Таким образом, определены все три составляющие ускорения точки D. С другой стороны, при вращении стержня вокруг неподвижного центра A точка D описывает окружность. Проектируя (11) на нормаль AD, находим абсолютное нормальное ускорение точки D:

$$a_D^n = a_E \cos 60^\circ - a_{DE}^{\text{вр}} = 40 \cdot 0{,}5 - 10 = 10 \text{ см/с}^2. \tag{14}$$

Но, с другой стороны,

$$a_D^n = \omega_1^2 \cdot AD, \tag{15}$$

где ω_1 — искомая угловая скорость стержня AD. Отсюда

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{a_D^n}{AD}} = \sqrt{\frac{10}{10}} = 1 \text{ с}^{-1}. \tag{16}$$

Проектируя равенство (11) на касательную к траектории точки D, т.е. на линию ED, находим абсолютное касательное ускорение точки D:

$$a_D^\tau = a_{DE}^{\text{ц}} - a_E \cos 30^\circ = 30\sqrt{3} - \frac{40\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \text{ см/с}^2. \tag{17}$$

С другой стороны,

$$a_D^\tau = \epsilon_1 \cdot AD, \tag{18}$$

где ϵ_1 – искомое угловое ускорение стержня AD. Следовательно,

$$\epsilon_1 = \frac{a_D^\tau}{AD} = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}\ \text{c}^{-2}. \tag{19}$$

Таким образом, найдены угловая скорость и угловое ускорение всех звеньев антипараллелограмма, зная которые можно определить скорости и ускорения любой точки механизма.

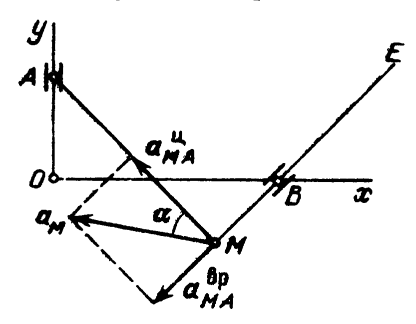
Переходим к определению положения мгновенного центра ускорений стержня ED. Вычисляем угол между ускорением любой точки стержня ED и направлением на мгновенный центр ускорений Q:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\epsilon}{\omega_{\text{мг}}^2} = \frac{\sqrt{3}}{9} = 0{,}19. \tag{20}$$

Находим, далее, расстояние от точки E до мгновенного центра ускорений

$$EQ = \frac{a_E}{\sqrt{\epsilon^2 + \omega_{\text{мг}}^4}} = \frac{40}{\sqrt{3 + 81}} \approx 4{,}37\ \text{см}. \tag{21}$$

Строим мгновенный центр ускорений, откладывая от направления ED, совпадающего с ускорением точки E, угол α в сторону вращения дуговой стрелки ϵ (рис. *г*) и проводя отрезок EQ, равный 4,37 см.



К задаче 6.16

Задача 6.16. Жесткий прямой угол AME движется так, что точка A перемещается по оси y, тогда как другая сторона ME проходит через вращающийся паз B. Длина $AM = OB = b$. Скорость точки A равна $v = \text{const}$.

Определить ускорение точки M.

Р е ш е н и е. Ускорение точки A, движущейся прямолинейно и равномерно, равно нулю. Точка A, таким образом, является мгновенным центром ускорений. Выбираем точку A за полюс.

Ускорение точки M складывается из центростремительного и вращательного ускорений:

$$a_M = a^{\text{ц}}_{MA} + a^{\text{вр}}_{MA}. \qquad (1)$$

Ранее (задача 6.6) была найдена проекция угловой скорости плоской фигуры на ось z:

$$\omega_z = \frac{v}{b}(1 + \cos\varphi). \qquad (2)$$

Тогда центростремительное ускорение точки M равно

$$a^{\text{ц}}_{MA} = \omega_z^2 \cdot AM = \frac{v^2}{b}(1 + \cos\varphi)^2. \qquad (3)$$

Центростремительное ускорение направлено от точки M к полюсу, к точке A.

Для вычисления вращательного ускорения найдем вначале угловое ускорение прямого угла AME. Для этого вычисляем производную от проекции угловой скорости (2) по времени:

$$\epsilon_z = \dot{\omega}_z = -\frac{v}{b}\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} = -\left(\frac{v}{b}\right)^2 \sin\varphi\cdot(1 + \cos\varphi). \qquad (4)$$

Тогда вращательное ускорение точки M равно

$$a^{\text{вр}}_{MA} = \epsilon_z \cdot AM = \frac{v^2}{b}\sin\varphi\cdot(1 + \cos\varphi). \qquad (5)$$

Направления составляющих ускорения точки M показаны на рисунке. Модуль полного ускорения точки M равен

$$a_M = \sqrt{(a^{\text{ц}}_{MA})^2 + (a^{\text{вр}}_{MA})^2} = 2\frac{v^2}{b}(1 + \cos\varphi)\cos\frac{\varphi}{2}. \qquad (6)$$

Направление ускорения точки M определяется углом α:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a^{\text{вр}}}{a^{\text{ц}}} = \frac{\epsilon}{\omega^2} = \frac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi}. \qquad (7)$$

Задача 6.17. Прямоугольник $ABCD$ совершает плоское движение. Ускорение точки A в данный момент равно $a_A = 2$ см/с^2 и составляет угол 30° с прямой AB. Ускорение точки B равно $a_B = 6$ см/с^2 и образует угол 60° с прямой BA. Длины сторон: $AB = 10$ см, $BC = 5$ см.

Определить мгновенную угловую скорость и мгновенное угловое ускорение прямоугольника, а также ускорение точки C.

Решение. Выбираем точку A за полюс. Тогда ускорение точки B

$$a_B = a_A + a_{BA}^{\text{ц}} + a_{BA}^{\text{вр}}. \qquad (1)$$

Проектируем векторное равенство (1) на оси x и y (см. рис. a). В проекции на ось x имеем

$$-a_B \cos 60° = a_A \cos 30° - a_{BA}^{\text{ц}},$$

откуда

$$a_{BA}^{\text{ц}} = a_A \cos 30° + a_B \cos 60° \approx 4{,}73 \text{ см/с}^2.$$

Теперь найдем модуль мгновенной угловой скорости фигуры

$$\omega_{\text{мг}} = \sqrt{\frac{a_{BA}^{\text{ц}}}{AB}} \approx 0{,}69 \text{ рад/с}.$$

Проектируя векторное равенство (1) на ось y, получаем

$$-a_B \cos 30° = a_A \sin 30° - a_{BA}^{\text{вр}}.$$

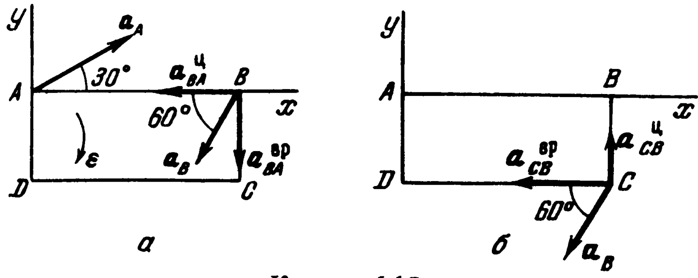
Отсюда определяется вращательное ускорение точки B:

$$a_B^{\text{вр}} = a_{BA} \cos 30° + a_A \sin 30° \approx 6{,}19 \text{ см/с}^2.$$

Далее, находим модуль мгновенного углового ускорения фигуры

$$\epsilon = \frac{a_{AB}^{\text{вр}}}{AB} \approx 0{,}619 \text{ рад/с}^2.$$

Угловое ускорение фигуры направлено по оси z в отрицательную сторону.



К задаче 6.17

Переходим к определению ускорения точки C. Согласно формуле распределения ускорений, выбирая точку B за полюс, имеем (рис. $б$):

$$a_C = a_B + a_{BC}^{\text{ц}} + a_{BC}^{\text{вр}}.$$

Проектируя это равенство на оси x и y, находим

$$a_{Cx} = -a_B \cos 60° - a_{BC}^{\text{вр}} \approx -6{,}095 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{Cy} = -a_B \cos 30° + a_{BC}^{\text{ц}} \approx -2{,}825 \text{ см/с}^2.$$

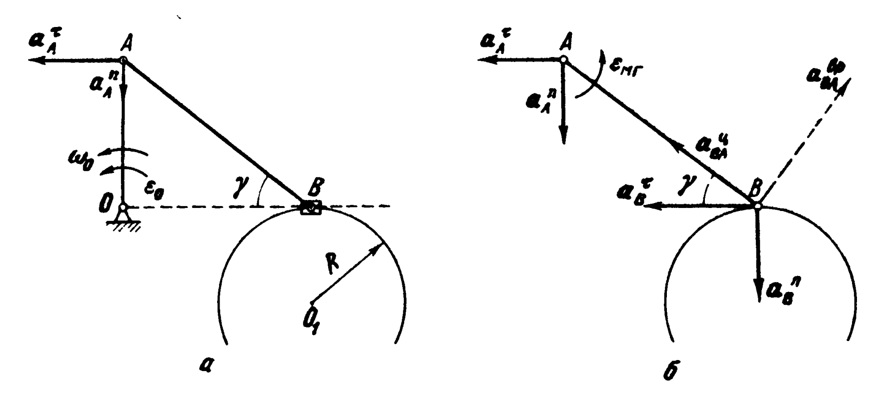
Теперь легко найдется модуль ускорения точки C:

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = \sqrt{45} \approx 6{,}7 \text{ см/с}^2.$$

Направление $\boldsymbol{a}_C$ определится формулами

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}_C, x}) = \frac{a_{Cx}}{a_C} = -0{,}906, \quad \cos(\widehat{\boldsymbol{a}_C, y}) = \frac{a_{Cy}}{a_C} = -0{,}422.$$

Задача 6.18. В кривошипно-ползунном механизме угол BOA равен в данный момент $0{,}5\pi$. Угловая скорость и угловое ускорение кривошипа



К задаче 6.18

длиной $OA = r = 20$ см известны: $\omega_0 = \pi$ рад/с, $\epsilon_0 = 0{,}2\pi$ рад/с^2. Ползун B, описывающий дугу окружности радиусом $R = 30$ см, в данном положении находится на горизонтальной прямой. Длина шатуна $AB = l = 40$ см.

Найти ускорение точки B и мгновенное угловое ускорение шатуна AB.

Решение. Скорости точек A и B шатуна параллельны друг другу и не перпендикулярны к отрезку AB. Следовательно, мгновенный центр скоростей шатуна находится в бесконечности, шатун совершает мгновенно-поступательное движение, скорости всех его точек равны ($\omega_{\text{мг}} = 0$). Модуль скорости точки A и, следовательно, любой точки шатуна равен

$$v_A = OA \cdot \omega_0 = 20\pi \text{ см/с}.$$

Ускорение точки A складывается из нормального и касательного ускорений, модули которых равны

$$a_A^n = AO \cdot \omega_0^2 = 20\pi^2 \text{ см/с}^2, \quad a_A^\tau = AO \cdot \epsilon_0 = 20 \cdot 0{,}2\pi = 4\pi \text{ см/с}^2.$$

Выбирая точку A за полюс как единственную точку шатуна, ускорение которой известно, применяем формулу распределения ускорений для точки B

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^{\text{ц}} + \boldsymbol{a}_{BA}^{\text{вр}}. \tag{1}$$

В данном случае a_B неизвестно по модулю и направлению, $a_{BA}^{вр}$ неизвестно по модулю. Следовательно, непосредственно найти искомые величины из уравнения (1) нельзя. Воспользуемся тем, что может быть определено нормальное ускорение точки B

$$a_B^n = \frac{v_B^2}{R} = \frac{(20\pi)^2}{30} = \frac{40}{3}\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

Проектируя равенство (1) на нормаль к траектории точки B, т.е. на вертикальную ось, получаем

$$a_B^n = a_A^n - a_{BA}^{ц} \sin\gamma - a_{BA}^{вр} \cos\gamma, \qquad (2)$$

где $\sin\gamma = \dfrac{OA}{AB} = 0{,}5$; $\gamma = 30°$. Из формулы (2) находим модуль вращательного ускорения

$$a_{BA}^{вр} = \frac{a_A^n - a_B^n - a_{BA}^{ц}\sin\gamma}{\cos\gamma} = \frac{2\left(20\pi^2 - \dfrac{40}{3}\pi^2\right)}{\sqrt{3}} = \frac{40}{3\sqrt{3}}\pi^2 \text{ см/с}^2,$$

так как $a_{BA}^{ц} = AB \cdot \omega_{мг}^2 = 0$ (рис. *б*). Отсюда найдется значение углового ускорения

$$\epsilon_{мг} = \frac{a_{BA}^{вр}}{AB} = 0{,}192\pi^2 \text{ рад/с}^2.$$

В соответствии со знаком $a_{BA}^{вр}$, $\epsilon_{мг}$ направлено против хода часовой стрелки.

Находим касательное ускорение точки B, проектируя равенство (1) на OB:

$$a_B^\tau = a_A^\tau - a_{BA}^{вр} \sin\gamma = 4\pi - \frac{40}{3\sqrt{3}}\pi^2 \cdot 0{,}5 = -25{,}4 \text{ см/с}^2.$$

Модуль ускорения точки B

$$a_B = \sqrt{(a_B^n)^2 + (a_B^\tau)^2} = 135 \text{ см/с}^2.$$

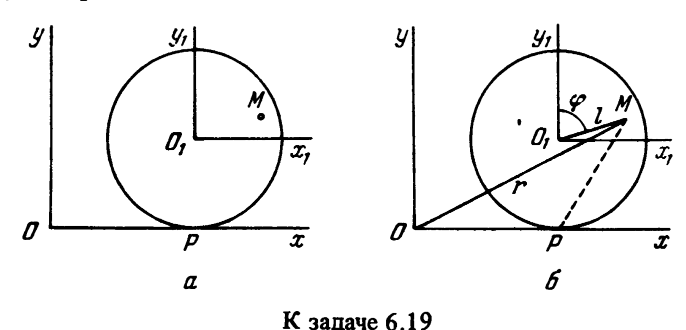
Угол, составленный этим ускорением с линией O_1B, определяется из уравнения

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{a_B^\tau}{a_B^n} \approx -\frac{25{,}4}{135} \approx -0{,}188.$$

Задача 6.19. Колесо радиусом b катится без скольжения по прямолинейному рельсу (рис. *а*). Скорость центра колеса постоянна и равна v_{O_1}.

Определить уравнения движения, скорость и ускорение точки M, жестко связанной с колесом и находящейся на расстоянии $O_1M = l$ от центра колеса.

Р е ш е н и е. Выбираем неподвижную систему координат xy и подвижную систему координат x_1y_1. Подвижная система координат перемещается



К задаче 6.19

поступательно вместе с центром колеса, а ее оси остаются параллельными осям неподвижной системы. Модуль угловой скорости колеса определится из равенства (рис. *б*)

$$v_{O_1} = PO_1 \cdot \omega = b\omega,$$

так как мгновенный центр скоростей находится в точке P соприкосновения колеса с неподвижным рельсом. Следовательно,

$$\omega = \frac{v_{O_1}}{b}. \tag{1}$$

Умножая (1) на dt и учитывая, что $\omega_z = \dfrac{d\varphi}{dt}$, имеем

$$d\varphi = \frac{v_{O_1}}{b}\, dt.$$

Интегрируя, находим

$$\varphi = \frac{v_{O_1}}{b}\, t + C_1. \tag{2}$$

Полагая $\varphi = 0$ при $t = 0$, находим из (2), что произвольная постоянная интегрирования $C_1 = 0$ и, окончательно,

$$\varphi = \frac{v_{O_1}}{b}\, t.$$

Координаты точки M в подвижной системе координат:

$$x_1 = l\sin\varphi = l\sin\frac{v_{O_1}}{b}t, \quad y_1 = l\cos\varphi = l\cos\frac{v_{O_1}}{b}t. \tag{3}$$

Координаты точки M в неподвижной системе координат складываются из координат точки O_1, начала подвижной системы, и координат (3):

$$x = x_{O_1} + x_1 = v_{O_1}t + l\sin\frac{v_{O_1}}{b}t, \quad y = y_{O_1} + y_1 = b + l\cos\frac{v_{O_1}}{b}t,$$

тогда радиус-вектор точки M в неподвижной системе координат будет

$$\boldsymbol{r} = \left(v_{O_1}t + l\sin\frac{v_{O_1}}{b}t\right)\boldsymbol{i} + \left(b + l\cos\frac{v_{O_1}}{b}t\right)\boldsymbol{j},$$

где $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ – орты осей координат.

Скорость точки M определится как производная радиуса-вектора по времени

$$\mathbf{v} = \left(v_{O_1} + \frac{lv_{O_1}}{b}\cos\frac{v_{O_1}}{b}t\right)\boldsymbol{i} - \frac{lv_{O_1}}{b}\sin\frac{v_{O_1}}{b}t\cdot\boldsymbol{j}.$$

Скорость точки M направлена перпендикулярно мгновенному радиусу PM.

Ускорение точки M есть производная от скорости по времени

$$\boldsymbol{a} = -\frac{lv_{O_1}^2}{b^2}\left(\sin\frac{v_{O_1}}{b}t\cdot\boldsymbol{i} + \cos\frac{v_{O_1}}{b}t\cdot\boldsymbol{j}\right). \tag{4}$$

Замечая, с учетом (3), что радиус-вектор $\overline{O_1M}$ равен

$$\boldsymbol{r}_1 = O_1M = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} = l\left(\sin\frac{v_{O_1}}{b}t\cdot\boldsymbol{i} + \cos\frac{v_{O_1}}{b}t\cdot\boldsymbol{j}\right),$$

представим ускорение (4) в виде

$$\boldsymbol{a} = -\frac{v_{O_1}^2}{b^2}\boldsymbol{r}_1.$$

Таким образом, ускорение точки M постоянно по модулю и направлено от точки M к центру колеса.

Указание. Для приобретения навыков в решении задач на определение ускорений точек плоской фигуры рекомендуется решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 18.1, 18.2, 18.7, 18.9, 18.10–18.14, 18.17, 18.21, 18.23, 18.26, 18.29, 18.30, 18.34–18.36.

§ 5. ПЛАН СКОРОСТЕЙ И ПЛАН УСКОРЕНИЙ

План скоростей – это диаграмма, позволяющая графически определить скорости любой точки рассматриваемой плоской фигуры. План скоростей может быть построен, если: а) известна скорость точки A плоской фигуры и направление скорости другой точки B фигуры или б) известна скорость точки A плоской фигуры и мгновенная угловая скорость фигуры. План скоростей может быть построен и для совокупности плоских фигур, образующих плоский механизм.

План скоростей строится для каждого положения механизма отдельно. Для иллюстрации рассмотрим следующий пример.

Пусть фигура ABC (рис. 6.18,*а*) совершает плоское движение. В данный момент скорость точки A равна $\mathbf{v}_A$, направление скорости точки B

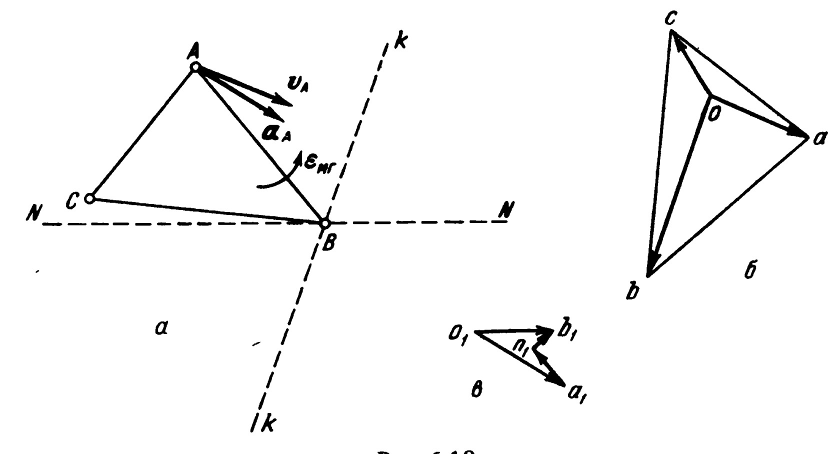


Рис. 6.18

задано штриховой линией kk. Для построения плана скоростей откладываем из произвольного полюса o (рис. 6.18,*б*) отрезок $\overline{oa}$, равный $\mathbf{v}_A$. Из точки o проводим прямую, параллельную направлению скорости точки B, а из точки a – прямую, перпендикулярную отрезку AB, соединяющему точки A и B. Пересечение этих прямых определяет точку b на плане скоростей. Вектор $\overline{ob}$ соответствует скорости точки B

$$\overline{ob} = \mathbf{v}_B, \tag{1*}$$

а вектор $\overline{ab}$ – вращательной скорости точки B вокруг A, т.е.

$$\overline{ab} = \mathbf{v}_{BA} = \vec{\omega} \times \mathbf{r}_1, \tag{2*}$$

где $\mathbf{r}_1 = \overline{AB}$. Полученный на рис. 6.18,*б* векторный треугольник

$$\overline{ob} = \overline{oa} + \overline{ab}$$

соответствует формуле распределения скоростей

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}. \qquad (3^*)$$

Из плана скоростей находится непосредственно модуль мгновенной угловой скорости плоской фигуры

$$\omega_{\text{мг}} = \frac{v_{AB}}{AB} = \frac{ab}{AB}. \qquad (4^*)$$

Для нахождения скорости точки C достаточно провести из точки a прямую, перпендикулярную к AC, а из точки b (рис. 6.18,*б*) прямую, перпендикулярную BC. Пересечение этих прямых определит точку c плана скоростей. Отрезок $\overline{oc}$ будет изображать скорость точки C. Скорости точек плоской фигуры, обозначенных прописными буквами, изображаются на плане скоростей векторами, проведенными из полюса o в соответствующую точку, обозначенную малой буквой; $\overline{ob}$ означает скорость точки B и т.д.

Фигура abc на плане скоростей подобна плоской фигуре ABC (рис. 6.18,*а*), так как любая прямая, обозначенная малыми буквами на плане скоростей (ab, например), перпендикулярна к соответствующей прямой (AB) на плоской фигуре. Таким образом, фигура abc подобна ABC и повернута на угол 90° в направлении вращения.

План ускорений – это диаграмма, позволяющая графически определить ускорение любой точки рассматриваемой плоской фигуры. План ускорений может быть построен, если имеется план скоростей, известно ускорение какой-либо точки A плоской фигуры и направление ускорения другой точки B фигуры. План ускорений может быть также построен, если, кроме плана скоростей и ускорения точки A плоской фигуры, известно положение центра кривизны траектории какой-либо точки B фигуры. Для построения плана ускорений удобно пользоваться формулой распределения ускорений при плоскопараллельном движении:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^{\text{ц}} + \mathbf{a}_{BA}^{\text{вр}}. \qquad (5^*)$$

Построение плана ускорений произведем для той же плоской фигуры, полагая известными ускорение точки A и направление ускорения точки B (прямая NN). Откладываем из произвольной точки o_1 (полюса) ускорение $\mathbf{a}_A = \overline{o_1 a_1}$. Далее, определяем модуль центростремительного ускорения точки B при вращении вокруг точки A

$$a_{BA}^{\text{ц}} = \omega_{\text{мг}}^2 \cdot AB = \left(\frac{v_{BA}}{AB}\right)^2 \cdot AB = \frac{(ab)^2}{AB}, \qquad (6^*)$$

где ab находится непосредственно из плана скоростей (рис. 6.18,*б*). Откладываем найденное центростремительное ускорение $\mathbf{a}_{BA}^{\text{ц}}$ из точки a_1

(рис. 6.18, *в*) в направлении, параллельном $\overline{BA}$. Обозначим этот вектор $\overline{a_1 n_1}$.

Вращательное ускорение $a_{BA}^{\text{вр}}$ направлено перпендикулярно к $a_{BA}^{\text{ц}}$, но неизвестно по модулю. Из конца $a_{BA}^{\text{ц}} = \overline{a_1 n_1}$ проводим прямую, перпендикулярную к $a_1 n_1$: на ней должен находиться конец вектора a_B, отложенного из полюса o_1. С другой стороны, проводя из o_1 прямую, параллельную направлению (NN) ускорения a_B, замечаем, что конец вектора a_B должен находиться и на этой прямой. Следовательно, он находится в точке b_1, где эти прямые пересекаются.

Далее, находим модуль мгновенного углового ускорения плоской фигуры

$$\epsilon_{\text{мг}} = \frac{a_{BA}^{\text{вр}}}{AB} = \frac{n_1 b_1}{AB}. \qquad (7^*)$$

Направление $\epsilon_{\text{мг}}$ можно изображать при помощи дуговой стрелки, которая в данном примере направлена против часовой стрелки. Зная $\epsilon_{\text{мг}}$, можем, пользуясь формулой распределения ускорений (5*), найти ускорение любой точки плоской фигуры.

Второй вариант построения плана ускорений получается, если вместо направления ускорения второй точки (точки B) известно положение центра кривизны траектории точки B в данном положении плоской фигуры – C_1. Построение в этом случае отличается от предыдущего следующим. После того как отложены векторы $\overline{o_1 a_1}$ и $\overline{a_1 n_1}$ и проведено направление $a_{BA}^{\text{вр}}$ перпендикулярно к $\overline{a_1 n_1}$, находим нормальное ускорение точки B

$$a_n = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{(ob)^2}{BC_1} \qquad (8^*)$$

и откладываем этот вектор от полюса o_1 в направлении BC_1. Далее, из конца a_n проводим перпендикулярно к a_n прямую a_τ (направление касательного ускорения). На пересечении этой прямой и ранее проведенного направления $a_{BA}^{\text{вр}}$ и находится точка b_1, конец вектора ускорения a_B.

Построение плана скоростей и плана ускорений было впервые выполнено Мором в 1887 г.

Указание. При построении плана скоростей и плана ускорений плоской фигуры рекомендуется такая последовательность действий:

1) изображаем на чертеже в избранном масштабе плоскую фигуру, скорость и ускорение одной точки A, выбранной за полюс, направление скорости и ускорения другой точки B;

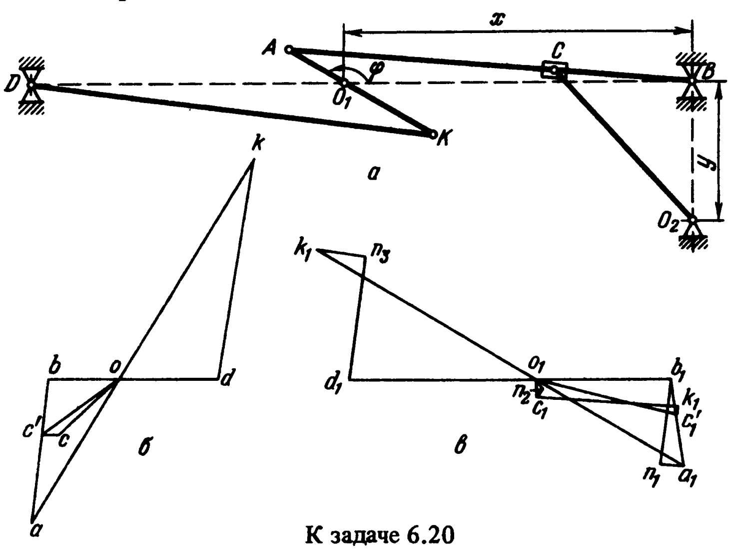
2) строим план скоростей, откладывая из произвольной точки o известную скорость точки A и направление скорости второй точки B, затем проводим из конца $\mathbf{v}_A$ прямую, перпендикулярную к AB, до пересечения с направлением скорости точки B;

3) находим, далее, мгновенную угловую скорость фигуры, после чего можем построить скорость любой точки фигуры, или строим скорости других точек плоской фигуры, откладывая их вращательные скорости перпендикулярно к прямым, соединяющим точки с полюсом A; величины вращательных скоростей берем пропорциональными расстояниям точек до полюса A;

4) строим план ускорений, откладывая из произвольной точки o_1 известное ускорение точки A, из его конца – центростремительное ускорение $a^{ц}_{BA}$ и проводя через конец $a^{ц}_{BA}$ прямую, параллельную вращательному ускорению; пересечение направления ускорения точки B с направлением $a^{вр}_{BA}$ определяет искомое ускорение точки B;

5) находим мгновенное угловое ускорение плоской фигуры, после чего можно построить ускорение точки.

Задача 6.20. Определить скорости и ускорения точек B, C, D кривошипно-ползунного механизма (рис. *а*) построением плана скоростей и ускорений. Кривошип KO_1A вращается равномерно, делая 150 об/мин. Размеры звеньев O_1A = 20 см, O_1K = 30 см, KD = 120 см, AB = 120 см, CO_2 = 60 см. Координаты точки O_2: x = 100 см, y = 40 см. Угол φ = 150°.



К задаче 6.20

Решение. Строим план скоростей. Скорость точки A и точки K направлены перпендикулярно к кривошипу KO_1A и по модулю соответственно равны

$$v_A = O_1A \cdot \omega = O_1A \cdot \frac{2\pi n}{60} = \frac{20 \cdot 2\pi \cdot 150}{60} = 100\pi \text{ см/с},$$

$$v_K = O_1K \cdot \omega = O_1K \cdot \frac{2\pi n}{60} = \frac{30 \cdot 2\pi \cdot 150}{60} = 150\pi \text{ см/с}.$$

Из произвольной точки o (рис. *б*) откладываем в принятом масштабе отрезок $\overline{oa}$, равный скорости $\mathbf{v}_A$. Скорость точки B направлена вдоль прямой O_1B. Она определяется формулой

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}.$$

Для построения скорости точки B из точки o (рис. *б*) проводим прямую, параллельную направлению скорости $\mathbf{v}_B$, а из точки a – прямую, перпендикулярную к AB, до их пересечения в точке b. Полученный таким образом отрезок $\overline{ob}$ определяет скорость точки B, а отрезок $\overline{ab}$ определяет скорость вращения точки B вокруг точки A, модуль которой

$$v_{BA} = BA \cdot \omega_{BA}^{\text{мг}},$$

где $\omega_{BA}^{\text{мг}}$ – мгновенная угловая скорость звена AB. Измерив длины отрезков $\overline{ob}$ и $\overline{ab}$ и учитывая принятый масштаб, имеем

$$v_B = 44\pi \text{ см/с}, \quad v_{BA} = 88\pi \text{ см/с}.$$

Скорость ползуна C направлена перпендикулярно к коромыслу O_2C. С другой стороны, рассматривая движение ползуна как составное движение, состоящее из переносного вместе с шатуном AB и относительного движения вдоль шатуна, находим, что скорость точки C равна сумме переносной и относительной скоростей:

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_C^e + \mathbf{v}_C^r.$$

Переносная скорость $\mathbf{v}_C^e$ есть скорость точки C' шатуна, совпадающей в данный момент с ползуном, а относительная скорость $\mathbf{v}_C^r$ есть скорость ползуна при его движении вдоль шатуна. Так как переносная скорость $\mathbf{v}_C^e$ есть скорость точки C' шатуна, то определяем ее, пользуясь свойством плана скоростей. Для этого делим отрезок $\overline{ab}$ на отрезки, пропорциональные AC и CB:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{ac'}{c'b},$$

тогда отрезок $\overline{oc'}$ представляет переносную скорость ползуна C. Через найденную таким образом точку c' проводим прямую, параллельную относительной скорости $\mathbf{v}_C^r$ параллельно шатуну AB, а из точки o проводим направление абсолютной скорости точки C перпендикулярно к коромыслу CO_2 до пересечения с направлением скорости $\mathbf{v}_C^r$ в точке c. Полученный отрезок oc определяет скорость точки C. Измерив длину этого отрезка

и учитывая принятый масштаб, находим

$$v_C = 50\pi \text{ см/с}.$$

Для нахождения точки D проделываем те же построения, что и для точки B.

Из точки o откладываем в масштабе отрезок $\overline{ok}$, равный скорости $\mathbf{v}_K$. Скорость точки D направлена вдоль прямой O_1D. Она определяется формулой

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_K + \mathbf{v}_{DK}.$$

Чтобы построить скорость точки D из точки o проводим прямую, параллельную направлению скорости $\mathbf{v}_D$, а из точки k – прямую, перпендикулярную к KD, до их пересечения в точке d. Полученный отрезок $\overline{kd}$ определяет скорость вращения точки D вокруг точки K, модуль которой

$$v_{DK} = DK \cdot \omega_{DK}^{\text{мг}},$$

где $\omega_{DK}^{\text{мг}}$ – мгновенная угловая скорость звена DK. Отрезок $\overline{od}$ определяет скорость точки D.

Измерив длины отрезков $\overline{od}$ и $\overline{kd}$ и учитывая принятый масштаб, имеем

$$v_D = 56\pi \text{ см/с}, \quad v_{KD} = 130\pi \text{ см/с}.$$

Переходим к построению плана ускорения. Так как кривошип AO_1K вращается равномерно, ускорения точки A и точки K будут нормальными. Направлены они будут вдоль кривошипа от точки A к точке O_1 и от точки K к точке O_1 и равны по модулю соответственно

$$a_A = O_1A \cdot \omega^2 = O_1A \cdot \left(\frac{2\pi n}{60}\right)^2 = 20\left(\frac{2\pi \cdot 150}{60}\right)^2 = 500\pi^2 \text{ см/с}^2,$$

$$a_K = O_1K \cdot \omega^2 = 30 \cdot 25\pi^2 = 750\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

Из произвольной точки o_1 (рис. *в*) откладываем в масштабе вектор $\overline{o_1a_1}$, равный ускорению a_A. Ускорение точки B направлено вдоль прямой O_1B, так как точка B движется прямолинейно, и равно сумме ускорений полюса, вращательного ускорения и центростремительного ускорения при движении вокруг полюса. Принимая за полюс точку A, имеем

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^{\text{ц}} + \mathbf{a}_{BA}^{\text{вр}}.$$

Вращательное ускорение $\mathbf{a}_{BA}^{\text{вр}}$ направлено перпендикулярно к звену AB, а центростремительное ускорение $\mathbf{a}_{BA}^{\text{ц}}$ направлено вдоль звена AB.

Модуль центростремительного ускорения

$$a_{BA}^{ц} = \frac{(v_{BA})^2}{BA} = \frac{(ba)^2}{BA},$$

где ba снимается прямо с плана скоростей. Модуль скорости вращения v_{BA} точки B вокруг точки A, как было определено для данного положения механизма, равен 88π,

$$a_{BA}^{ц} = \frac{(88\pi)^2}{120} = 65\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

Для построения ускорения точки B из точки o_1 (рис. *в*) проводим направление ускорения a_B, а из точки a_1 откладываем вектор ускорения $a_{BA}^{ц}$, через конец которого, обозначенный буквой n_1, проводим направление вращательного ускорения $a_{BA}^{вр}$ до пересечения его с направлением ускорения a_B в точке b_1. Полученный таким образом отрезок $\overline{o_1 b_1}$ определяет ускорение точки B. Измерив длину этого отрезка и учитывая принятый масштаб, находим

$$a_B = 388\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

Переходим к определению ускорения ползуна C. Движение ползуна рассмотрим вначале как сложное движение, складывающееся из переносного движения вместе с шатуном AB и относительного движения по шатуну. Тогда ускорение ползуна C согласно теореме Кориолиса равно сумме переносного, относительного ускорений и ускорения Кориолиса:

$$a_C = a_C^e + a_C^r + a_C^c.$$

Переносное ускорение a_C^e – это ускорение точки C' шатуна, совпадающей в данный момент с ползуном. Определяем его, пользуясь свойством плана ускорений. Для этого достаточно разделить отрезок $\overline{a_1 b_1}$ на плане ускорений на части, пропорциональные AC и CB:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{a_1 c_1'}{c_1' b_1}.$$

Соединив найденную таким образом точку c_1' с точкой o_1, находим ускорение точки C' шатуна, т.е. переносное ускорение a_C^e. Действительно,

$$a_C^e = a_A + a_{CA}^{ц} + a_{CA}^{вр},$$

но отрезок $\overline{o_1 a_1}$ соответствует ускорению полюса a_A, а отрезок $\overline{a_1 c_1'}$ равен сумме $a_{CA}^{ц} + a_{CA}^{вр}$. Таким образом,

$$a_C^e = o_1 c_1'.$$

Переходим далее к определению ускорения Кориолиса, модуль которого

$$a_C^c = 2\omega_e v_r \sin(\widehat{\vec{\omega}_e \mathbf{v}_r}).$$

Относительная скорость $\mathbf{v}_r$ точки C' определяется из плана скоростей, ей соответствует отрезок $c'c$ (рис. *б*). Ее модуль

$$v_r = 10\pi \text{ см/с}.$$

Переносная угловая скорость ω_e есть мгновенная угловая скорость шатуна. Ее модуль

$$\omega_e = \frac{v_{BA}}{AB} = 0{,}7\pi \text{ рад/с}.$$

Следовательно, $a_C^c = 14\pi^2$ см/с^2, так как

$$\sin(\widehat{\vec{\omega}_e \mathbf{v}_r}) = \sin 90^\circ = 1.$$

Находим направление кориолисова ускорения. Относительная скорость $\mathbf{v}_r$ точки C направлена по шатуну от точки C к точке A. Вектор $\vec{\omega}_e$ направлен от нас перпендикулярно к плоскости рисунка. Следовательно, по правилу Жуковского кориолисово ускорение точки C направлено перпендикулярно к AB вверх. Откладываем его модуль $c_1'k$ из точки c_1' (рис. *в*).

Третья составляющая ускорения точки C – ее относительное ускорение a_e^r – направлена по AB, но неизвестна по модулю. Поэтому из конца ускорения Кориолиса, точки k, можно провести только направление a_C^r. Где-то на этой линии должен находиться конец вектора ускорения a_C.

С другой стороны, рассматривая точку C как точку, принадлежащую звену O_2C, найдем ее ускорение как сумму нормального и касательного ускорений:

$$a_C = a_C^n + a_C^\tau.$$

Модуль нормального ускорения a_C^n

$$a_C^n = \frac{v_C^2}{O_2C} = \frac{(50\pi)^2}{60} = 41{,}7\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

Нормальное ускорение направлено от точки C к точке O_2. Для построения ускорения точки C из точки O_1 плана ускорений откладываем вектор a_C^n, через конец которого, обозначенный буквой n_2, проводим направление ускорения a_C^τ перпендикулярно к звену O_2C. Где-то на этой прямой должен находиться конец вектора a_C. Очевидно, что это будет в точке пересечения векторов a_C^r и a_C^τ, т.е. в точке c_1. Соединив точку c_1 с точкой o_1, получаем отрезок $\overline{o_1c_1}$, соответствующий ускорению a_C. Измерив его и учитывая

принятый масштаб, находим

$$a_C = 60\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

Для нахождения ускорения точки D повторим рассуждения, которыми мы пользовались при нахождении ускорения точки B.

Ускорение a_K направлено от точки K к точке O_1. Из точки O_1 на плане ускорений откладываем в выбранном масштабе отрезок O_1K_1, равный ускорению a_K. Ускорение точки D направлено вдоль прямой O_1D, так как точка D движется прямолинейно, и равно сумме ускорения полюса, вращательного ускорения и центростремительного ускорения при движении вокруг полюса. Принимая за полюс точку K, имеем

$$a_D = a_K + a_{DK}^{\text{ц}} + a_{DK}^{\text{вр}}.$$

Вращательное ускорение $a_{DK}^{\text{вр}}$ направлено перпендикулярно к звену KD, а центростремительное ускорение $a_{DK}^{\text{ц}}$ направлено вдоль звена KD. Модуль

$$a_{DK}^{\text{ц}} = \frac{(v_{DK})^2}{DK} = \frac{(dk)^2}{DK},$$

где dk снимается прямо с плана скоростей.

Модуль скорости вращения v_{DK} точки D вокруг точки K, как было определено, равен 130π см/с, тогда

$$a_{DK}^{\text{ц}} = 141\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

Для построения ускорения точки D из точки o_1 (рис. *в*) проводим направление ускорения a_D, а из точки K_1 откладываем вектор ускорения $a_{DK}^{\text{ц}}$, через конец которого, обозначенный буквой n_3, проводим направление вращательного ускорения $a_{DK}^{\text{вр}}$ до пересечения его с направлением ускорения a_D в точке d_1. Полученный таким образом отрезок $\overline{o_1d_1}$ определяет ускорение точки D. Измерив его длину и учитывая принятый масштаб, находим

$$a_D = 557\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

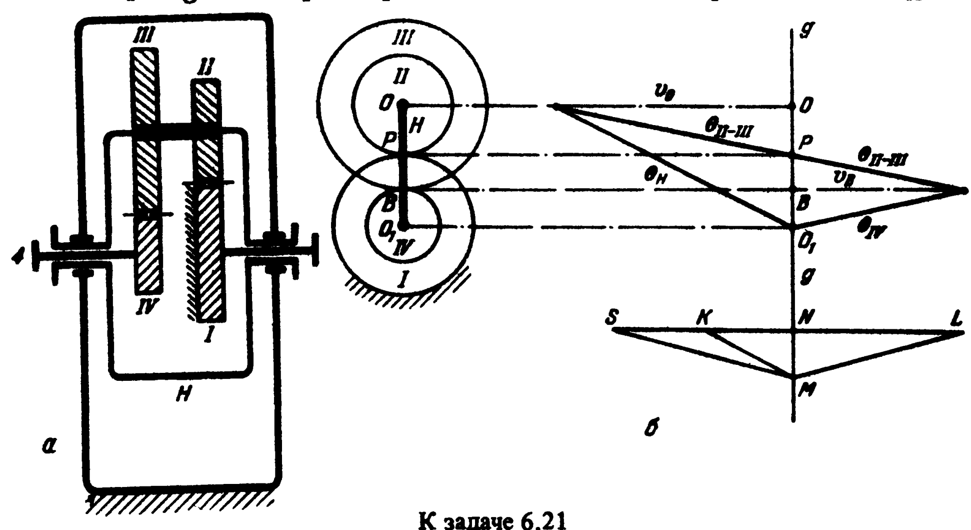
Задача 6.21. Построить план линейных и угловых скоростей для редуктора, изображенного на рис. *а*. Редуктор состоит из водила H, колеса I радиусом $r_1 = 16$ см, закрепленного неподвижно, сателлитов II и III радиусами $r_{\text{II}} = 11$ см и $r_{\text{III}} = 19$ см, жестко скрепленных друг с другом и свободно насаженных на колене водила H, и ведомого колеса IV радиусом $r_{\text{IV}} = 8$ см, заклиненного на валу 4. Угловая скорость водила равна $\Omega = 40\pi$ рад/с.

Решение. Вычерчиваем шестерни редуктора (рис. *б*) в определенном масштабе: 1 см = m м. Проведем линию $g-g$, параллельную линии центров OO_1, и спроектируем на нее точки, скорости которых известны:

точку O_1 – центр вращения водила H и колеса IV, ее скорость $v_{O_1} = 0$, точку P – мгновенный центр вращения сателлитов II и III, ее скорость $v_P = 0$ и точку O – конец водила H, модуль скорости которой равен

$$v_O = \Omega \cdot OO_1 = 40\pi(0{,}16 + 0{,}11) = 33{,}8 \text{ м/с}.$$

Вектор $\mathbf{v}_O$ направлен перпендикулярно к водилу влево. Построим $\mathbf{v}_O$ на плане скоростей в выбранном масштабе (1 см = k м/с). Соединим конец вектора $\mathbf{v}_O$ с центром вращения водила, тогда прямая линия θ_H даст



К задаче 6.21

распределение скоростей на водиле H. Соединяя конец вектора $\mathbf{v}_O$ с точкой P прямой линией θ_{II-III}, получим распределение скоростей на сателлитах II и III. Продолжим линию θ_{II-III} до пересечения с направлением скорости точки B. Точка их пересечения определит скорость $\mathbf{v}_B$. Зная скорость точки B и положение центра вращения колеса IV, проведем прямую θ_{IV}, которая покажет распределение скоростей на колесе IV.

После построения плана линейных скоростей можно определить модуль угловых скоростей всех элементов редуктора. Для этого на продолжении линии $g-g$ выберем произвольную точку N и отложим от нее отрезок NM произвольной длины c (в нашем примере c = 1 см). Из точки M проведем линии: MS параллельно θ_{II-III}, ML параллельно θ_{IV}, KM параллельно θ_H.

Отрезок NS = 4,1 в масштабе $\dfrac{30 \cdot k}{\pi m \cdot c}$ даст модуль угловой скорости в об/мин сателлитов II–III

$$n_{II-III} = \frac{4{,}1 \cdot 30 \cdot k}{\pi \cdot m \cdot 1} = \frac{4{,}1 \cdot 30 \cdot 6{,}55}{\pi \cdot 0{,}1 \cdot 1} = 2560 \text{ об/мин},$$

или в масштабе $\frac{k}{mc}$ модуль угловой скорости в радианах в секунду

$$\omega_{II-III} = \frac{4{,}1 \cdot k}{m \cdot c} = \frac{4{,}1 \cdot 6{,}55}{0{,}1 \cdot 1} = 270 \text{ рад/с}.$$

Отрезок $NL = 3{,}8$ см в соответствующем масштабе дает значение

$$n_{IV} = \frac{3{,}8 \cdot 30 \cdot 6{,}55}{\pi \cdot 0{,}1 \cdot 1} = 2380 \text{ об/мин}, \quad \omega_{IV} = \frac{3{,}8 \cdot 6{,}55}{0{,}1 \cdot 1} = 248 \text{ рад/с}.$$

Отрезок $NK = 1{,}9$ см даст значение угловой скорости водила H

$$n_H = \frac{1{,}9 \cdot 30 \cdot 6{,}55}{\pi \cdot 0{,}1 \cdot 1} \approx 1200 \text{ об/мин}, \quad \omega_H = \frac{1{,}9 \cdot 6{,}55}{0{,}1 \cdot 1} = 126 \text{ рад/с}.$$

Результаты расчетов зависят от точности построения и измерения графических величин. Допускаемая погрешность не превышает 2%.

§ 6. СЛОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ

При сложении вращений твердого тела, происходящих вокруг параллельных осей, могут встретиться три случая.

1. Переносная ω_e и относительная ω_r угловые скорости *одного направления* (рис. 6.19, *а*); в этом случае модуль абсолютной угловой

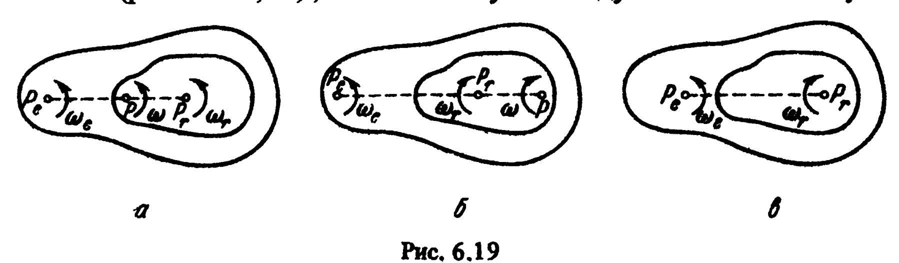


Рис. 6.19

скорости равен сумме модулей составляющих угловых скоростей

$$\omega_a = \omega_e + \omega_r \tag{1*}$$

и направлена она в ту же сторону, а абсолютный мгновенный центр вращения P делит расстояние между переносным мгновенным центром P_e и относительным мгновенным центром P_r на части, обратно пропорциональные модулям переносной и относительной угловых скоростей:

$$\frac{P_eP}{P_rP} = \frac{\omega_r}{\omega_e}. \tag{2*}$$

2. Переносная и относительная угловые скорости *противоположных направлений* (рис. 6.19, *б*) *и не равны друг другу по модулю*; в этом случае модуль абсолютной угловой скорости равен модулю разности составляющих угловых скоростей

$$\omega_a = |\,\omega_r - \omega_e\,| \qquad (3^*)$$

и направлена она в сторону большей из составляющих угловых скоростей (на рис. 6.19, *б* принято $\omega_r > \omega_e$), а абсолютный мгновенный центр вращения P делит расстояние между переносным мгновенным центром P_e и относительным мгновенным центром P_r внешним образом на части, обратно пропорциональные модулям переносной и относительной угловых скоростей:

$$\frac{P_eP}{P_rP} = \frac{\omega_r}{\omega_e}. \qquad (4^*)$$

3. Переносная и относительная угловые скорости *противоположных направлений* (рис. 6.19, *в*) и *равны друг другу по модулю*; в этом случае модуль абсолютной угловой скорости равен нулю, твердое тело совершает

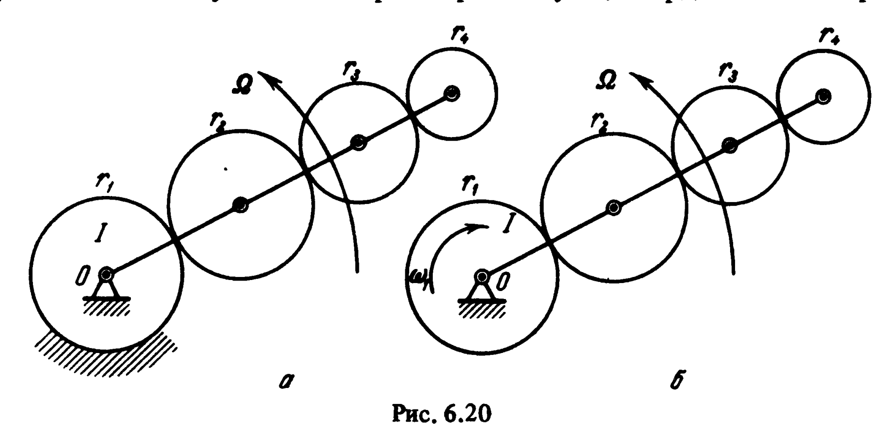


Рис. 6.20

поступательное движение, скорости всех точек равны, они направлены перпендикулярно к прямой P_eP_r и их модуль

$$v = P_eP_r \cdot \omega_e = P_eP_r \cdot \omega_r. \qquad (5^*)$$

При решении задач на определение угловых скоростей планетарных и дифференциальных зубчатых передач обычно применяются формулы Виллиса (1800–1875).

Планетарной зубчатой передачей называется передача (рис. 6.20, *а*), у которой одно колесо неподвижно, а остальные колеса приводятся в движение кривошипом, ось вращения которого совпадает с осью неподвижного колеса; оси остальных колес находятся на кривошипе.

Зубчатая передача называется *дифференциальной* (рис. 6.20, *б*), если колесо *I* вращается вокруг той же оси, что и кривошип.

Формулы Виллиса определяют зависимость между угловыми скоростями зубчатых колес дифференциальной и планетарной передач в случае внешнего и внутреннего зацеплений. В случае внешнего зацепления двух колес (рис. 6.21, *а*) зависимость между проекциями угловых скоростей

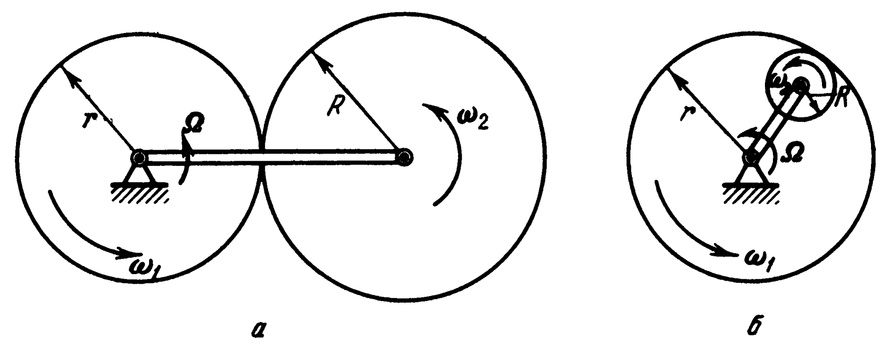


Рис. 6.21

колес (полагаем ось z направленной на читателя) определяется формулой

$$\frac{\omega_{1z} - \Omega_z}{\omega_{2z} - \Omega_z} = -\frac{R}{r} = -\frac{z_2}{z_1}, \qquad (6^*)$$

где R, r – радиусы колес, z_1, z_2 – числа зубцов. Знак минус взят потому, что при внешнем зацеплении и неподвижных осях колеса вращаются в противоположных направлениях.

В случае внутреннего зацепления двух колес (рис. 6.21, *б*) эта зависимость имеет вид

$$\frac{\omega_{1z} - \Omega_z}{\omega_{2z} - \Omega_z} = \frac{R}{r} = \frac{z_2}{z_1}. \qquad (7^*)$$

Знак плюс взят потому, что при внутреннем зацеплении и неподвижных осях колеса вращаются в одном направлении.

Для получения формул (6*) и (7*) даем мысленно основанию механизма вращение с угловой скоростью, равной по модулю угловой скорости кривошипа, но направленной в противоположную сторону. Тогда кривошип становится неподвижным, а угловые скорости всех колес изменяются на величину Ω_z. После этого, рассматривая каждую пару колес, находящихся в зацеплении, можем написать основные соотношения как для пары зубчатых колес с неподвижными осями. Формулы (6*) и (7*) получены приравниванием скоростей точек колес, находящихся в соприкосновении.

Способом Виллиса определяются абсолютные угловые скорости всех зубчатых колес. Далее, используя формулы и методы определения скоростей и ускорений точек тела в плоскопараллельном движении, можно найти скорости и ускорения любой точки звеньев механизма.

Можно поступить иначе. Сначала определить относительную и переносную угловые скорости и, далее, пользуясь теоремой сложения скоростей и теоремой Кориолиса, найти скорости и ускорения любой точки колеса.

Указание. При решении задач на сложение вращений вокруг параллельных осей рекомендуется такая последовательность действий.

А. В задачах на определение передаточных чисел, угловых скоростей, скоростей и ускорений различных точек планетарных и дифференциальных зубчатых передач, решаемых методом плоского движения:

1) даем мысленно основанию механизма вращение с угловой скоростью, равной по модулю угловой скорости кривошипа и направленной в противоположную сторону;

2) составляем для каждой пары колес, находящихся в зацеплении, уравнение (6*) или (7*), выражающее зависимость между угловыми скоростями зубчатых колес;

3) для определения угловой скорости крайнего зубчатого колеса перемножаем все уравнения, составленные для каждой пары колес; значения угловых скоростей промежуточных колес (сателлитов) при этом сокращаются и находится угловая скорость крайнего колеса;

4) зная угловую скорость крайнего колеса и скорость его центра как точки, принадлежащей одновременно и колесу и кривошипу, определяем положение мгновенного центра скоростей крайнего колеса;

5) находим, зная мгновенный центр и мгновенную угловую скорость, скорость любой точки колеса;

6) определяем ускорение центра крайнего колеса как точки, принадлежащей кривошипу;

7) принимая центр крайнего колеса за полюс, находим ускорение точки колеса, которое известно по направлению, и далее угловое ускорение крайнего колеса, после чего находим ускорение любой его точки.

Б. В задачах на определение относительной, переносной и абсолютной угловых скоростей, скоростей и ускорений точек, решаемых при помощи теоремы сложения скоростей и теоремы Кориолиса:

1) выбираем одно вращение за относительное и второе вращение за переносное, результирующее движение за абсолютное;

2) по двум известным угловым скоростям определяем третью угловую скорость;

3)пользуясь теоремой сложения скоростей, находим или относительную, или переносную, или абсолютную скорость любой точки твердого тела;

4) пользуясь теоремой Кориолиса определяем или относительное, или переносное, или абсолютное ускорение любой точки твердого тела.

Задача 6.22. Искусственный спутник Земли, двигаясь по круговой орбите, имеет период обращения, вычисленный по отношению к системе координат, движущейся вместе с центром Земли поступательно, равный 1,5 ч.

Определить его относительную угловую скорость по отношению к Земле, вращающейся вокруг своей оси, если орбита спутника совпадает с экваториальной плоскостью Земли и спутник летит: а) с востока на запад, б) с запада на восток.

Решение. Земля вращается с запада на восток, делая 1 оборот за 24 ч. Принимаем вращение Земли за переносное движение. Следовательно, значение переносной угловой скорости

$$\omega_e = \frac{1}{24} \text{ об/ч}.$$

Абсолютная угловая скорость обращения спутника задана:

$$\omega_a = \frac{1}{1{,}5} \text{ об/ч}.$$

Эта угловая скорость совпадает по направлению с ω_e в случае б) и направлена в противоположную сторону в случае а). Согласно формулам сложения вращений для случая а) имеем $\omega_a = \omega_r - \omega_e$, откуда

$$\omega_r = \omega_a + \omega_e = \frac{1}{1{,}5} + \frac{1}{24} = 0{,}708 \text{ об/ч}.$$

С такой угловой скоростью будет двигаться спутник относительно вращающейся Земли. В случае б) переносная угловая скорость Земли совпадает по направлению с абсолютной угловой скоростью спутника. Следовательно, $\omega_a = \omega_r + \omega_e$, откуда

$$\omega_r = \omega_a - \omega_e = \frac{1}{1{,}5} - \frac{1}{24} = 0{,}624 \text{ об/ч}.$$

Задача 6.23. В дифференциальной передаче кривошип O_1O_4 приводит во вращение колесо *I*, вращающееся вокруг неподвижной оси, проходящей через O_1. Колесо *I* должно вращаться с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$, соответствующей 10 000 об/мин. Зная радиусы колес: $r_1 = 10$ см, $r_2 = 16$ см, $r_3 = 8$ см, $r_4 = 6$ см, найти угловую скорость $\vec{\Omega}$, которую надо сообщить кривошипу, чтобы обеспечить требуемую угловую скорость первого колеса.

Решение. Обозначим угловые скорости колес *I, II, IV, V* через $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$, $\vec{\omega}_4$, $\vec{\omega}_5$ соответственно. Колеса *II* и *III* составляют одно твердое тело и имеют общую угловую скорость $\vec{\omega}_2$. Выбираем ось z направленной перпендикулярно к плоскости чертежа на читателя. Напишем уравнение Виллиса

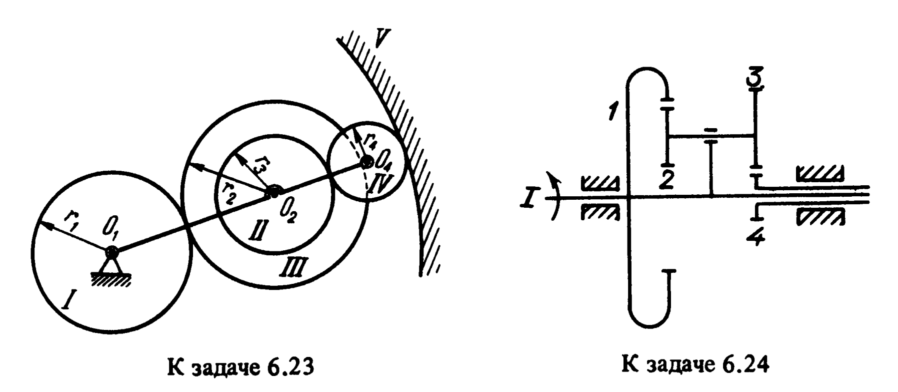
для первой пары колес (см. рисунок):

$$\frac{\omega_{1z} - \Omega_z}{\omega_{2z} - \Omega_z} = -\frac{r_2}{r_1}. \qquad (1)$$

Аналогичное уравнение для колес *III* и *IV* имеет вид

$$\frac{\omega_{2z} - \omega_z}{\omega_{4z} - \Omega_z} = -\frac{r_4}{r_3}, \qquad (2)$$

так как угловые скорости колес *II* и *III* одинаковы, а их радиусы различны.



К задаче 6.23 К задаче 6.24

Для колес *IV* и *V*, находящихся во внутреннем зацеплении, имеем

$$\frac{\omega_{4z} - \Omega_z}{\omega_{5z} - \Omega_z} = \frac{r_5}{r_4}. \qquad (3)$$

Перемножим равенства (1), (2), (3). Тогда, учитывая, что колесо *V* неподвижно и, следовательно, $\omega_5 = 0$, находим

$$\frac{\omega_{1z} - \Omega_z}{0 - \Omega_z} = \frac{r_2 r_5}{r_1 r_3}, \text{ откуда } \Omega_z = \omega_{1z} \frac{r_1 r_3}{r_1 r_3 - r_2 r_5}.$$

Подставляя в это уравнение значения всех величин, находим

$$\Omega_z = 10\,000 \cdot \frac{10 \cdot 8}{10 \cdot 8 - 16 \cdot 46} = -1220 \text{ об/мин}.$$

Знак минус означает, что направление вращения кривошипа и первого колеса противоположны.

Задача 6.24. Вал газотурбинного двигателя делает 25 000 об/мин. Зубчатое колесо *1* с внутренним зацеплением имеет $z_1 = 120$ зубьев и вращается как одно твердое тело с валом *I*. Спаренные между собой передаточные шестерни *2* и *3* имеют соответственно $z_2 = 30$ и $z_3 = 80$ зубьев. Они насажены на общую ось и вращаются с одинаковой угловой скоростью. Зубчатое колесо *3* находится в зацеплении с колесом *4*, соединенным с ва-

лом, на который насажен воздушный винт, делающий 1200 об/мин. Колесо *4* имеет $z_4 = 20$ зубьев (рис.).

Определить угловую скорость, которую необходимо при этом сообщить кривошипу, вращающему ось шестерен *2* и *3*.

Р е ш е н и е. Для решения этой задачи применим способ Виллиса. Обозначим через n_1 угловую скорость вала *I* и жестко связанного с ним колеса *1*, буквой n_2 – угловую скорость шестерен *2* и *3*, буквой n_4 – угловую скорость колеса *4* и жестко связанного с ним вала, на который насажен воздушный винт. Искомую угловую скорость кривошипа, приводящего во вращение ось, на которой укреплены шестерни *2* и *3*, назовем n_0. Дадим мысленно основанию механизма вращение с угловой скоростью $-n_0$, тогда кривошип остановится, а угловые скорости колес станут равными:

колеса *1* $n_1 - n_0$, колес *2* и *3* $n_2 - n_0$, колеса *4* $n_4 - n_0$. (1)

Для первой пары колес, находящихся во внутреннем зацеплении, имеем

$$\frac{n_1 - n_0}{n_2 - n_0} = \frac{z_2}{z_1}. \qquad (2)$$

Для второй пары колес, находящихся во внешнем зацеплении, находим

$$\frac{n_2 - n_0}{n_4 - n_0} = -\frac{z_4}{z_3}. \qquad (3)$$

Перемножая равенства (2) и (3), получаем $\dfrac{n_1 - n_0}{n_4 - n_0} = -\dfrac{z_2}{z_1} \cdot \dfrac{z_4}{z_3}$.

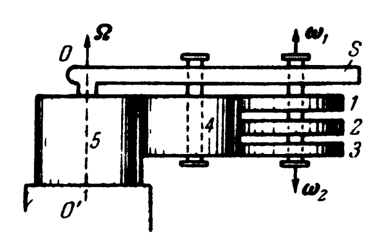
Внося в это уравнение значения известных величин, имеем уравнение с одним неизвестным

$$\frac{25\,000 - n_0}{1200 - n_0} = -\frac{30 \cdot 20}{120 \cdot 80},$$

откуда $n_0 = 23\,600$ об/мин.

Метод Виллиса в этой задаче быстрее ведет к цели по сравнению с методом построения уравнений плоского движения.

Задача 6.25. Водило S вращается вокруг вертикальной оси OO' с угловой скоростью Ω. Водило несет на себе две вертикальные оси, на одной из которых свободно насажены три шестерни *1*, *2*, *3*, а на другой, также свободно, насажена шестерня *4*. Шестерня *4* находится в зубчатом зацеплении с шестернями *1*, *2*, *3* и с неподвижной шестерней *5*. Числа зубцов шестерен *1*, *2*, *3* и *5* соответственно равны: $(z+1)$, z, $(z-1)$ и z (см. рис.).



К задаче 6.25

Определить угловые скорости ω_1, ω_2, ω_3 шестерен *1, 2, 3.*

Р е ш е н и е. Запишем для каждой пары шестерен, находяшихся в зацеплении, формулы Виллиса.

Для пары шестерен *5* и *4* имеем

$$\frac{\omega_4 - \Omega}{0 - \Omega} = -\frac{z}{z_4}, \tag{1}$$

где ω_4 и z_4 обозначают соответственно угловую скорость и число зубцов шестерни сателлита *4.*

Формулы Виллиса для остальных пар шестерен, находящихся в зацеплении, будут

для пары *1–4*

$$\frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_4 - \Omega} = -\frac{z_4}{z+1}; \tag{2}$$

для пары *2–4*

$$\frac{\omega_2 - \Omega}{\omega_4 - \Omega} = -\frac{z_4}{z}; \tag{3}$$

для пары *3–4*

$$\frac{\omega_3 - \Omega}{\omega_4 - \Omega} = -\frac{z_4}{z-1}. \tag{4}$$

Умножив равенство (1) на каждое из равенств (2), (3), (4), найдем

$$\frac{\omega_1 - \Omega}{-\Omega} = \frac{z}{z+1}, \quad \frac{\omega_2 - \Omega}{-\Omega} = \frac{z}{z} = 1, \quad \frac{\omega_3 - \Omega}{-\Omega} = \frac{z}{z-1}.$$

Из этих трех формул определяются три искомые угловые скорости:

$$\omega_1 = \frac{\Omega}{z+1}, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = -\frac{\Omega}{z-1}.$$

Таким образом, шестерня *1* вращается в ту же сторону, что и водило, шестерня *2* перемещается поступательно, а шестерня *3* вращается в сторону, противоположную вращению водила.

У к а з а н и е. Для приобретения навыков в решении задач на сложение вращений вокруг параллельных осей рекомендуется решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 24.3–24.7, 24.9, 24.11, 24.14, 24.16, 24.17.

Глава 7

ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ И СЛОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ ВОКРУГ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ОСЕЙ. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК ТВЕРДОГО ТЕЛА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Положение твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, определяется тремя независимыми величинами (рис. 7.1, *а*). Прямая *OK* жестко связана с твердым телом. Ее положение в пространстве определено углами α и β, которые она образует с осями x и y. Кроме того, твердое тело может повернуться вокруг оси *OK*. Следовательно, третья величина,

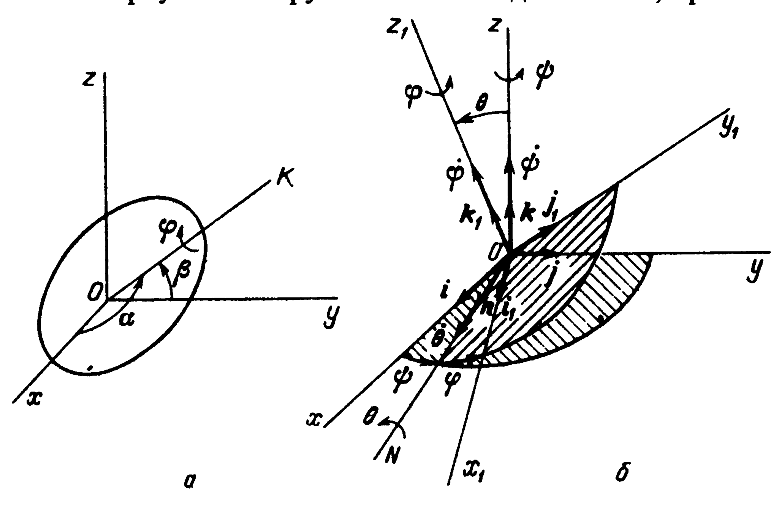


Рис. 7.1

определяющая положение твердого тела, — угол φ, угол поворота тела вокруг оси *OK*.

Однако выбор трех величин, определяющих положение твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, производится другим способом, впервые указанным Леонардом Эйлером.

Выберем неподвижную систему осей xyz с началом в неподвижной точке O и подвижную систему координат $x_1y_1z_1$ с тем же центром, жестко связанную с твердым телом. Линия *ON*, пересечение неподвижной плоскости xy и подвижной плоскости x_1y_1, называется *линией узлов*.

Угол прецессии ψ измеряется от неподвижной оси x до линии узлов ON и считается положительным, если поворот с оси z виден против хода часовой стрелки (рис. 7.1, *б*). Угол прецессии лежит в неподвижной плоскости xy.

Угол чистого, или *собственного вращения* φ расположен в подвижной плоскости x_1y_1 и отсчитывается от линии узлов до подвижной оси x_1. Угол φ положителен, если он виден направленным против хода часовой стрелки с конца оси z_1 (рис. 7,1, *б*).

Угол нутации θ отсчитывается от оси z к оси z_1 и считается положительным, если видеть поворот, смотря с линии узлов ON, происходящим против хода часовой стрелки.

Уравнения движения твердого тела при вращении около неподвижного центра определяются заданием углов Эйлера как функций времени:

$$\psi = f_1(t), \quad \varphi = f_2(t), \quad \theta = f_3(t). \qquad (1^*)$$

Углы Эйлера обладают замечательным свойством: косинусы всех углов, образованных осями x, y, z с осями x_1, y_1, z_1, выражаются рационально через тригонометрические функции углов Эйлера.

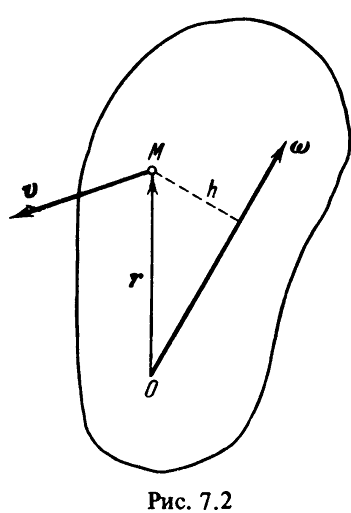


Рис. 7.2

Заметим, что указанный способ выбора углов Эйлера применяется в физике, астрономии, теории гироскопов. В теории корабля, динамике самолета применяют другую систему эйлеровых углов.

Распределение скоростей в твердом теле, вращающемся около неподвижной точки, определяется формулой Эйлера

$$\mathbf{v} = \vec{\omega} \times \mathbf{r}, \qquad (2^*)$$

где $\mathbf{v}$ – скорость точки, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки, проведенный из неподвижного центра, $\vec{\omega}$ – угловая скорость твердого тела (рис. 7.2). Прямая,по которой направлена угловая скорость тела, называется ***мгновенной осью.*** Скорости всех точек твердого тела, лежащих на мгновенной оси, в данный момент равны нулю.

Из формулы (2*) следует, что модуль скорости любой точки тела

$$v = \omega h, \qquad (3^*)$$

где h – расстояние от точки до мгновенной оси. Проекции скорости на неподвижные оси координат определяются формулами:

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z, \quad v_z = \omega_x y - \omega_y x, \qquad (4^*)$$

где x, y, z координаты точки; ω_x, ω_y, ω_z – проекции угловой скорости на неподвижные оси x, y, z.

Проекции скорости на подвижные оси x_1, y_1, z_1 равны

$$v_{x_1} = \omega_{y_1} z_1 - \omega_{z_1} y_1, \quad v_{y_1} = \omega_{z_1} x_1 - \omega_{x_1} z_1, \quad v_{z_1} = \omega_{x_1} y_1 - \omega_{y_1} x_1. \tag{5*}$$

В формулах (4*) координаты x, y, z меняются с течением времени, а в уравнениях (5*) величины x_1, y_1, z_1 остаются неизменными как координаты точки тела в подвижных, связанных жестко с телом осях.

Входящие в уравнения (4*) и (5*) проекции угловой скорости на неподвижные и подвижные оси координат вычисляются по известным углам Эйлера с помощью формул:

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \boldsymbol{k} + \dot{\theta} \boldsymbol{n} + \dot{\varphi} \boldsymbol{k}_1, \tag{6*}$$

где $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{k}_1$ – орты оси z, линии узлов ON и оси z_1 (рис. 7.1),

$$\omega_x = \dot{\varphi} \sin\psi \sin\theta + \dot{\theta} \cos\psi, \quad \omega_y = -\dot{\varphi} \cos\psi \sin\theta + \dot{\theta} \sin\psi, \quad \omega_z = \dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi}, \tag{7*}$$

где ω_x, ω_y, ω_z – проекции угловой скорости на неподвижные оси координат. Далее,

$$\omega_{x_1} = \dot{\psi} \sin\theta \sin\varphi + \dot{\theta} \cos\varphi, \quad \omega_{y_1} = \dot{\psi} \sin\theta \cos\varphi - \dot{\theta} \sin\varphi, \quad \omega_{z_1} = \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi}. \tag{8*}$$

Здесь $\omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}$ – проекции угловой скорости на подвижные оси координат.

Формулы (7*) и (8*) получены Эйлером и носят его имя.

Модуль мгновенной угловой скорости

$$\omega = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta}. \tag{9*}$$

Геометрическое место мгновенных осей, отмеченное в неподвижном пространстве, называется *неподвижным аксоидом*. Уравнение неподвижного аксоида

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}. \tag{10*}$$

Подвижным аксоидом называется геометрическое место мгновенных осей, отмеченное на движущемся теле. Уравнение подвижного аксоида

$$\frac{x_1}{\omega_{x_1}} = \frac{y_1}{\omega_{y_1}} = \frac{z_1}{\omega_{z_1}}. \qquad (11^*)$$

Угловое ускорение твердого тела есть производная от вектора угловой скорости по времени

$$\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \qquad (12^*)$$

Рассматривая $\vec{\omega}$ как радиус-вектор некоторой точки, можно находить $\vec{\epsilon}$ как скорость конца вектора $\vec{\omega}$ при движении по его годографу.

Если обозначить через $\vec{\omega}_0$ орт мгновенной оси, то угловое ускорение определится формулой

$$\vec{\epsilon} = \frac{d}{dt}(\omega \cdot \vec{\omega_0}) = \frac{d\omega}{dt}\vec{\omega}_0 + \omega\frac{d\vec{\omega}_0}{dt}, \quad \text{или} \quad \vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}_1 + \vec{\epsilon}_2,$$

где

$$\vec{\epsilon}_1 = \frac{d\omega}{dt}\vec{\omega}_0$$

— первая составляющая углового ускорения, направленная по мгновенной оси и характеризующая изменение угловой скорости по модулю. Вторая составляющая углового ускорения равна

$$\vec{\epsilon}_2 = \omega\frac{d\vec{\omega}_0}{dt}$$

и характеризует изменение угловой скорости по направлению. Обозначая через $\vec{\omega}_1$ угловую скорость вращения вектора $\vec{\omega}$, имеем

$$\frac{d\vec{\omega}_0}{dt} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_0.$$

Тогда

$$\vec{\epsilon}_2 = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}.$$

Наряду с использованием приведенных формул для нахождения углового ускорения применяют и другой способ определения $\vec{\epsilon}$, через проекции углового ускорения на неподвижные оси координат или оси, жестко связанные с движущимся твердым телом.

Проекции углового ускорения на неподвижные оси координат даются выражениями

$$\epsilon_x = \frac{d\omega_x}{dt}, \quad \epsilon_y = \frac{d\omega_y}{dt}, \quad \epsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt}. \qquad (13^*)$$

Проекции углового ускорения на подвижные оси, жестко связанные с телом, равны

$$\epsilon_{x_1} = \frac{d\omega_{x_1}}{dt}, \quad \epsilon_{y_1} = \frac{d\omega_{y_1}}{dt}, \quad \epsilon_{z_1} = \frac{d\omega_{z_1}}{dt}. \qquad (14^*)$$

Ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижного центра, равно сумме вращательного и осестремительного ускорений (теорема Ривальса)

$$\boldsymbol{a}_M = \boldsymbol{a}_M^{\text{ос}} + \boldsymbol{a}_M^{\text{вр}}, \qquad (15^*)$$

где

$$\boldsymbol{a}_M^{\text{ос}} = \vec{\omega} \times \mathbf{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \boldsymbol{r}), \qquad (16^*)$$

$$\boldsymbol{a}_M^{\text{вр}} = \vec{\epsilon} \times \boldsymbol{r}. \qquad (17^*)$$

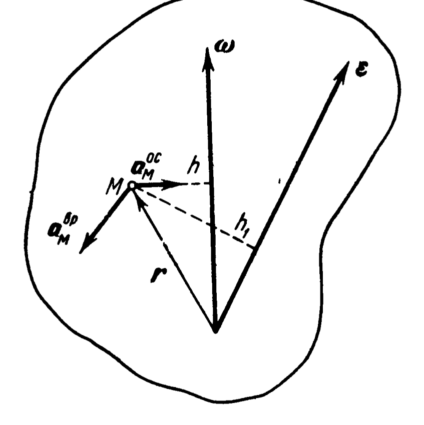


Рис. 7.3

Если угловое ускорение задано в виде

$$\vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}_1 + \vec{\epsilon}_2,$$

то вращательное ускорение определяется формулой

$$\boldsymbol{a}_M^{\text{вр}} = \boldsymbol{a}_{M_1}^{\text{вр}} + \boldsymbol{a}_{M_2}^{\text{вр}} = \vec{\epsilon}_1 \times \boldsymbol{r} + \vec{\epsilon}_2 \times \boldsymbol{r}.$$

Модуль осестремительного ускорения

$$a_M^{\text{ос}} = h\omega^2, \qquad (18^*)$$

где h — кратчайшее расстояние точки до мгновенной оси. Это ускорение направлено по перпендикуляру, опущенному из точки на мгновенную ось (рис. 7.3). Модуль вращательного ускорения

$$a_M^{\text{вр}} = h_1 \epsilon, \qquad (19^*)$$

где h_1 — кратчайшее расстояние точки до оси вектора углового ускорения (рис. 7.3). Направление вращательного ускорения определяется по правилу векторного произведения. Осестремительное и вращательное ускорения, вообще говоря, не взаимно перпендикулярны; это следует из формул (16*), (17*).

Однако существуют такие точки твердого тела, для которых эти ускорения в данный момент взаимно перпендикулярны. Геометрическим местом этих точек является плоскость в твердом теле, проходящая через векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\epsilon}$.

Зная осестремительное и вращательное ускорения, можно определить модуль ускорения точки по формуле

$$a_M = \sqrt{(a_M^{\text{ос}})^2 + (a_M^{\text{вр}})^2 + 2a_M^{\text{ос}} \cdot a_M^{\text{вр}} \cos(\widehat{a_M^{\text{ос}}, a_M^{\text{вр}}})}. \qquad (20^*)$$

Проекции ускорения точки на неподвижные оси равны

$$\begin{aligned} a_x &= \epsilon_y z - \epsilon_z y + \omega_x(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 x, \\ a_y &= \epsilon_z x - \epsilon_x z + \omega_y(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 y, \\ a_z &= \epsilon_x y - \epsilon_y x + \omega_z(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 z. \end{aligned} \qquad (21^*)$$

Проекции ускорения точки на подвижные оси определяются формулами:

$$\begin{aligned} a_{x_1} &= \epsilon_{y_1} z_1 - \epsilon_{z_1} y_1 + \omega_{x_1}(\omega_{x_1} x_1 + \omega_{y_1} y_1 + \omega_{z_1} z_1) - \omega^2 x_1, \\ a_{y_1} &= \epsilon_{z_1} x_1 - \epsilon_{x_1} z_1 + \omega_{y_1}(\omega_{x_1} x_1 + \omega_{y_1} y_1 + \omega_{z_1} z_1) - \omega^2 y_1, \\ a_{z_1} &= \epsilon_{x_1} y_1 - \epsilon_{y_1} x_1 + \omega_{z_1}(\omega_{x_1} x_1 + \omega_{y_1} y_1 + \omega_{z_1} z_1) - \omega^2 z_1. \end{aligned} \qquad (22^*)$$

Производные по времени от ортов подвижных осей координат определяются формулами Пуассона

$$\frac{d\boldsymbol{i}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \boldsymbol{i}_1, \quad \frac{d\boldsymbol{j}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \boldsymbol{j}_1, \quad \frac{d\boldsymbol{k}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \boldsymbol{k}_1. \qquad (23^*)$$

Левая и правая части этих формул — это скорость точки, определяемой соответственно радиусами-векторами $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{k}_1$.

У к а з а н и е. При решении задач на определение скоростей и ускорений точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижного центра, рекомендуется такая последовательность действий.

Заданы уравнения движения в виде углов Эйлера как известных функций времени. Требуется определить угловую скорость и угловое ускорение твердого тела, уравнения подвижного и неподвижного аксоидов, а также скорость и ускорение какой-либо точки $M(x_1, y_1, z_1)$:

1) определить производные от углов Эйлера по времени;
2) найти проекции угловой скорости на оси неподвижной и подвижной систем координат;
3) вычислить модуль мгновенной угловой скорости;
4) определить положение мгновенной оси;
5) составить уравнения неподвижного и подвижного аксоидов;
6) найти мгновенное угловое ускорение как скорость конца вектора $\vec{\omega}$ или через проекции углового ускорения на подвижные и неподвижные оси координат;
7) определить скорость точки M по модулю и направлению;
8) найти вращательное и осестремительное ускорения точки M или проекции ускорения точки M на подвижные и неподвижные оси координат;
9) вычислить ускорение точки M по модулю и направлению.

Задача 7.1. Конус с углом при вершине $BOC = \pi/2$ закреплен шарнирно в точке O и катится без скольжения по плоскости xOy (рис. *а*). Точка A, находящаяся в центре основания конуса, описывает при этом окружность, центр которой расположен на оси z. Перпендикуляр, опущенный из точки A на ось z, вращается вокруг оси z согласно уравнению

$$\varphi_1 = kt^2. \quad (1)$$

Радиус основания конуса $AB = r$.

Определить угловую скорость и угловое ускорение конуса, а также скорость и ускорение точек A, B, C.

Р е ш е н и е. Точка A описывает окружность с центром, лежащим на оси z. Угловая скорость вращения радиуса h этой окружности, соединяющего точку A с центром, равна

$$\omega_1 = \dot{\varphi}_1 = 2kt, \quad (2)$$

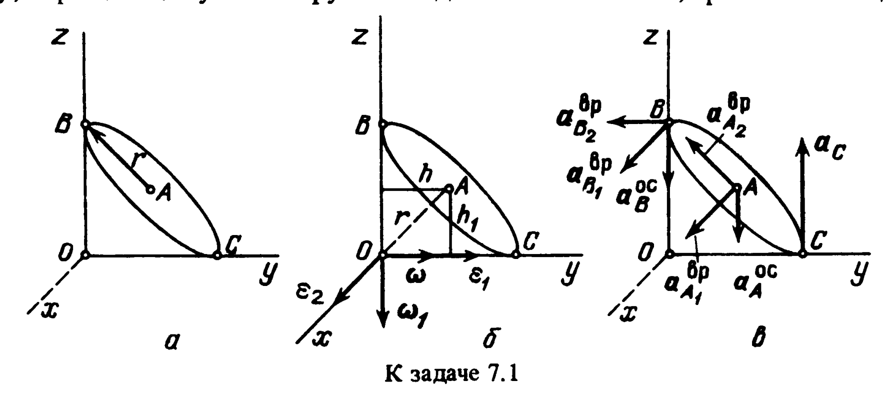
а длина этого радиуса (рис. *б*)

$$h = OA \cdot \cos 45^\circ = r \cos 45^\circ. \quad (3)$$

Следовательно, модуль скорости точки A равен

$$v_A = h\omega_1 = \sqrt{2}rkt. \quad (4)$$

С другой стороны, скорость точки A как принадлежащей твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной точки O, равна по модулю



К задаче 7.1

произведению мгновенной угловой скорости на кратчайшее расстояние от точки A до мгновенной оси. Мгновенная ось конуса направлена по образующей OC. Следовательно,

$$v_A = h_1 \omega, \quad (5)$$

где $h_1 = h = r\cos 45^\circ$. Приравнивая два полученных значения для скорости точки A, находим

$$\omega = \omega_1 = 2kt. \quad (6)$$

Скорость точки A параллельна оси x. Пусть для определенности она совпадает с положительным направлением оси. Тогда $\vec{\omega}_1$ направлена по оси z в отрицательную сторону, а вектор $\vec{\omega}$ – по оси y в положительную сторону (рис. *б*). Переходим к определению углового ускорения. Воспользуемся формулой

$$\vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}_1 + \vec{\epsilon}_2, \tag{7}$$

где

$$\vec{\epsilon}_1 = \frac{d\omega}{dt}\vec{\omega}_0, \qquad \vec{\epsilon}_2 = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}. \tag{8}$$

Тогда в нашей задаче

$$\vec{\epsilon}_1 = 2k\vec{\omega}_0, \tag{9}$$

причем орт мгновенной оси $\vec{\omega}_0$ указывает на то, что вектор $\vec{\epsilon}_1$ направлен по оси y в положительном направлении (рис. *б*).

Вторая составляющая углового ускорения равна по модулю

$$\epsilon_2 = \omega_1 \omega \sin 90^\circ = 4k^2 t^2 \tag{10}$$

и направлена по оси x в положительном направлении (рис. *б*).

Скорость точки C равна нулю, так как эта точка находится на мгновенной оси. Скорость точки B равна по модулю

$$v_B = 2v_A = 2\sqrt{2}\,rkt, \tag{11}$$

так как кратчайшее расстояние точки B до мгновенной оси

$$OB = 2h_1. \tag{12}$$

Вектор $\mathbf{v}_B$ направлен параллельно оси x в положительную сторону.

Переходим к определению ускорений. Ускорение точки C определяется по формуле

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_C^{\text{ос}} + \boldsymbol{a}_{C_1}^{\text{вр}} + \boldsymbol{a}_{C_2}^{\text{вр}}. \tag{13}$$

Точка C лежит на мгновенной оси. Следовательно,

$$\boldsymbol{a}_C^{\text{ос}} = 0. \tag{14}$$

Точно так же и

$$\boldsymbol{a}_{C_1}^{\text{вр}} = \vec{\epsilon}_1 \times \boldsymbol{r}_C = 0 \tag{15}$$

(так как $\vec{\epsilon}_1 \parallel \boldsymbol{r}_C$). Итак,

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_{C_2}^{\text{вр}} = \vec{\epsilon}_2 \times \boldsymbol{r}_C. \tag{16}$$

Ускорение точки C равно по модулю

$$a_C = \epsilon_2 r_C \sin 90^\circ = 4rk^2 t^2 \sqrt{2} \tag{17}$$

и направлено параллельно оси z (рис. *в*).

Ускорение точки B находится по формуле

$$a_B = a_B^{\text{ос}} + a_{B_1}^{\text{вр}} + a_{B_2}^{\text{вр}}. \tag{18}$$

Осестремительное ускорение точки B равно по модулю

$$a_B^{\text{ос}} = OB \cdot \omega^2 = 4\sqrt{2}\, rk^2 t^2 \tag{19}$$

и направлено от точки B к O (рис. *в*).

Ускорение $a_{B_1}^{\text{вр}}$ направлено параллельно оси x (рис. *в*) и равно по модулю

$$a_{B_1}^{\text{вр}} = \epsilon_1 \cdot OB \cdot \sin 90^\circ = 2\sqrt{2}\, rk. \tag{20}$$

Ускорение $a_{B_2}^{\text{вр}}$ направлено параллельно отрицательному направлению оси y (рис. *в*) и равно по модулю

$$a_{B_2}^{\text{вр}} = \epsilon_2 \cdot OB \cdot \sin 90^\circ = 4\sqrt{2}\, rk^2 t^2. \tag{21}$$

Модуль ускорения точки B равен

$$a_B = \sqrt{(a_B^{\text{ос}})^2 + (a_{B_1}^{\text{вр}})^2 + (a_{B_2}^{\text{вр}})^2} = 2rk\sqrt{16k^2t^4 + 2}. \tag{22}$$

Ускорение точки A находится по формуле

$$a_A = a_A^{\text{ос}} + a_{A_1}^{\text{вр}} + a_{A_2}^{\text{вр}}, \tag{23}$$

где осестремительное ускорение равно по модулю

$$a_A^{\text{ос}} = \omega^2 h_1 = 2\sqrt{2}\, rk^2 t^2 \tag{24}$$

и направлено по h_1 к мгновенной оси, (рис. *б*); первая составляющая вращательного ускорения равна

$$a_{A_1}^{\text{вр}} = |\vec{\epsilon}_1 \times r_A| = \epsilon_1 r \sin 45^\circ = \sqrt{2}\, rk \tag{25}$$

и направлена параллельно оси x (в положительную сторону); вторая составляющая вращательного ускорения равна по модулю

$$a_{A_2}^{\text{вр}} = |\vec{\epsilon}_2 \times r_A| = \epsilon_2 r = 4rk^2 t^2 \tag{26}$$

и направлена от A к B.

Заметим, что ускорение точки, движущейся по окружности радиусом h (рис. *б*), может быть найдено по формуле

$$a_A = a_A^n + a_A^\tau, \tag{27}$$

где нормальное ускорение равно

$$a_A^n = \frac{v_A^2}{\rho} = \frac{h^2\omega_1^2}{h} = h\omega_1^2 \tag{28}$$

и направлено от A по h к оси z.

Касательное ускорение равно

$$a_A^\tau = \frac{dv_A}{dt} = \sqrt{2}\,rk \tag{29}$$

и направлено параллельно оси x.

Сопоставляя оба решения, замечаем, что

$$a_{A_1}^{\text{вр}} = a_A^\tau, \quad a_A^n = a_{A_2}^{\text{вр}} \cos 45^\circ \tag{30}$$

и проекция ускорения точки A на ось z равна нулю:

$$a_z = a_{A_2}^{\text{вр}} \cos 45^\circ - a_A^{\text{ос}} = 0. \tag{31}$$

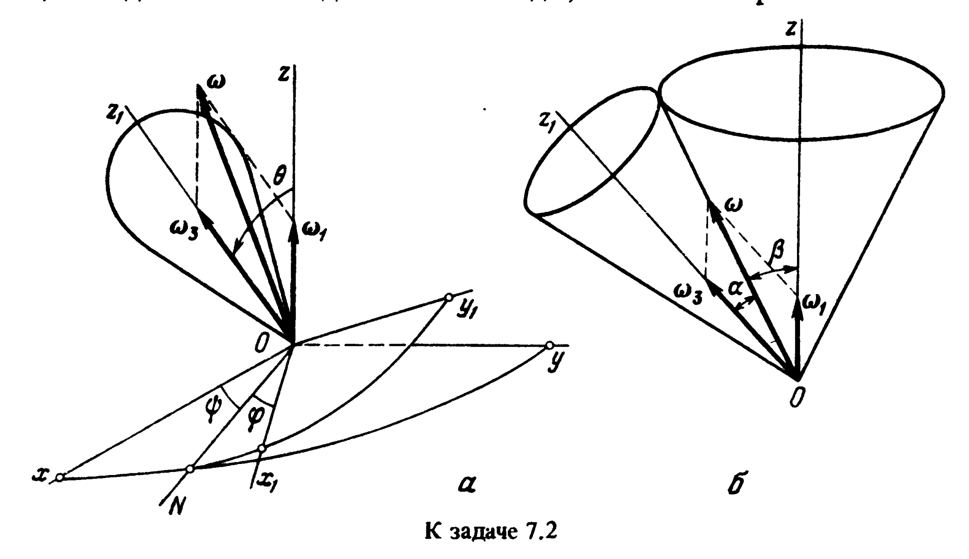
Ускорение точки A расположено в плоскости, параллельной xOy.

Задача 7.2. Твердое тело вращается вокруг неподвижной точки согласно уравнениям

$$\psi = 2t, \qquad \varphi = 30t, \qquad \theta = \pi/6,$$

где углы (рис. *а*) измеряются в радианах, а время – в секундах.

Определить мгновенную угловую скорость тела, уравнение мгновенной оси, неподвижный и подвижный аксоиды, а также скорость точки тела



К задаче 7.2

$M(x_1,\ y_1,\ z_1)$, координаты которой в подвижной системе координат, жестко связанной с телом, равны

$$x_1 = 2 \text{ см}, \qquad y_1 = 3 \text{ см}, \qquad z_1 = 5 \text{ см}.$$

Решение. Выбираем две системы координат с началом в неподвижной точке O: подвижную $x_1y_1z_1$, жестко связанную с твердым телом, и неподвижную систему xyz.

Находим производные по времени от углов Эйлера:

$$\dot{\psi} = 2, \qquad \dot{\varphi} = 30, \qquad \dot{\theta} = 0,$$

и согласно (6*) определяем мгновенную угловую скорость тела

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_3 = \dot{\psi}\boldsymbol{k} + \dot{\varphi}\boldsymbol{k}_1 = 2\boldsymbol{k} + 30\boldsymbol{k}_1, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{k}_1$ — орты осей z и z_1.

Проекции мгновенной угловой скорости на неподвижные оси координат согласно (7*) будут равны

$$\omega_x = 30\sin 2t \sin\frac{\pi}{6}, \qquad \omega_y = -30\cos 2t \sin\frac{\pi}{6}, \qquad \omega_z = 30\cos\frac{\pi}{6} + 2.$$

Проекции мгновенной угловой скорости на подвижные оси координат согласно формулам (8*) запишутся так:

$$\omega_{x_1} = 2\sin\frac{\pi}{6}\sin 30t, \qquad \omega_{y_1} = 2\sin\frac{\pi}{6}\cos 30t, \qquad \omega_{z_1} = 2\cos\frac{\pi}{6} + 30.$$

Модуль мгновенной угловой скорости определится по формулам (9*)

$$\omega = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta} = \sqrt{4 + 900 + 2\cdot 30\sqrt{3}} \approx$$

$$\approx \sqrt{1008} \approx 31{,}8 \text{ рад/с}.$$

Проекции скорости точки M на подвижные оси координат определятся по формулам (5*)

$$v_{x_1} = \omega_{y_1} z_1 - \omega_{z_1} y_1 = 5\cos 30t - (\sqrt{3} + 30)3 = 5\cos 30t - 95{,}19,$$

$$v_{y_1} = \omega_{z_1} x_1 - \omega_{x_1} z_1 = (\sqrt{3} + 20)2 - 5\sin 30t = 63{,}46 - 5\sin 30t,$$

$$v_{z_1} = \omega_{x_1} y_1 - \omega_{y_1} x_1 = 3\sin 30t - 2\cos 30t.$$

Скорость точки M выражается через ее проекции по формуле

$$\mathbf{v} = v_{x_1}\boldsymbol{i}_1 + v_{y_1}\boldsymbol{j}_1 + v_{z_1}\boldsymbol{k}_1 = (5\cos 30t - 95{,}19)\boldsymbol{i}_1 +$$

$$+ (63{,}46 - 5\sin 30t)\boldsymbol{j}_1 + (3\sin 30t - 2\cos 30t)\boldsymbol{k}_1.$$

Уравнение мгновенной оси в неподвижной системе координат согласно (10*) будет

$$\frac{x}{15\sin 2t} = \frac{y}{-15\cos 2t} = \frac{z}{28}. \qquad (2)$$

Уравнение мгновенной оси в подвижной системе осей согласно (11*) имеет вид

$$\frac{x_1}{\sin 30t} = \frac{y_1}{\cos 30t} = \frac{z_1}{31{,}73}. \qquad (3)$$

Из этих равенств находим уравнения неподвижного и подвижного аксоидов, исключая время. Уравнение неподвижного аксоида получаем из (2):

$$x^2 + y^2 - \left(\frac{15z}{28}\right)^2 = 0.$$

Уравнение подвижного аксоида находим из (3)

$$x_1^2 + y_1^2 - \left(\frac{z_1}{31,73}\right)^2 = 0.$$

Определим (рис. *б*) половины углов раствора конусов, образующих неподвижный и подвижный аксоиды. Полагая $y = 0$, находим значение

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{z}{x} = \frac{28}{15} = 1,86.$$

Аналогично, считая $y_1 = 0$, определяем угол раствора для подвижного аксоида

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{z_1}{x_1} = 31,73.$$

Рассмотренное в этой задаче движение твердого тела вокруг неподвижной точки называется *регулярной прецессией*. При этом движении угол нутации θ – постоянная величина, а углы прецессии ψ и чистого вращения φ изменяются пропорционально времени. Прецессия называется *прямой*, если векторы $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_3$ (рис. *б*) образуют острый угол. Прецессия называется *обратной*, если этот угол тупой. В случае прямой прецессии направления собственного вращения твердого тела и вращения его мгновенной оси совпадают. При обратной прецессии эти вращения противоположны.

Задача 7.3. В условиях предыдущей задачи определить мгновенное угловое ускорение твердого тела, а также ускорение точки $M(x_1, y_1, z_1)$.

Решение. Мгновенное угловое ускорение твердого тела равно скорости конца вектора мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}$. Из решения предыдущей задачи (рис. *б*) следует, что вектор $\vec{\omega}$ описывает конус вокруг оси z с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$. Рассматривая $\vec{\omega}$ как радиус-вектор точки твердого тела, вращающегося с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$ вокруг оси z, находим скорость этой точки $\vec{\epsilon}$:

$$\vec{c} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}. \qquad (1)$$

Далее, согласно соотношению (1) предыдущей задачи

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_3 = 2\boldsymbol{k} + 30\boldsymbol{k}_1. \qquad (2)$$

Внося это значение $\vec{\omega}$ в (1), имеем

$$\vec{\epsilon} = \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_3) = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_3. \qquad (3)$$

Из этой формулы следует, что вектор мгновенного углового ускорения направлен перпендикулярно к плоскости zz_1 (рис. *а* предыдущей задачи), т.е. по линии узлов. Угловое ускорение совпадает с положительным направлением линии узлов, если прецессия прямая. При обратной прецессии вектор $\vec{\epsilon}$ направлен в отрицательную сторону оси ON. Модуль мгновенного ускорения определяется из (3)

$$\epsilon = \omega_1 \cdot \omega_3 \sin\theta = 2 \cdot 30 \sin\frac{\pi}{6} = 30 \text{ рад/с}^2.$$

Мгновенное угловое ускорение может быть найдено и другим способом, методом проекций. Согласно формулам (13*) и (14*) проекции углового ускорения соответственно на неподвижные и подвижные оси координат определяются как производные по времени от соответствующих проекций мгновенной угловой скорости. Таким образом, находим проекции углового ускорения на неподвижные оси координат:

$$\epsilon_x = \dot{\omega}_x = (15\sin 2t)' = 30\cos 2t,$$
$$\epsilon_y = \dot{\omega}_y = (-15\cos 2t)' = 30\sin 2t,$$
$$\epsilon_z = \dot{\omega}_z = \left(30\cos\frac{\pi}{6} + 2\right)' = 0.$$

Проекции углового ускорения на подвижные оси координат будут

$$\epsilon_{x_1} = \dot{\omega}_{x_1} = (\sin 30t)' = 30\cos 30t,$$
$$\epsilon_{y_1} = \dot{\omega}_{y_1} = (\cos 30t)' = -30\sin 30t,$$
$$\epsilon_{z_1} = \dot{\omega}_{z_1} = \left(2\cos\frac{\pi}{6} + 30\right)' = 0.$$

Модуль углового ускорения равен

$$\epsilon = \sqrt{\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2} = \sqrt{\epsilon_{x_1}^2 + \epsilon_{y_1}^2 + \epsilon_{z_1}^2} = 30 \text{ рад/с}^2.$$

Направление углового ускорения определяется косинусами

$$\cos(\widehat{\vec{\epsilon}, x}) = \frac{\epsilon_x}{\epsilon} = \cos 2t, \quad \cos(\widehat{\vec{\epsilon}, y}) = \frac{\epsilon_y}{\epsilon} = \sin 2t,$$

$$\cos(\widehat{\vec{\epsilon}, z}) = \frac{\epsilon_z}{\epsilon} = 0, \quad \cos(\widehat{\vec{\epsilon}, x_1}) = \frac{\epsilon_{x_1}}{\epsilon} = \cos 30t,$$

$$\cos(\widehat{\vec{\epsilon}, y_1}) = \frac{\epsilon_{y_1}}{\epsilon} = -\sin 30t, \quad \cos(\widehat{\vec{\epsilon}, z_1}) = \frac{\epsilon_{z_1}}{\epsilon} = 0,$$

откуда следует, что угловое ускорение направлено по линии узлов.

20 Заказ № 899

Переходим к определению ускорения точки M. Находим проекции ускорения точки M на подвижные оси координат, пользуясь формулами (22*):

$$\begin{aligned} a_{x_1} &= -30\sin 30t\cdot 5 + \\ &+ \sin 30t(\sin 30t\cdot 2 + \cos 30t\cdot 3 + 31{,}73\cdot 5) - 1008\cdot 2, \\ a_{y_1} &= -30\cos 30t\cdot 5 + \\ &+ \cos 30t(\sin 30t\cdot 2 + \cos 30t\cdot 3 + 31{,}73\cdot 5) - 1008\cdot 3, \\ a_{z_1} &= 30\cos 30t\cdot 3 + 30\sin 30t\cdot 2 + \\ &+ 31{,}73(\sin 30t\cdot 2 + \cos 30t\cdot 3 + 31{,}73\cdot 5) - 1008\cdot 5. \end{aligned} \qquad (4)$$

Ускорение точки M по найденным проекциям определится формулой

$$a = a_{x_1}\boldsymbol{i}_1 + a_{y_1}\boldsymbol{j}_1 + a_{z_1}\boldsymbol{k}_1,$$

где $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{k}_1$ – орты осей x_1, y_1, z_1.

Указание. Для приобретения навыков в решении задач на вращение твердого тела вокруг неподвижной точки рекомендуется решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 19.1–19.5, 19.9, 19.10, 19.12, 19.14, 19.15, 20.15, 20.17, 20.18.

§2. СЛОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ ВОКРУГ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ОСЕЙ

Если твердое тело одновременно участвует в двух вращениях вокруг пересекающихся осей, то одно из этих движений принимается за переносное вращение, а второе – за относительное. Обозначая мгновенные угловые скорости переносного движения через $\vec{\omega}_e$ и относительного движения через $\vec{\omega}_r$, можно найти мгновенную угловую скорость абсолютного движения $\vec{\omega}_a$ по формуле (рис. 7.4):

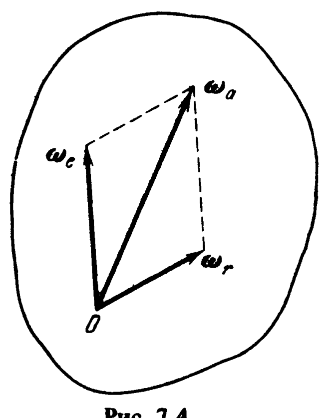


Рис. 7.4

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r. \qquad (1^*)$$

Одна из угловых скоростей ($\vec{\omega}_e$) есть угловая скорость некоторого подвижного трехгранника (с вершиной в неподвижной точке тела), а другая ($\vec{\omega}_r$) – угловая скорость тела относительно этого трехгранника.

Таким образом, результирующее движение также является вращением твердого тела вокруг неподвижной точки. Поэтому все сказанное в предыдущем параграфе относительно определения скоростей и ускорений точек твердого тела, нахождения уравнений подвижного и неподвижного аксоидов, углового ускорения может быть применено в данном случае.

Наряду с этим при решении задач в этом параграфе может быть использован и другой способ. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки O с угловой скоростью $\vec{\omega}_r$ примем за относительное движение, а движение с угловой скоростью $\vec{\omega}_e$ примем за переносное движение. Тогда определение скоростей точек твердого тела может быть произведено на основании теоремы сложения скоростей

$$\mathrm{v}_a = \mathrm{v}_e + \mathrm{v}_r, \qquad (2^*)$$

где v_a — абсолютная скорость точки; v_e и v_r — соответственно ее переносная и относительная скорости. Для определения ускорений точек может быть применена теорема сложения ускорений (теорема Кориолиса)

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_c, \qquad (3^*)$$

где $\boldsymbol{a}_a$ — абсолютное ускорение точки, $\boldsymbol{a}_e, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_c$ — соответственно переносное, относительное и кориолисово ускорения.

Кориолисово ускорение определяется формулой

$$\boldsymbol{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \mathrm{v}_r. \qquad (4^*)$$

Указание. При решении задач на сложение вращений вокруг пересекающихся осей могут быть использованы два способа.

Способ 1. По заданным угловым скоростям переносного и относительного вращений определяется абсолютная угловая скорость и, далее, согласно последовательности действий, установленной в § 1 этой главы, находятся все искомые величины.

Способ 2. Рекомендуется такая последовательность действий:

1) выбираются неподвижная система координат так, чтобы ее ось z совпала с переносной угловой скоростью $\vec{\omega}_e$, и подвижная система координат так, чтобы ее ось z_1 совпала с относительной угловой скоростью $\vec{\omega}_r$;

2) по известным переносной и относительной угловым скоростям находится абсолютная угловая скорость;

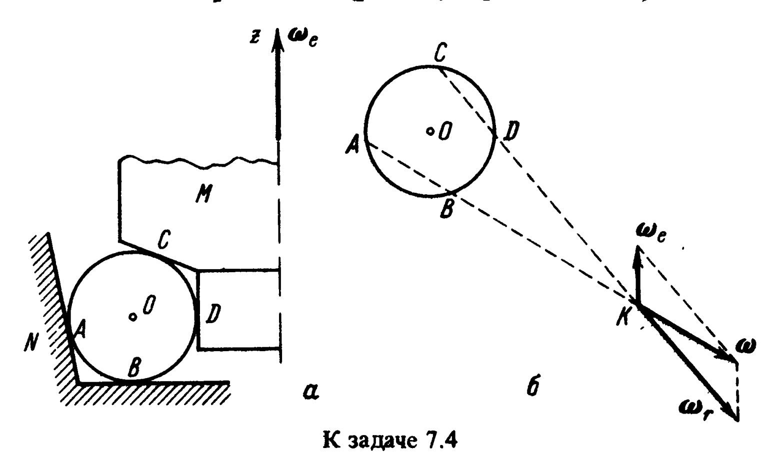
3) определяются искомые скорости точек в относительном и переносном вращениях и, далее, искомые абсолютные скорости;

4) находятся переносное, относительное и кориолисово ускорения и, далее, искомое абсолютное ускорение точек твердого тела путем векторного сложения или сложением при помощи метода проекций.

Задача 7.4. Шарикоподшипник (рис. *а*) состоит из неподвижной обоймы N, внутренней обоймы M, вращающейся вокруг вертикальной оси z с угловой скоростью $\vec{\omega}_e$, и шарика O, зажатого между обоймами.

Определить положение оси z, при котором шарик будет катиться по обоймам M и N без скольжения. Пользуясь рисунком к задаче, найти графически абсолютную угловую скорость шарика и его относительную угловую скорость по отношению к вращающейся обойме M, если $\vec{\omega}_e$ задана.

Решение. Будем исходить из условия, что шарик O катится по обоймам M и N без скольжения. Следовательно, точки A, B шарика, находящиеся в соприкосновении с неподвижной обоймой N, имеют скорости, равные нулю. Абсолютная мгновенная ось шарика должна проходить через эти две точки. Проводим (рис. *б*) прямую $\vec{\omega}$ через эти две точки.



К задаче 7.4

Точки шарика C, D, находящиеся в соприкосновении с вращающейся обоймой M, должны иметь одинаковые абсолютные скорости с точками обоймы M. Значит, относительные скорости точек шарика, соприкасающихся с точками обоймы M, равны нулю. Следовательно, относительная мгновенная ось шарика проходит через точки соприкосновения с вращающейся обоймой M. Проводим (рис. *б*) эту прямую $\vec{\omega}_r$.

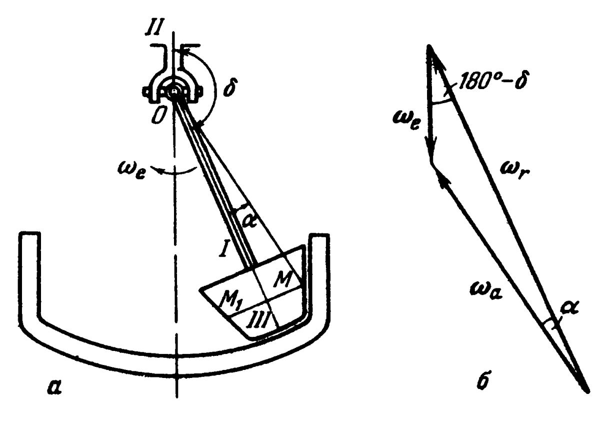
Находим точку пересечения K прямых $\vec{\omega}$ и $\vec{\omega}_r$. Движение шарика без скольжения будет достигнуто, если вертикальная ось z будет проходить через точку K. Точка K будет оставаться неподвижной во все время движения.

Задача 7.5. В механизме маятниковой мельницы (рис. *а*) главный вал I соединен с ведущим валом II посредством шарнира Гука. На конце главного вала жестко закреплен бегун III. При достаточно большой частоте вращения ведущего вала бегун прижимается изнутри к стенке цилиндрической чаши так, что сечение бегуна M_1M катится по чаше без скольжения. Радиус этого сечения виден из центра шарнира под углом α. Угол между главным валом и ведущим валом δ.

Найти угловую скорость вращения бегуна вокруг его оси симметрии, если известна угловая скорость ведущего вала.

Решение. Движение бегуна рассматриваем как сложное, состоящее из вращения вокруг вертикальной оси и вращения вокруг оси симметрии. Вращение бегуна вокруг вертикальной оси (вала II) принимаем за переносное, вращение вокруг оси симметрии (вала I) назовем относительным

Мгновенная ось абсолютного вращения — это линия, соединяющая две неподвижные точки O и M. Вдоль линии OM направлен вектор абсолютной мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}_a$. Вектор переносной угловой скорости $\vec{\omega}_e$ направлен по оси ведущего вала. Вектор относительной угловой скорости $\vec{\omega}_r$ (это искомая в задаче частота вращения вокруг оси симмет-



К задаче 7.5

рии) направлен по главному валу I. Предположим, что для наблюдателя, смотрящего на мельницу сверху, бегун движется по ходу часовой стрелки. Тогда вектор переносной угловой скорости $\vec{\omega}_e$ направлен вертикально вниз; основное векторное соотношение

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r$$

представлено на рис. *б*. Рассматривая треугольник, образованный векторами $\vec{\omega}_a$, $\vec{\omega}_e$ и $\vec{\omega}_r$, имеем по теореме синусов

$$\frac{\omega_e}{\sin\alpha} = \frac{\omega_r}{\sin[180^\circ - \alpha - (180^\circ - \delta)]} \quad \text{или} \quad \frac{\omega_e}{\sin\alpha} = \frac{\omega_r}{\sin(\delta - \alpha)},$$

откуда окончательно находим

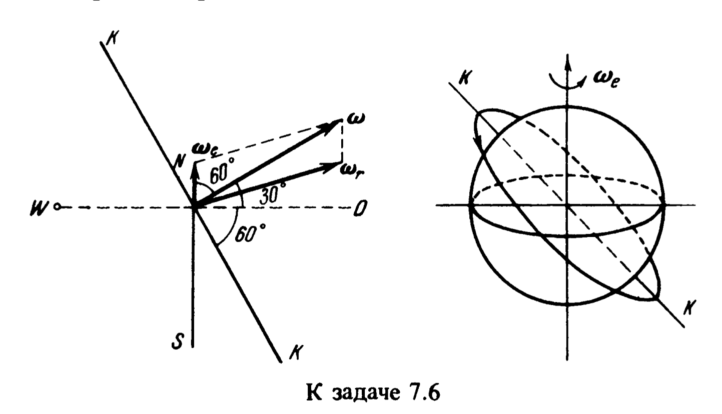
$$\omega_r = \omega_e \frac{\sin(\delta - \alpha)}{\sin\alpha}.$$

Задача 7.6. Искусственный спутник Земли, двигаясь по круговой орбите, имеет период обращения, вычисленный по отношению к системе координат, движущейся вместе с центром Земли поступательно, равный 1,5 ч.

Определить относительную угловую скорость радиуса-вектора, проведенного из центра орбиты к спутнику, по отношению к Земле, вращающейся вокруг своей оси, при угле наклона орбиты спутника к экватору

$\alpha_1 = 60^\circ$. Угловая скорость $\vec{\omega}$ радиуса-вектора спутника образует острый угол с осью SN Земли (см. рис.).

Решение. Плоскость орбиты KK образует с экватором WO угол 60°. Тогда вектор абсолютной угловой скорости спутника $\vec{\omega}$ составляет угол 60° с осью SN, по которой направлен вектор $\vec{\omega}_e$ угловой скорости Земли. Рассматривая вращение спутника как движение, складывающееся



К задаче 7.6

из переносного вращения вместе с Землей и искомого относительного вращения по отношению к Земле, имеем

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r,$$

где $\vec{\omega}$ – абсолютная угловая скорость спутника; $\vec{\omega}_r$ – его относительная угловая скорость. Модуль абсолютной угловой скорости

$$\omega = \frac{2\pi}{90} \text{ рад/мин.}$$

Модуль переносной угловой скорости

$$\omega_e = \frac{2\pi}{24 \cdot 60} \text{ рад/мин.}$$

Таким образом, в треугольнике угловых скоростей известны две стороны ω и ω_e и угол между ними. Определяем третью сторону треугольника:

$$\omega_r = \sqrt{\omega^2 + \omega_e^2 - 2\omega\omega_e\cos 60^\circ} = \frac{2\pi}{90}\sqrt{1 + \frac{1}{16^2} - \frac{1}{16}} \approx$$

$$\approx 0{,}0675 \text{ рад/мин.}$$

Находим угол, образованный $\vec{\omega}_r$ с экватором:

$$\cos(\widehat{\vec{\omega}_r, \overline{WO}}) = \frac{\omega \cos 30^\circ}{\omega_r} = 0{,}89;$$

$\vec{\omega}_r$ – это угловая скорость спутника относительно Земли.

Задача 7.7. Конус A с углом при вершине, равным $DOC = 90^\circ$, имеет неподвижную точку O и катится без скольжения по неподвижному конусу B, угол которого при вершине также равен 90°. Диаметр основания подвижного конуса $DC = 40$ см. Скорость точки O_1 по модулю постоянна и равна $v_{O_1} = 80$ см/с.

Найти $\vec{\omega}_e$ – переносную угловую скорость конуса (вокруг оси z), его относительную угловую скорость $\vec{\omega}_r$ (вокруг оси симметрии OO_1) и абсолютную угловую скорость $\vec{\omega}_a$. Определить скорости точек D, E, C конуса (рис. a).

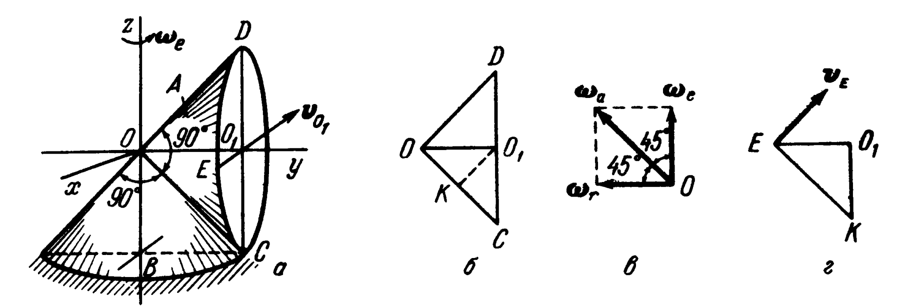
Решение. Точка O_1 лежит на относительной мгновенной оси вращения OO_1 и, следовательно, ее относительная скорость $\mathbf{v}^r_{O_1}$ равна нулю. Согласно теореме сложения скоростей

$$\mathbf{v}^a_{O_1} = \mathbf{v}^e_{O_1} + \mathbf{v}^r_{O_1},$$

при учете равенства $v^r_{O_1} = 0$ имеем

$$\mathbf{v}^a_{O_1} = \mathbf{v}^e_{O_1}.$$

Модуль переносной скорости равен произведению радиуса вращения вокруг



К задаче 7.7

переносной мгновенной оси z на модуль переносной мгновенной угловой скорости:

$$v^e_{O_1} = OO_1 \cdot \omega_e,$$

откуда

$$\omega_e = \frac{v^e_{O_1}}{OO_1} = \frac{v^a_{O_1}}{OO_1} = \frac{80}{20} = 4 \text{ рад/с}.$$

Полагая движение точки O_1 происходящим против хода часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси z, вектор $\vec{\omega}_e$ следует направить по оси z вверх.

Скорости точек подвижного конуса, находящихся в соприкосновении с поверхностью неподвижного конуса, равны нулю, так как конус A катится без скольжения по конусу B. Следовательно, образующая OC является мгновенной осью абсолютного движения и модуль абсолютной скорости точки O_1 равен

$$v_{O_1}^a = O_1 K \cdot |\vec{\omega}_a|,$$

где $\vec{\omega}_a$ – абсолютная мгновенная угловая скорость; $O_1 K$ – перпендикуляр, опущенный из точки O_1 на мгновенную ось OC (рис. *б*). Тогда

$$O_1 K = OO_1 \sin 45^\circ = 20\frac{\sqrt{2}}{2} = 14{,}1 \text{ см}$$

и, следовательно,

$$\omega_a = \frac{v_a}{O_1 K} = \frac{80}{14{,}1} = 5{,}66 \text{ рад/с}.$$

Учитывая направление скорости точки O_1, проводим вектор $\vec{\omega}_a$ от C к O (рис. *в*). Направление относительной мгновенной угловой скорости совпадает с прямой OO_1. Строим (рис. *в*) на векторе $\vec{\omega}_a$, как на диагонали, параллелограмм угловых скоростей

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r,$$

откуда следует, что $\omega_r = \omega_e = 4$ рад/с.

Переходим к определению скоростей точек D, E, C конуса. Скорость точки C равна нулю, так как эта точка лежит на мгновенной оси абсолютного движения и соприкасается с боковой поверхностью неподвижного конуса B.

Найдем модуль скорости точки D. Модуль скорости точки D равен произведению модуля абсолютной угловой скорости ω_a на кратчайшее расстояние точки D до мгновенной оси абсолютного движения OC

$$v_D = OD \cdot \omega_a = 20\sqrt{2} \cdot \frac{8}{\sqrt{2}} = 160 \text{ см/с};$$

$\mathbf{v}_D$ направлена перпендикулярно к плоскости ODC (рис. *б*) за рисунок.

Скорость точки D можно найти и другим способом. Действительно, скорость точки D равна сумме переносной и относительной скоростей

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_D^e + \mathbf{v}_D^r,$$

переносная скорость по модулю равна

$$v_D^e = OO_1 \cdot \omega_e = 20 \cdot 4 = 80 \text{ см/с}$$

и направлена перпендикулярно к плоскости ODC за рисунок; модуль относительной скорости точки D

$$v_D^r = O_1D \cdot \omega_r = 20 \cdot 4 = 80 \text{ см/с}.$$

Так как относительная скорость совпадает по направлению с переносной скоростью, то

$$v_D = v_D^e + v_D^r = 160 \text{ см/с}.$$

Переходим к определению скорости точки E. На рис. *г* представлена плоскость O_1EK, перпендикулярная к абсолютной мгновенной оси OC и проходящая через диаметр основания конуса O_1E. Из рис. *г* видно, что кратчайшее расстояние от точки E до прямой OC равно

$$EK = \sqrt{(O_1K)^2 + (EO_1)^2} = \sqrt{200 + 400} \approx 24{,}5 \text{ см},$$

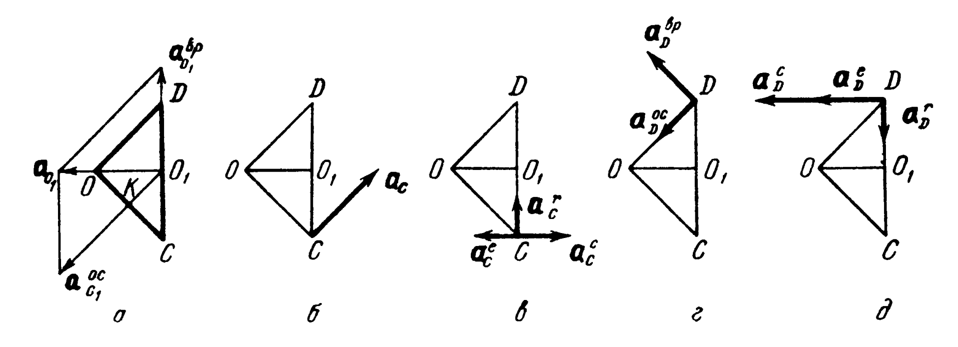
следовательно, модуль скорости точки E будет

$$v_E = EK \cdot \omega_a = 24{,}5 \cdot 5{,}66 = 138{,}5 \text{ см/с}.$$

Эта скорость (рис. *г*) лежит в плоскости O_1EK и направлена перпендикулярно к прямой EK.

Задача 7.8. В условиях предыдущей задачи определить абсолютное и относительное угловые ускорения конуса A. Найти ускорения точек O_1, D, C.

Решение. Угловое ускорение может быть определено как скорость конца вектора угловой скорости. Угловая скорость переносного движения



К задаче 7.8

$\vec{\omega}_e$ сохраняет без изменения свое значение ($\omega_e = 4$ рад/с) и свое направление (по оси z). Угловое ускорение в абсолютном движении равно

$$\vec{\epsilon}_a = \frac{d\vec{\omega}_a}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_a \qquad (1)$$

(так как вектор $\vec{\omega}_a$ вращается со скоростью $\vec{\omega}_e$), или

$$\epsilon_a = \omega_e \omega_a \sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{\omega}_a}) = 4 \frac{80}{10\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} = 16 \text{ рад/с}^2.$$

Оно направлено по оси x в положительную сторону, перпендикулярно к плоскости OO_1C.

Для определения углового ускорения $\vec{\epsilon}_a$ можно воспользоваться теоремой сложения угловых скоростей:

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r,$$

где $\vec{\omega}_a$, $\vec{\omega}_e$, $\vec{\omega}_r$ – соответственно абсолютная, переносная и относительная угловые скорости тела. Вычисляя от обеих частей этого равенства производную по времени, находим

$$\vec{\epsilon}_a = \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_r}{dt} = \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} + \frac{d'\vec{\omega}_r}{dt} + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r.$$

Так как в данной задаче $\dfrac{d\vec{\omega}_e}{dt} = 0$ и $\dfrac{d'\vec{\omega}_r}{dt} = 0$, то

$$\vec{\epsilon}_a = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r.$$

Этот же результат получается и из (1), если вычислить непосредственно выражение

$$\vec{\epsilon}_a = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r) = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r,$$

откуда

$$\epsilon_a = 16 \text{ рад/с}^2.$$

Переходим к определению ускорений точек O_1, D, C. Ускорение точки O_1 может быть определено тремя способами.

Способ 1 – точка O_1 описывает окружность радиусом OO_1 с постоянной по модулю скоростью $v_{O_1} = 80$ см/с; следовательно, ускорение точки O_1 будет нормальным ускорением с модулем

$$a_{O_1} = \frac{v_{O_1}^2}{OO_1} = \frac{80^2}{20} = 320 \text{ см/с}^2,$$

оно направлено от O_1 к точке O.

Способ 2 – ускорение точки O_1, как принадлежащей твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижного центра O:

$$\boldsymbol{a}_{O_1} = \boldsymbol{a}_{O_1}^{\text{ос}} + \boldsymbol{a}_{O_1}^{\text{вр}} = \vec{\omega}_a \times (\vec{\omega}_a \times \boldsymbol{r}) + \vec{\epsilon}_a \times \boldsymbol{r},$$

причем модуль осестремительного ускорения

$$a_{O_1}^{\text{oc}} = h\omega_a^2 = O_1 K \cdot \omega_a^2 = \sqrt{2} \cdot 10 \cdot 32 = 320\sqrt{2} \text{ см/с}^2 .$$

Это ускорение направлено по перпендикуляру к мгновенной оси, т.е. от O_1 к K (рис. a); модуль вращательного ускорения

$$a_{O_1}^{\text{вр}} = \epsilon_a h_1 = \epsilon_a \cdot OO_1 = 16 \cdot 20 = 320 \text{ см/с}^2 ,$$

оно направлено перпендикулярно к $\vec{\epsilon}_a$ и $r = \overline{OO_1}$, т.е. по оси z вверх; замечая, что угол между $a_{O_1}^{\text{вр}}$ и a_O^{oc} равен 135°, заключаем, что

$$a_{O_1} = a_{O_1}^{\text{вр}} = 320 \text{ см/с}^2$$

и направлено по OO_1, что совпадает с результатом, найденным первым способом.

Способ 3 – ускорение точки O_1 определяем по теореме сложения ускорений (теореме Кориолиса), рассматривая ее абсолютное движение как сумму переносного вращения (вокруг оси z) и относительного вращения (вокруг оси OO_1); тогда

$$a_{O_1} = a_{O_1}^e + a_{O_1}^r + a_{O_1}^c ;$$

переносное ускорение направлено от O_1 к O и равно по модулю

$$a_{O_1}^e = OO_1 \cdot \omega_e^2 = 20 \cdot 16 = 320 \text{ см/с}^2 ;$$

относительное ускорение точки O_1 равно нулю, так как точка O_1 лежит на оси OO_1, вокруг которой происходит относительное движение конуса; кориолисово ускорение точки O_1 равно

$$a_{O_1}^c = 2\vec{\omega}_e \times \mathrm{v}_{O_1}^r ;$$

оно обращается в нуль, так как нулю равна относительная скорость $\mathrm{v}_{O_1}^r$ точки O_1; таким образом, как и при ранее использованных способах, модуль ускорения O_1 будет

$$a_{O_1} = a_{O_1}^e = 320 \text{ см/с}^2 ;$$

это ускорение направлено от O_1 к O.

Найдем теперь ускорение точки C. Это ускорение также можно определить различными способами.

Способ 1 – ускорение точки C складывается из осестремительного и вращательного ускорений

$$a_C = a_C^{\text{oc}} + a_C^{\text{вр}} .$$

Осестремительное ускорение точки C обращается в нуль, так как точка лежит на мгновенной оси; следовательно,

$$a_C = a_C^{\text{вр}} = \vec{\epsilon}_a \times r .$$

Модуль ускорения

$$a_C = a_C^{\text{вр}} = \epsilon_a \cdot OC \cdot \sin 90^\circ = 16 \cdot 20\sqrt{2} = 320\sqrt{2}\ \text{см/с}^2.$$

Это ускорение лежит в плоскости OO_1C, перпендикулярной к $\vec{\epsilon}_a$, и образует прямой угол с OC (рис. *б*).

Способ 2 определения ускорения точки C основан на теореме сложения ускорений

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_C^e + \boldsymbol{a}_C^r + \boldsymbol{a}_C^c.$$

Переносное ускорение точки C есть ускорение при вращении вокруг оси z с угловой скоростью $\vec{\omega}_e$. Модуль переносного ускорения равен

$$a_C^e = OC \cdot \sin 45^\circ \cdot \omega_e^2 = 20 \cdot 16 = 320\ \text{см/с}^2.$$

Это ускорение направлено от точки C по перпендикуляру к оси z, т.е. параллельно оси y (рис. *в*). Относительное ускорение точки C есть ускорение при вращении вокруг оси y с угловой скоростью $\vec{\omega}_r$. Его величина

$$a_C^r = O_1C \cdot \omega_r^2 = 20 \cdot 16 = 320\ \text{см/с}^2.$$

Оно направлено от точки C к O_1 (рис. *в*). Кориолисово ускорение равно

$$\boldsymbol{a}_C^c = 2\vec{\omega}_e \times \mathbf{v}_C^r.$$

Следовательно, его величина (замечаем, что $v_C^r = O_1C \cdot \omega_r$)

$$a_C^c = 2\omega_e v_C^r \sin 90^\circ = 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 20 = 640\ \text{см/с}^2;$$

оно направлено согласно правилу векторного произведения параллельно оси y (рис. *в*).

Находим теперь сумму ускорений a_C^e и a_C^c, направленных по одной прямой в разные стороны:

$$a_C^c - a_C^e = 320\ \text{см/с}^2.$$

Тогда модуль полного ускорения точки C

$$a_C = \sqrt{(a_C^r)^2 + (a_C^c - a_C^e)^2} = 320\sqrt{2}\ \text{см/с}^2;$$

оно направлено под прямым углом к OC.

Переходим к определению ускорения точки D.

Способ 1. Применим формулу распределения ускорений в твердом теле, вращающемся вокруг неподвижной точки:

$$\boldsymbol{a}_D = \boldsymbol{a}_D^{\text{ос}} + \boldsymbol{a}_D^{\text{вр}}.$$

Осестремительное ускорение по модулю равно

$$a_D^{\text{ос}} = OD \cdot \omega_a^2 = 20\sqrt{2}\left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2 = 640\sqrt{2}\ \text{см/с}^2.$$

Оно направлено от D к O (рис. *г*). Вращательное ускорение определяется формулой

$$a_D^{\text{вр}} = \vec{\epsilon}_a \times r,$$

следовательно, модуль вращательного ускорения

$$a_D^{\text{вр}} = \epsilon_a \cdot OD = 16 \cdot 20\sqrt{2} = 320\sqrt{2}\ \text{см/с}^2.$$

Это ускорение направлено перпендикулярно к OD (рис. *г*). Модуль полного ускорения точки D

$$a_D = \sqrt{(a_D^{\text{oc}}) + (a_D^{\text{вр}})^2} = 320\sqrt{10}\ \text{см/с}^2.$$

Способ 2 определения ускорения точки D основаи на использовании теоремы Кориолиса:

$$a_D = a_D^e + a_D^r + a_D^c.$$

Переносное ускорение по модулю равно

$$a_D^e = OD \cdot \sin 45^\circ \cdot \omega_e^2 = 20 \cdot 16 = 320\ \text{см/с}^2$$

и направлено от D к оси z по кратчайшему направлению (рис. *д*). Модуль относительного ускорения будет

$$a_D^r = O_1 D \cdot \omega_r^2 = 20 \cdot 16 = 320\ \text{см/с}^2.$$

Это ускорение направлено от D к O_1 (рис. *д*).

Ускорение Кориолиса дается формулой

$$a_D^c = 2\vec{\omega}_e \times \mathbf{v}_D^r,$$

где $v_D^r = O_1 D \cdot \omega_r = 80$ см/с. Модуль ускорения Кориолиса равен

$$a_D^c = 2\omega_e v_r \sin 90^\circ = 2 \cdot 4 \cdot 80 = 640\ \text{см/с}^2.$$

Его направление совпадает с a_D^e (рис. *д*).

Таким образом, модуль ускорения точки D

$$a_D = \sqrt{(a_D^r)^2 + (a_D^e + a_D^c)^2} = 320\sqrt{10}\ \text{см/с}^2.$$

Направляющие косинусы определяются формулами

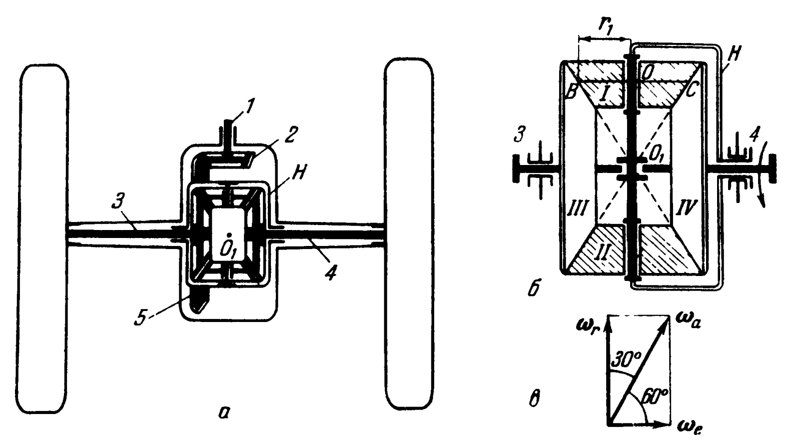
$$\cos(\widehat{a_D, y}) = \frac{a_{Dy}}{a_D} = -\frac{960}{320\sqrt{10}} = -\frac{3}{\sqrt{10}},$$

$$\cos(\widehat{a_D, z}) = \frac{a_{Dz}}{a_D} = -\frac{320}{320\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Задача 7.9. В автомобильном дифференциале (рис. *а*) вращение от оси мотора *1* посредством конической передачи *2* и *5* передается водилу H. Парные сателлиты I и II (рис. *б*) вращаются вокруг осей, закреп-

ленных на водиле H, и находятся в сцеплении с колесами III и IV, движение которых через полуоси 3 и 4 передается задним колесам автомобиля.

Для получения кинематической зависимости в передаче достаточно одного сателлита (I и II), помещенного на водиле H. Однако для разгрузки осей 3 и 4 вводят второй сателлит, располагая его симметрично на противоположном конце водила H. Вал 1 с шестерней 2 делает 600 об/мин, передаточное отношение $r_5/r_2 = 5$.



К задачам 7.9 и 7.10

Определить абсолютную и относительную угловые скорости сателлитов и угловые скорости шестерен III и IV: а) при прямолинейном движении автомобиля, б) в случае, если правое заднее колесо, встретив препятствие, остановилось. Радиусы сателлитов I и II равны $r_1 = 15$ см, радиусы шестерен III и IV – $r_3 = 15\sqrt{3}$ см.

Р е ш е н и е. Обозначим угловую скорость колеса 5, равную угловой скорости водила, через Ω. Тогда для конической пары 2 и 5 имеем

$$\frac{\omega_2}{\omega_5} = \frac{r_5}{r_2}, \tag{1}$$

откуда

$$\omega_2 = \Omega = 120 \text{ об/мин}.$$

Зная угловую скорость водила, применим к расчету угловых скоростей звеньев автомобильного дифференциала метод Виллиса. Дадим мысленно основанию механизма (рис. $б$) вращение, противоположное вращению водила и равное ему по скорости. Тогда водило станет неподвижным, а угловые скорости шестерен III и IV будут равны

$$\omega_3 - \Omega, \quad \omega_4 - \Omega.$$

Угловую скорость сателлита относительно водила обозначим через ω. Тогда для каждой пары колес с неподвижными осями можно записать равенства

$$\frac{\omega_3 - \Omega}{\omega} = \frac{r_1}{r_3}, \tag{2}$$

$$\frac{\omega_4 - \Omega}{\omega} = -\frac{r_1}{r_3}, \tag{3}$$

причем в формуле (3) взят знак минус, так как колеса *III* и *IV* (при остановленном водиле) вращаются в противоположных направлениях. Решая уравнения (2) и (3) относительно Ω и ω, находим

$$\Omega = \frac{1}{2}(\omega_3 + \omega_4), \tag{4}$$

$$\omega = \frac{r_3}{2r_1}(\omega_3 - \omega_4). \tag{5}$$

Пользуясь этими формулами, найдем ответы.

а. При прямолинейном движении угловые скорости колес равны $\omega_3 = \omega_4$ и, следовательно, из (4) имеем: $\omega_3 = \omega_4 = \Omega = 120$ об/мин; из (5) находим: $\omega = 0$. Сателлиты не вращаются относительно водила H.

б. В случае остановки правого заднего колеса автомобиля $\omega_4 = 0$. Тогда из (4) находим

$$\omega_3 = 2\Omega = 240 \text{ об/мин} = 8\pi \text{ рад/с}.$$

Относительная угловая скорость сателлита из (5) равна

$$\omega = \frac{15\sqrt{3}}{2 \cdot 15}\,\omega_3 = 120\sqrt{3} \text{ об/мин} = 4\sqrt{3}\,\pi \text{ рад/с}.$$

Абсолютная угловая скорость сателлита определится из рис. *в*, где $\omega_r = \omega = 120\sqrt{3}$ об/мин, $\omega_e = \Omega = 120$ об/мин:

$$\omega_a = \sqrt{\omega^2 + \Omega^2} = 240 \text{ об/мин} = 8\pi \text{ рад/с}.$$

Задача 7.10. Для автомобильного дифференциала, рассмотренного в предыдущей задаче, определить угловую скорость водила Ω и относительную угловую скорость сателлитов ω, если при повороте задние колеса автомобиля описывают на земле дуги радиусами $\rho_1 = 20$ м и $\rho_2 = 18$ м, причем скорость центра тяжести автомобиля $v = 38$ м/с. Радиус заднего колеса $R = 0{,}6$ м.

Решение. Скорости центров задних колес автомобиля определятся по формулам

$$v_3 = \frac{2v}{\rho_1 + \rho_2}\,\rho_1 = 40\ \text{м/с}, \qquad v_4 = \frac{2v}{\rho_1 + \rho_2}\,\rho_2 = 36\ \text{м/с}.$$

Угловые скорости шестерен *III* и *IV* (рис. *б*) будут

$$\omega_3 = \frac{v_3}{R}, \qquad \omega_4 = \frac{v_4}{R}.$$

Тогда из формулы (4) предыдущей задачи находим угловую скорость водила

$$\Omega = \frac{1}{2}(\omega_3 + \omega_4) = \frac{1}{2R}(v_3 + v_4) = \frac{v}{R} = \frac{38}{0{,}6} = 63{,}3\ \text{рад/с},$$

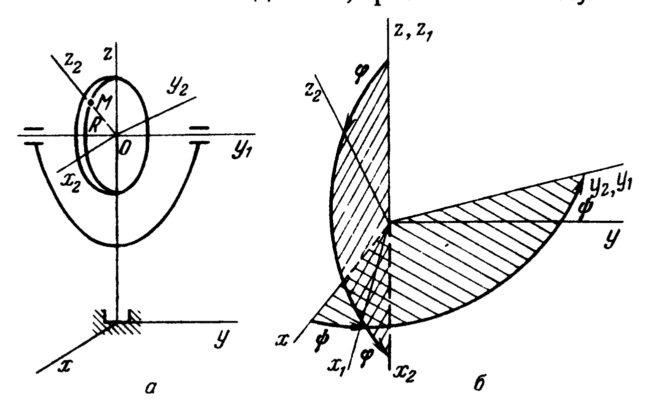
а из формулы (5) – относительную угловую скорость сателлитов

$$\omega = \frac{r_3}{2r_1}(\omega_3 - \omega_4) = \frac{15\sqrt{3}(v_3 - v_4)}{2\cdot 15\cdot R} = 5{,}76\ \text{рад/с}.$$

Задача 7.11. Уравнения вращательного движения ротора двухстепенного гироскопа определяются тремя углами Эйлера:

$$\psi = 3t, \quad \theta = 0, \quad \varphi = 2000t.$$

Определить уравнения движения точки *M*, расположенной на ободе гироскопа, по отношению к наблюдателю, расположенному на поверхности



К задаче 7.11

Земли, если радиус диска ротора $R = 10$ см (рис. *а*). Поверхность Земли в этой задаче считать неподвижной.

Решение. Выберем абсолютную систему координат xyz, связанную с фундаментом, и подвижную систему $x_2y_2z_2$, оси которой связаны с ротором гироскопа. Координаты точки M по отношению к системе коор-

динат $x_2y_2z_2$ заданы (см. рис. *а*). Они равны

$$x_2 = 0, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = R. \tag{1}$$

Для определения координат точки по отношению к неподвижной системе отсчета воспользуемся формулами преобразования координат, которые в матричной форме имеют вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \{a\} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $\{a\}$ — матрица поворота осей $x_2y_2z_2$ по отношению к неподвижной системе отсчета.

В нашем случае поворот осей подвижной системы реализуется совокупностью двух поворотов: угла прецессии ψ и угла собственного вращения φ.

Имеем

$$\{a\} = \{a_1\} \cdot \{a_2\}, \tag{3}$$

где $\{a_1\}$ — матрица поворота осей на угол прецессии ψ, $\{a_2\}$ — матрица поворота на угол собственного вращения φ.

На рис. *б* показаны углы поворота системы осей $x_2y_2z_2$ относительно системы xyz; коэффициенты матрицы $\{a_1\}$ суть направляющие косинусы углов между системой xyz и системой $x_1y_1z_1$, получаемой из исходной путем поворота на угол ψ. Таким образом, матрица $\{a_1\}$ имеет вид

$$\{a_1\} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Коэффициенты матрицы $\{a_2\}$ суть направляющие косинусы углов между системой $x_1y_1z_1$ и системой $x_2y_2z_2$, получаемой из системы $x_1y_1z_1$ путем поворота на угол φ.

Таким образом, матрица $\{a_2\}$ имеет вид

$$\{a_2\} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Используя правило перемножения матриц, находим

$$\{a\} = \{a_1\} \cdot \{a_2\} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi & -\sin\psi & \cos\psi\sin\varphi \\ \sin\psi\cos\varphi & \cos\psi & \sin\psi\sin\varphi \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (2) с учетом (1), получим формулы преобразования координат в матричной форме:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos\psi\cos\varphi & -\sin\psi & \cos\psi\sin\varphi \\ \sin\psi\cos\varphi & \cos\psi & \sin\psi\sin\varphi \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{Bmatrix}. \qquad (7)$$

Используя правило перемножения матриц, получим

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R\cos\psi\sin\varphi \\ R\sin\psi\sin\varphi \\ R\cos\varphi \end{Bmatrix}. \qquad (8)$$

Подставляя числовые данные, находим

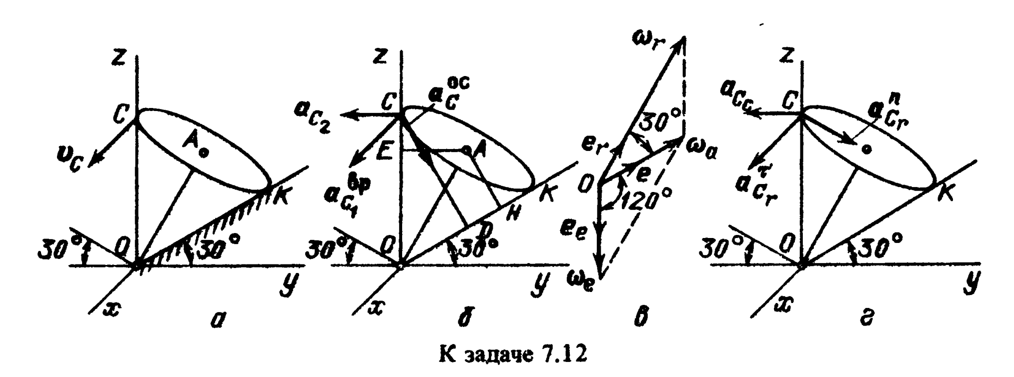
$$x = 10\cos 3t \sin 2000t \text{ (см)},$$

$$y = 10\sin 3t \sin 2000t \text{ (см)},$$

$$z = 10\cos 2000t \text{ (см)}.$$

Полученные уравнения и представляют уравнения движения точки по отношению к системе координат xyz.

Задача 7.12. Ось бегуна OA вращается вокруг вертикальной оси Oz с угловой скоростью $\omega_e = 2\ \text{с}^{-1}$ и угловым ускорением $\epsilon_e = 3\ \text{с}^{-2}$. Радиус основания бегуна $AC = 5$ см.



К задаче 7.12

Найти скорость и ускорение точки C бегуна (рис. $а$) двумя способами: 1) методом кинематики твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки; 2) методом кинематики относительного движения. Бегун обегает неподвижный конус без скольжения.

Р е ш е н и е. *Способ* 1. Определим скорость и ускорение точки C методом кинематики твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки.

Скорость точки C равна произведению модуля абсолютной угловой скорости ω_a на кратчайшее расстояние от точки C до мгновенной оси абсолютного движения KO:

$$v_C = CD \cdot \omega_a. \tag{1}$$

Найдем модуль абсолютной угловой скорости ω_a. Он равен модулю переносной угловой скорости. Это следует из уравнений для определения скорости точки A. Ее скорость равна произведению модуля абсолютной угловой скорости на длину перпендикуляра, опущенного из точки A на мгновенную ось абсолютного движения. С другой стороны, модуль скорости точки A равен произведению модуля переносной угловой скорости на длину перпендикуляра, опущенного из точки A на мгновенную ось переносного движения OC. Точка A лежит на оси относительного вращения OA, и ее относительная скорость равна нулю. Итак,

$$v_A = AE \cdot \omega_e = AH \cdot \omega_a. \tag{2}$$

Так как расстояния от точки A до мгновенных осей абсолютного и переносного движения равны, то, следовательно,

$$\omega_a = \omega_e = 2\ \text{с}^{-1}. \tag{3}$$

Тогда

$$v_C = CD \cdot \omega_a = 5\sqrt{3} \cdot 2 = 10\sqrt{3}\ \text{см/с}; \tag{4}$$

$\mathbf{v}_C$ направлена перпендикулярно к плоскости OCK на нас (рис. *а*).

Переходим к определению ускорения точки C. Воспользуемся формулой распределения ускорений в твердом теле, вращающемся вокруг неподвижной точки. По теореме Ривальса

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_C^{\text{ос}} + \mathbf{a}_C^{\text{вр}}. \tag{5}$$

Осестремительное ускорение по модулю равно

$$a_C^{\text{ос}} = CD \cdot \omega_a^2 = 5\sqrt{3} \cdot 2^2 = 20\sqrt{3}\ \text{см/с}^2 \tag{6}$$

и направлено от точки C к точке D (рис. *б*).

Вращательное ускорение точки C находится по формуле

$$\mathbf{a}_C^{\text{вр}} = \vec{\epsilon}_a \times \overline{OC}. \tag{7}$$

Обозначим через $\mathbf{e}$ орт мгновенной абсолютной оси вращения, а через $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_e$ – орты мгновенных относительной и переносной осей вращения соответственно (рис. *в*). Тогда угловое ускорение определяется формулой

$$\vec{\epsilon}_a = \mathbf{e}\frac{d\omega_a}{dt} + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_a = \mathbf{e}_r\frac{d\omega_r}{dt} + \mathbf{e}_e\frac{d\omega_e}{dt} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r) =$$

$$= \mathbf{e}_r\epsilon_r + \mathbf{e}_e\epsilon_e + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r, \tag{8}$$

где $\vec{\omega}_a$, $\vec{\omega}_r$, $\vec{\omega}_e$, $\vec{\epsilon}_r$, $\vec{\epsilon}_e$ – проекции угловых скоростей и ускорений на соответствующие орты.

Из равенства абсолютной и переносной угловых скоростей следует равенство абсолютного и переносного угловых ускорений, так как угловое ускорение есть производная угловой скорости:

$$\epsilon_a = \epsilon_e = 3\ \text{c}^{-2}. \tag{9}$$

Относительную составляющую углового ускорения находим по теореме косинусов из уравнения

$$\epsilon_a^2 = \epsilon_e^2 + \epsilon_r^2 - 2\epsilon_e \epsilon_r \cos 30°, \tag{10}$$

отсюда

$$\epsilon_r = 3\sqrt{3}\ \text{c}^{-2}. \tag{11}$$

Аналогично вычисляем и относительную составляющую угловой скорости (рис. *в*)

$$\omega_a^2 = \omega_e^2 + \omega_r^2 - 2\omega_e \omega_r \cos 30°, \tag{12}$$

откуда

$$\omega_r = 2\sqrt{3}\ \text{c}^{-1}. \tag{13}$$

Из рис. *б* видно, что

$$OC = \frac{CA}{\sin 30°} = 5 \cdot 2 = 10\ \text{см}. \tag{14}$$

Пусть

$$a_{C_1}^{\text{вр}} = |(e_r|\epsilon_r| + e_e|\epsilon_e|) \times \overline{OC}| =$$

$$= \epsilon_r \cdot OC \cdot \sin 150° + \epsilon_e \cdot OC \cdot \sin 0° = 15\sqrt{3}\ \text{см/с}^2. \tag{15}$$

Ускорение $a_{C_1}^{\text{вр}}$ направлено параллельно оси x на нас (рис. *б*).

Ускорение $a_{C_2}^{\text{вр}}$ направлено параллельно отрицательному направлению оси y и равно по модулю

$$a_{C_2}^{\text{вр}} = |(\vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r) \times \overline{OC}| = (\omega_e \omega_r \sin 150°) OC \cdot \sin 90° =$$

$$= 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 0{,}5 \cdot 10 = 20\sqrt{3}\ \text{см/с}^2. \tag{16}$$

Находим проекции составляющих ускорения точки C на координатные оси (рис. *б*)

$$a_{Cx} = a_{C_1}^{\text{вр}} = 15\sqrt{3}\ \text{см/с}^2,$$

$$a_{Cy} = a_C^{\text{ос}} \sin 30° - a_{C_2}^{\text{вр}} = 10\sqrt{3} - 20\sqrt{3} = -10\sqrt{3}\ \text{см/с}^2, \tag{17}$$

$$a_{Cz} = -a_C^{\text{ос}} \cos 30° = -20\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -30 \text{ см/с}^2.$$

Модуль ускорения точки C равен

$$a_C = \sqrt{(a_{Cx})^2 + (a_{Cy})^2 + (a_{Cz})^2} = 25\sqrt{3} \text{ см/с}^2. \qquad (18)$$

Способ 2. Для нахождения скорости точки C методом кинематики относительного движения используем теорему сложения скоростей

$$\mathbf{v}_{Ca} = \mathbf{v}_{Ce} + \mathbf{v}_{Cr}. \qquad (19)$$

Точка C лежит на переносной мгновенной оси вращения и, следовательно, ее переносная скорость v_{Ce} равна нулю. При учете равенства $v_C^e = 0$ имеем

$$v_{Ca} = v_{Cr}. \qquad (20)$$

Модуль относительной скорости равен произведению модуля относительной угловой скорости ω_r на модуль кратчайшего расстояния от точки C до мгновенной оси относительного движения CA:

$$v_{Cr} = \omega_r \cdot CA = 2\sqrt{3} \cdot 5 = 10\sqrt{3} \text{ см/с}. \qquad (21)$$

Следовательно,

$$v_{Ca} = 10\sqrt{3} \text{ см/с}; \qquad (22)$$

v_{Ca} направлена перпендикулярно плоскости OCK на нас (рис. *а*).

Для определения ускорения воспользуемся теоремой сложения ускорений (теоремой Кориолиса):

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_{Ce} + \mathbf{a}_{Cr} + \mathbf{a}_{Cc}. \qquad (23)$$

Переносное ускорение точки C равно нулю, так как точка C лежит на оси OC, вокруг которой происходит переносное движение бегуна.

Относительное ускорение точки C, движущейся по окружности радиусом AC (рис. *г*), находим по формуле

$$\mathbf{a}_{C_r} = \mathbf{a}^{\tau}_{C_r} + \mathbf{a}^{n}_{C_r}, \qquad (24)$$

где нормальное ускорение равно по модулю $a^n_{C_r} = r\omega_r^2 = 5(2\sqrt{3})^2 = 60$ см/с^2; $a^n_{C_r}$ направлено по радиусу CA к центру (рис. *г*).

Модуль касательного ускорения равен

$$a^{\tau}_{C_r} = r\epsilon_r = 5 \cdot 3\sqrt{3} = 15\sqrt{3} \text{ см/с}^2. \qquad (25)$$

Здесь ϵ_r получено согласно (10) и (11), которые неизменны и при способе 2. Оно направлено параллельно оси x на нас.

Кориолисово ускорение находим по формуле

$$a_{C_c} = 2\vec{\omega}_e \times \mathbf{v}_{C_r},$$

следовательно, его модуль равен

$$a_{C_c} = 2\omega_e v_{C_r} \sin 90° = 2 \cdot 2 \cdot 10\sqrt{3} = 40\sqrt{3} \text{ см/с}^2.$$

Оно направлено согласно правилу векторного произведения параллельно отрицательному направлению оси y (рис. *г*).

Запишем проекции составляющих ускорения точки C на координатные оси:

$$a_{Cx} = a^{\tau}_{C_r} = 15\sqrt{3} \text{ см/с}^2,$$

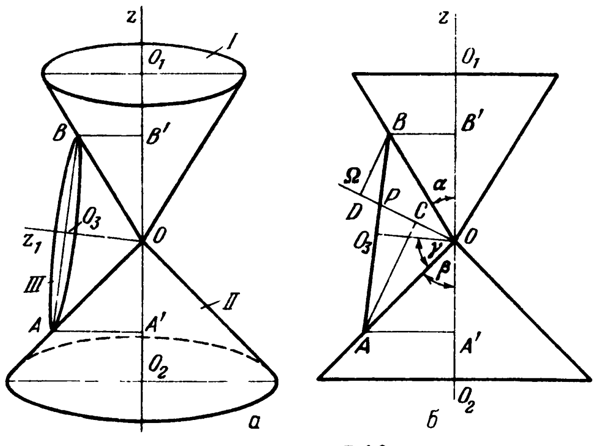
$$a_{Cy} = a^{n}_{C_r} \cos 30° - a_{C_c} = 60 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 40\sqrt{3} = -10\sqrt{3} \text{ см/с}^2,$$

$$a_{Cz} = -a^{n}_{Cr} \sin 30° = -60 \cdot \frac{1}{2} = -30 \text{ см/с}^2.$$

Модуль ускорения точки C равен

$$a_C = \sqrt{(a_{Cx})^2 + (a_{Cy})^2 + (a_{Cz})^2} = 25\sqrt{3} \text{ см/с}^2.$$

Задача 7.13. Конусы *I* и *II* вращаются вокруг оси O_1O_2 с одинаковой угловой скоростью ω в противоположных направлениях, вращая одновре-



К задаче 7.13

менно без скольжения конус *III*. Найти угловую скорость конуса *III*. Углы при вершинах конусов *I* и *II* соответственно равны 2α и 2β.

Решение. Выберем две системы координат с началом в точке O: неподвижную систему xyz и подвижную $x_1y_1z_1$, жестко связанную с конусом *III*. Для решения задачи достаточно воспользоваться осями Oz и Oz_1

(рис. *а*). Обозначим угол при вершине конуса *III* через 2γ, тогда

$$\gamma = \frac{\pi - \alpha - \beta}{2}.$$

Рассмотрим точки A и B, принадлежащие одновременно конусам *II* и *III*, *I* и *III*.

Если исходить из того, что точка A принадлежит конусу *II*, то ее скорость

$$v_A = AA' \cdot \omega, \tag{1}$$

где AA' – перпендикуляр, опущенный из точки A на ось Oz. Скорость точки B, принадлежащей конусу *I*,

$$v_B = BB' \cdot \omega, \tag{2}$$

где BB' – перпендикуляр, опущенный из точки B на ось Oz. Обозначим $OB = OA$ через l, тогда

$$AA' = l \sin\beta, \quad BB' = l \sin\alpha.$$

Подставив значения AA' и BB' в (1) и (2), получим

$$v_A = l\omega \sin\beta, \quad v_B = l\omega\sin\alpha.$$

Если же рассматривать точки A и B как принадлежащие конусу *III*, вращающемуся вокруг мгновенной оси вращения $O\Omega$ с угловой скоростью ω_{III}, то их скорости равны

$$v_A = \omega_{III} \cdot h_a, \quad v_B = \omega_{III} \cdot h_b,$$

где h_a и h_b – мгновенные радиусы вращения.

Для решения задачи необходимо найти один из этих радиусов, например h_b.

Мгновенная ось вращения пересекает AB в точке P (рис. *б*), из этого следует, что

$$\frac{AP}{BP} = \frac{v_A}{v_B} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Но, как видно из рисунка,

$$AP + BP = AB = 2l\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Решив совместно эти два уравнения относительно BP, получим

$$BP = \frac{2l\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta}.$$

Найдем величину PO_3:

$$PO_3 = BO_3 - BP = \frac{l\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}(\sin\beta-\sin\alpha)}{\sin\beta+\sin\alpha}.$$

Из треугольника AOO_3 найдем OO_3:

$$OO_3 = l\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Из треугольника POO_3 найдем OP:

$$OP = \sqrt{OO_3^2 + PO_3^2}.$$

Теперь из подобия треугольников BDP и POO_3 можно написать

$$\frac{h_b}{OO_3} = \frac{BP}{OP}.$$

Отсюда

$$h_b = \frac{OO_3 \cdot BP}{OP}.$$

Найдем угловую скорость конуса III:

$$\omega_{III} = \frac{v_B}{h_b} = \frac{l\omega\sin\alpha\cdot OP}{OO_3\cdot BP}.$$

Подставив сюда значения отрезков и сделав необходимые преобразования, получим

$$\omega_{III} = \omega\cdot\frac{\sin^2\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\sqrt{\sin^2\dfrac{\beta-\alpha}{2}\cos^4\dfrac{\beta+\alpha}{2}+\sin^4\dfrac{\beta+\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\beta-\alpha}{2}}}.$$

Указание. Для приобретения навыков в решении задач на сложение вращений вокруг пересекающихся осей рекомендуется решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 24.18–24.25, 24.28–24.32.

§ 3. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА. СЛОЖЕНИЕ ПОСТУПАТЕЛЬНЫХ И ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ

1. Скорости и ускорения точек твердого тела в общем случае движения. Уравнения движения твердого тела в общем случае движения записываются в виде

$$x_O = f_1(t),\quad y_O = f_2(t),\quad z_O = f_3(t),$$
$$\psi = f_4(t),\quad \varphi = f_5(t),\quad \theta = f_6(t). \tag{1*}$$

Здесь x_O, y_O, z_O – координаты произвольной точки твердого тела, выбранной за полюс; ψ, φ, θ – углы Эйлера: угол прецессии, угол чистого, или собственного, вращения и угол нутации, определяющие поворот твердого тела вокруг полюса.

Скорость любой точки твердого тела в общем случае движения определяется формулой

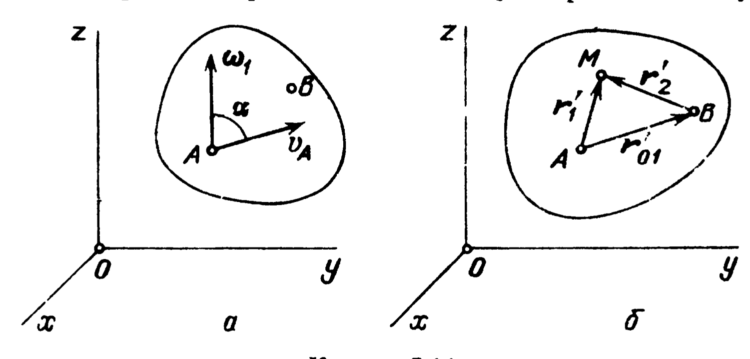
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \vec{\omega} \times \mathbf{r}_1, \tag{2*}$$

где $\mathbf{v}$ – скорость любой точки твердого тела; $\mathbf{v}_O$ – скорость полюса; $\vec{\omega}$ – мгновенная угловая скорость твердого тела; $\mathbf{r}_1$ – радиус-вектор, проведенный из полюса в точку, скорость которой подлежит определению.

Ускорение любой точки твердого тела в общем случае движения определяется формулой

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \vec{\epsilon} \times \mathbf{r}_1 + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}_1). \tag{3*}$$

Здесь $\mathbf{a}$ – искомое ускорение точки, $\mathbf{a}_O$ – ускорение полюса, $\vec{\epsilon}$ – мгновенное угловое ускорение твердого тела, $\vec{\epsilon} \times \mathbf{r}_1$ – вращательное ускорение,



К задаче 7.14

$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}_1)$ – осестремительное ускорение. Уравнение (3*) называется теоремой Ривальса в общем случае движения твердого тела.

Задача 7.14. Твердое тело движется произвольным образом в пространстве (рис. *а*). Выберем точку A за полюс. Скорость точки A равна $\mathbf{v}_A$. Мгновенная угловая скорость твердого тела в данный момент параллельна оси z и равна $\vec{\omega}_1$. Угол между векторами $\vec{\omega}_1$ и $\mathbf{v}_A$ равен α.

Определить угловую скорость твердого тела, если за полюс взята точка B. Найти проекцию скорости точки B на ось z.

Решение. Обозначим неизвестную мгновенную угловую скорость твердого тела при полюсе B вектором $\vec{\omega}_2$. Возьмем произвольную точку твердого тела M и обозначим ее радиусы-векторы, проведенные из полюса A, через r_1, и из полюса B – через r_2 (рис. б).

Тогда скорость точки M равна

$$v_M = v_A + \omega_1 \times r_1', \tag{1}$$

если за полюс выбрана точка A.

Эта же скорость точки M равна

$$v_M = v_B + \vec{\omega}_2 \times r_2', \tag{2}$$

если за полюс взята точка B.

Замечаем далее, что

$$v_B = v_A + \vec{\omega}_1 \times r_{01}', \tag{3}$$

где r_{01}' – радиус-вектор, проведенный из точки A в точку B.

Внося (3) в уравнение (2), имеем

$$v_M = v_A + \vec{\omega}_1 \times r_{01}' + \vec{\omega}_2 \times r_2'. \tag{4}$$

Приравнивая правые части равенств (1) и (4), находим

$$v_A + \vec{\omega}_1 \times r_{01}' + \vec{\omega}_2 \times r_2' = v_A + \vec{\omega}_1 \times r_1'. \tag{5}$$

Сокращая v_A в обеих частях (5), получим

$$\vec{\omega}_2 \times r_2' = \vec{\omega}_1 \times (r_1' - r_{01}') = \vec{\omega}_1 \times r_2', \tag{6}$$

отсюда

$$(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) \times r_2' = 0. \tag{7}$$

Это равенство справедливо при любом произвольном радиусе-векторе r_2'. Следовательно,

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1.$$

Вектор угловой скорости твердого тела не зависит от выбора полюса.

Переходим к определению проекции скорости точки B на ось z, т.е. на ось вращения. Для этого умножим обе части векторного равенства (3) скалярно на $\vec{\omega}_1$. Тогда

$$v_B \cdot \vec{\omega}_1 = v_A \cdot \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_1 \cdot (\vec{\omega}_1 \times r_{01}'), \tag{8}$$

но последнее слагаемое

$$\vec{\omega}_1 \cdot (\vec{\omega}_1 \times r_{01}') = 0, \tag{9}$$

так как векторное произведение $\vec{\omega}_1 \times r_{01}'$ перпендикулярно обоим со-

множителям. Итак, окончательно

$$\mathbf{v}_B \cdot \vec{\omega}_1 = \mathbf{v}_A \cdot \vec{\omega}_1. \qquad (10)$$

Проекции скорости любых двух точек твердого тела в общем случае движения на направление мгновенной угловой скорости равны. Следовательно, проекция скорости точки B на ось z равна

$$v_{Bz} = v_A \cos\alpha. \qquad (11)$$

2. Сложение поступательных и вращательных движений твердого тела. Рассмотрим движение твердого тела, участвующего в нескольких вращательных движениях вокруг произвольно расположенных мгновенных осей и одновременно в нескольких поступательных движениях.

Вращательное движение твердого тела характеризуется мгновенной осью и угловой скоростью, направленной по мгновенной оси. Вектор угловой скорости можно переносить в любую точку вдоль мгновенной оси, следовательно, угловая скорость есть скользящий вектор.

Поступательное движение твердого тела можно охарактеризовать скоростью. Скорость поступательного движения твердого тела можно рассматривать как результат действия пары вращений. Скорость поступательного движения твердого тела есть свободный вектор.

При параллельном переносе вектора угловой скорости добавляется в точке приведения поступательная скорость

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{r} \times \vec{\omega}, \qquad (1^*)$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор, проведенный из точки приведения в точку приложения вектора угловой скорости.

Таким образом, выбирая произвольную точку за полюс, можно привести все угловые скорости к этой точке и, сложив, получить результирующую угловую скорость

$$\vec{\omega} = \sum_{k=1}^{n} \vec{\omega}_k. \qquad (2^*)$$

Поступательные скорости, как непосредственно заданные, так и возникающие при приведении угловых скоростей к центру приведения, складываются и дают результирующую поступательную скорость

$$\mathbf{v}_0 = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{v}_k. \qquad (3^*)$$

Таким образом, любая совокупность вращательных и поступательных движений твердого тела может быть заменена одним вращением с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг мгновенной оси, проходящей через центр приведения, и одним поступательным движением со скоростью $\mathbf{v}_0$.

Частные случаи сложения вращений и поступательных движений твердого тела:

1. Если $\vec{\omega} = 0$, $v_0 = 0$, то тело находится в мгновенном покое.

2. Если $\vec{\omega} \neq 0$, $v_0 = 0$, то тело вращается вокруг мгновенной оси.

3. Если $\vec{\omega} = 0$, $v_0 \neq 0$, то тело движется мгновенно-поступательно.

4. Если $\vec{\omega} \neq 0$, $v_0 \neq 0$ и $v_0 \perp \vec{\omega}$, то тело вращается вокруг мгновенной оси, параллельной и отстоящей на расстояние v_0/ω от мгновенной оси, проходящей через центр приведения. Эта мгновенная ось лежит в плоскости, перпендикулярной к скорости v_0.

5. Если $\vec{\omega} \neq 0$, и $v_0 \neq 0$ и v_0 не перпендикулярна к $\vec{\omega}$, то тело совершает мгновенное винтовое движение. В этом случае существует мгновенная винтовая ось – геометрическое место точек, скорости которых равны между собой и направлены вдоль мгновенной оси. *Кинематическим винтом* называется совокупность угловой скорости и поступательной скорости, направленных по одной прямой.

Указание. Сложение вращений и поступательных движений твердого тела рекомендуется производить в следующем порядке:

1) выбрать оси декартовых координат;

2) взять в начале координат, точке O, центр приведения;

3) вычислить проекции результирующего вектора угловой скорости;

4) определить модуль результирующего вектора угловой скорости и его направляющие косинусы;

5) найти проекции результирующей поступательной скорости;

6) определить модуль результирующей поступательной скорости и ее направляющие косинусы;

7) установить, к какому из пяти частных случаев приводится результирующее движение;

8) если движение приводится к вращению вокруг мгновенной оси, то ее уравнение находится по формуле

$$\frac{v_x - y\omega_z + z\omega_y}{\omega_x} = \frac{v_y - z\omega_x + x\omega_z}{\omega_y} = \frac{v_z - x\omega_y + y\omega_x}{\omega_z}, \qquad (4^*)$$

где x, y, z – текущие координаты мгновенной оси; ω_x, ω_y, ω_z и v_x, v_y, v_z – соответственно проекции результирующих угловой скорости и поступательной скорости на оси координат;

9) если движение приводится к винтовому движению, то уравнение винтовой оси находится по той же формуле (4*).

Наименьшее значение результирующей поступательной скорости, равное проекции поступательной скорости на мгновенную ось вращения, определяется по формуле

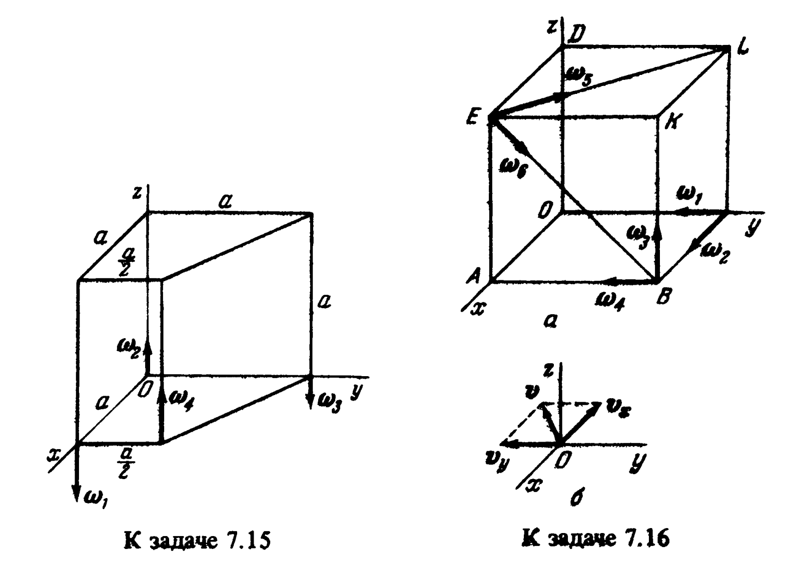
$$v_{\min} = \frac{\omega_x v_x + \omega_y v_y + \omega_z v_z}{\omega}; \qquad (5^*)$$

10) определить параметр кинематического винта, равный отношению минимальной поступательной скорости v_{min} к результирующей угловой скорости твердого тела, по формуле

$$p = \frac{v_{min}}{\omega} = \frac{\omega_x v_x + \omega_y v_y + \omega_z v_z}{\omega^2}. \qquad (6^*)$$

Как следует из вышеизложенного, существует аналогия между приведением пространственной системы сил к простейшему виду и сложением поступательных и вращательных движений твердого тела. При этом роль сил играют угловые скорости, а роль моментов присоединенных пар — поступательные скорости твердого тела.

Задача 7.15. Тело, размеры которого указаны на рисунке, участвует в нескольких вращениях с угловыми скоростями $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3$ и $\vec{\omega}_4$.



К задаче 7.15 К задаче 7.16

Привести движение тела к простейшему виду, если $\omega_1 = \omega_4 = 2\omega$, $\omega_2 = \omega_3 = \omega$.

Решение. Координатные оси изображены на рисунке. Примем за центр приведения точку O. Совокупность заданных угловых скоростей приводится в общем случае к скорости $\mathbf{v}$ и угловой скорости $\vec{\omega}_0$.

Определим проекции результирующей угловой скорости:

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = 0,$$

$$\omega_z = -\omega_1 - \omega_3 + \omega_2 + \omega_4 = -2\omega - \omega + \omega + 2\omega = 0,$$

следовательно, вектор $\vec{\omega}_0$ равен нулю: $\omega_0 = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = 0$.

Проекции результирующей скорости на оси координат v_x, v_y, v_z найдем аналогично проекциям главных моментов сил, рассматривая $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$, $\vec{\omega}_3$ и $\vec{\omega}_4$ как силы:

$$v_x = \omega_4 \cdot \frac{a}{2} - \omega_3 \cdot a = \frac{2a\omega}{2} - \omega a = 0,$$

$$v_y = -\omega_4 \cdot a - \omega_3 \cdot a = -2\omega a + 2\omega a = 0.$$

следовательно, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = 0$. Итак, $\vec{\omega}_0 = 0$ и $v = 0$, т.е. тело будет находиться в мгновенном покое.

Задача 7.16. Твердое тело в форме куба со стороной a участвует во вращении с угловыми скоростями $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega$ и $\omega_5 = \omega_6 = \omega\sqrt{2}$. Размеры тела и направление угловых скоростей указаны на рис. *а*. Привести движение тела к простейшему виду.

Решение. Примем за центр приведения точку O. Направим оси x, y, z вдоль ребер куба. Определим проекции результирующей угловой скорости:

$$\omega_x = \omega_2 - \omega_5 \cos 45°,$$

$$\omega_y = -\omega_1 - \omega_4 + \omega_5 \cos 45° + \omega_6 \cos 45°,$$

$$\omega_z = \omega_3 - \omega_6 \cos 45°.$$

Подставив значения угловых скоростей, будем иметь

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0.$$

Следовательно, в результирующем движении вращения не будет.

Определим проекции результирующей поступательной скорости:

$$v_x = \omega_3 a - \omega_5 a \cos 45° - \omega_6 a \sin 45°,$$

$$v_y = -\omega_3 a - \omega_5 a \cos 45° + \omega_6 a \cos 45°,$$

$$v_z = -\omega_2 a - \omega_4 a + \omega_6 a \cos 45° + \omega_5 a \sin 45°.$$

Подставив известные значения величин, получим:

$$v_x = -\omega a, \quad v_y = -\omega a, \quad v_z = 0.$$

Тогда модуль поступательной скорости равен

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \omega a \sqrt{2}.$$

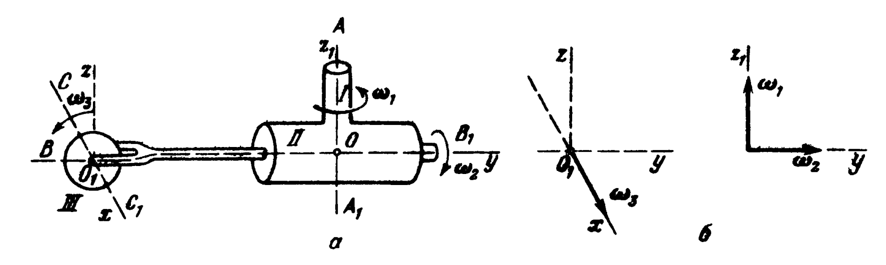
Таким образом, движение тела будет мгновенно-поступательным со скоростью

$$v = \omega a \sqrt{2},$$

направленной, как показано на рис. *б*.

Полезно отметить, что результирующее мгновенно-поступательное движение получается из сложения одних вращений.

Задача 7.17. Валик *I* (рис. *а*) вращается вокруг вертикальной оси AA_1, делая 10 об/мин. Валик *II*, укрепленный на валике *I* так, что их оси взаимно перпендикулярны, вращается вокруг своей оси BB_1, также совершая 10 об/мин. На конце валика *II* имеется вилка, несущая ось диска *III*, которая перпендикулярна к оси *II* и находится от нее на расстоянии 40 см.



К задаче 7.17

Диск вращается вокруг своей оси CC_1 с угловой скоростью 5 об/мин. Радиус диска 3 см. Найти результирующее движение диска *III*.

Решение. Диск *III* участвует в трех вращательных движениях. Выберем оси координат с началом в точке O_1 (рис. *б*), тогда проекции результирующей угловой скорости на оси координат будут

$$\omega_x = \omega_3 = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi \cdot 5}{60} = \frac{\pi}{6} \text{ рад/с}, \quad \omega_y = \omega_2 = \frac{\pi}{3} \text{ рад/с},$$

$$\omega_z = \omega_1 = \frac{\pi}{3} \text{ рад/с}.$$

Модуль результирующей угловой скорости

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{36} + \frac{\pi^2}{9} + \frac{\pi^2}{9}} = \frac{\pi}{2} \text{ рад/с}.$$

Переходим к определению скорости точки O_1. Ее скорость

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 = \overline{OO_1} \times \vec{\omega}_1,$$

так как составляющие скорости точки O_1 от угловых скоростей ω_2 и ω_3 обращаются в нули, поскольку эти угловые скорости проходят через точку O_1.

Найдем проекции поступательной скорости на оси координат:

$$v_x = v = OO_1 \cdot \omega_1 = 40 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{40\pi}{3} \text{ см/с}, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0.$$

По направлению v совпадает с $\vec{\omega}_3$ и, таким образом, не параллельна и не перпендикулярна вектору результирующей угловой скорости. Значит, диск *III* совершает винтовое движение.

Найдем уравнение мгновенной винтовой оси, воспользовавшись формулой

$$\frac{v_x - y\omega_z + z\omega_y}{\omega_x} = \frac{v_y - z\omega_x + x\omega_z}{\omega_y} = \frac{v_z - x\omega_y + y\omega_x}{\omega_z}.$$

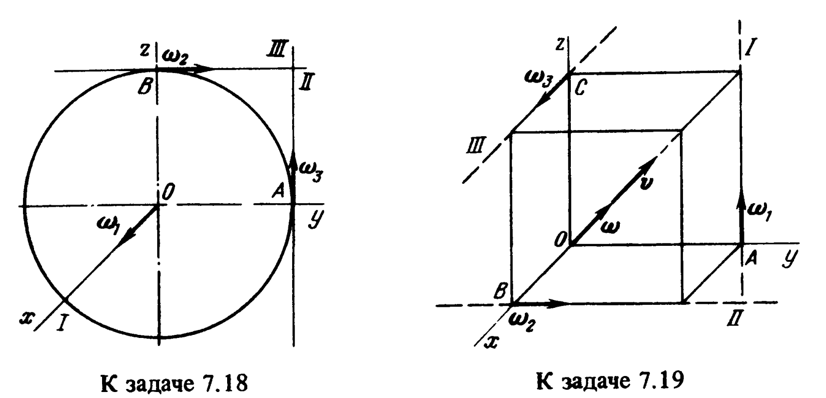
Подставив соответствующие числовые значения в это выражение, получим

$$\frac{\frac{40\pi}{3} - y\frac{\pi}{3} + z\frac{\pi}{3}}{\pi/6} = \frac{0 + x\frac{\pi}{3} - z\frac{\pi}{6}}{\pi/3} = \frac{0 - x\frac{\pi}{3} + y\frac{\pi}{6}}{\pi/3}.$$

Преобразуя, находим окончательно уравнение мгновенной винтовой оси:

$$2x + 4y - 5z = 160, \quad 4x - y - z = 0.$$

Задача 7.18. Твердая сфера участвует одновременно в трех вращениях вокруг осей *I*, *II* и *III* с угловыми скоростями $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_0$. Привести движения тела к простейшему виду, если радиус сферы равен R.



К задаче 7.18　　　　К задаче 7.19

Р е ш е н и е. Выберем координатные оси как показано на рисунке. За центр приведения примем точку O. Определим проекции результирующей угловой скорости:

$$\omega_x = \omega_1 = \omega_0, \quad \omega_y = \omega_2 = \omega_0, \quad \omega_z = \omega_3 = \omega_0.$$

Следовательно, результирующая угловая скорость

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_0^2 + \omega_0^2} = \omega_0\sqrt{3}.$$

Проекции скорости точки O на оси координат v_x, v_y, v_z найдем аналогично

проекциям главных моментов сил, рассматривая ω_1, ω_2, ω_3 как силы

$$v_x = \omega_2 R - \omega_3 R = 0, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0.$$

Следовательно, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = 0$. Итак, имеем $\omega_0 \neq 0$ и $v = 0$. Находим уравнение мгновенной оси вращения:

$$\frac{v_x - y\omega_z + z\omega_y}{\omega_x} = \frac{v_y - z\omega_x + x\omega_z}{\omega_y} = \frac{v_z - x\omega_y + y\omega_x}{\omega_z}.$$

Решив это уравнение для нашего случая, получим

$$x = y = z.$$

Отсюда видно, что мгновенная ось сохраняет свое направление в пространстве неизменным, иначе говоря, результирующее движение шара представляет вращение его вокруг неподвижной оси, составляющей равные углы с осями координат, с угловой скоростью $\omega = \omega_0\sqrt{3}$.

Задача 7.19. Куб участвует одновременно в трех вращениях вокруг скрещивающихся осей *I*, *II* и *III*, совпадающих с тремя ребрами куба (см. рис.). Модули угловых скоростей всех трех вращений одинаковы: $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_0$. Ребро куба равно a. Определить результирующее движение куба.

Решение. Примем за центр приведения точку O. Направим оси x, y, z вдоль ребер куба. Определим результирующую угловую скорость:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3.$$

Ее проекции на координатные оси равны

$$\omega_x = \omega_3 = \omega_0, \quad \omega_y = \omega_2 = \omega_0, \quad \omega_z = \omega_1 = \omega_0.$$

Модуль результирующей угловой скорости будет

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{3\omega_0^2} = \omega_0\sqrt{3}.$$

Определим проекции результирующей поступательной скорости, соответствующие трем вращениям:

$$\mathbf{v}_1 = \overline{OA} \times \vec{\omega}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \omega_0 \end{vmatrix} = \omega_0 a\mathbf{i},$$

$$\mathbf{v}_2 = \overline{OB} \times \vec{\omega}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & \omega_0 & 0 \end{vmatrix} = \omega_0 a\mathbf{k},$$

$$\mathbf{v}_3 = \overline{OC} \times \vec{\omega}_3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & a \\ \omega_0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega_0 a j.$$

Результирующую поступательную скорость определим из соотношения

$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$.

Ее модуль

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = a\omega_0\sqrt{3}.$$

Таким образом, $\vec{\omega} \neq 0$, $\mathbf{v} \neq 0$ и $\mathbf{v}$ не перпендикулярна к $\vec{\omega}$, т.е. тело совершает мгновенное винтовое движение. Угловая скорость и поступательная скорость направлены по одной прямой (случай кинематического винта).

Результирующая скорость будет направлена по диагонали куба из точки O.

Уравнение винтовой оси находится по формуле (4*)

$$\frac{v_x - y\omega_z}{\omega_x} = \frac{v_y - z\omega_x + x\omega_z}{\omega_y} = \frac{v_z - x\omega_y + y\omega_x}{\omega_z}.$$

Подставляя в это уравнение значения переменных, получим

$$\frac{a\omega_0 - y\omega_0 + z\omega_0}{\omega_0} = \frac{a\omega_0 - z\omega_0 + x\omega_0}{\omega_0} = \frac{a\omega_0 - x\omega_0 + y\omega_0}{\omega_0}.$$

Окончательно находим уравнения двух плоскостей:

$$x + y - 2z = 0, \quad y + z - 2x = 0,$$

пересечение которых и определяет мгновенную винтовую ось.

Задача 7.20. Тело A вращается вокруг оси I с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$. Тело B независимо от него вращается вокруг оси II с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$. Численно $\omega_2 = 3\omega_1$. Ось II перпендикулярна плоскости, проходящей через ось I и прямую AB и отстоит от оси I на расстояние a (рис. a).

Определить движение тела A по отношению к телу B.

Р е ш е н и е. 1. *Графический метод.* Дадим телу B дополнительное вращение с угловой скоростью $-\vec{\omega}_2$, тогда тело B будет неподвижно. Движение тела A по отношению к B будет складываться из вращения вокруг оси I с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$ и из вращения вокруг оси II с угловой скоростью $-\vec{\omega}_2$. Приведем вектор $-\vec{\omega}_2$ к точке A, тогда в этой точке, кроме

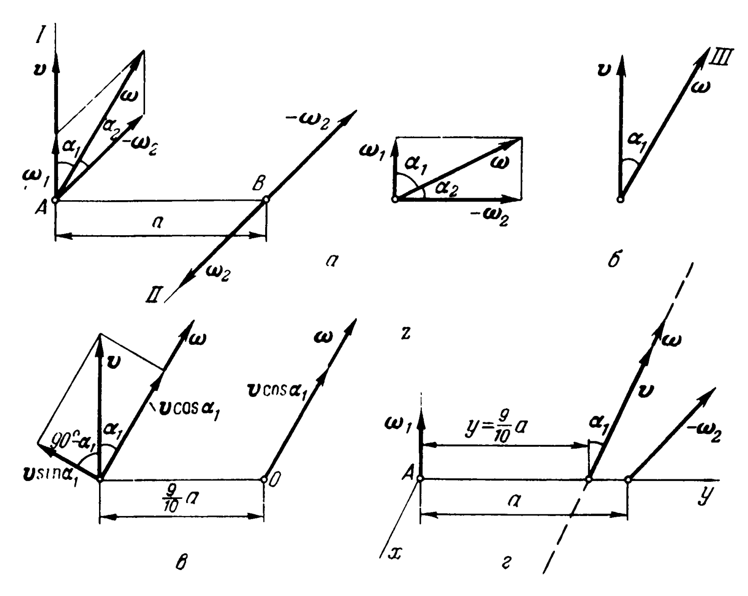
вектора $-\vec{\omega}_2$, следует приложить и скорость

$$\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \vec{\omega}_2,$$

где $\mathbf{r} = \overline{BA}$. Этот вектор $\mathbf{v}$ будет направлен по оси I и равен по модулю

$$v = \omega_2 a = 3\omega_1 a.$$

Складывая векторные угловые скорости $\vec{\omega}_1$ и $-\vec{\omega}_2$, приложенные к точ-



К задаче 7.20

ке A, получим суммарный вектор $\vec{\omega}$, направленный под углом α_1 к оси I и под углом α_2 к оси II, причем

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{3\omega_1}{\omega_1} = 3; \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\omega_1}{3\omega_1} = \frac{1}{3}.$$

Теперь можно сказать, что движение тела A по отношению к телу B состоит из вращения вокруг оси III с угловой скоростью

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2,$$

равной

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \omega_1\sqrt{10},$$

и поступательного движения со скоростью $\mathbf{v}$. Ось III составляет угол α_1 с направлением поступательной скорости $\mathbf{v}$ (рис. $б$).

Движение тела A можно представить более наглядно, если привести движение к винтовому. Разложим скорость $\mathbf{v}$ на две взаимно перпендикулярные составляющие $\mathbf{v}\cos\alpha_1$ и $\mathbf{v}\sin\alpha_1$ (рис. *в*). Составляющая $\mathbf{v}\cos\alpha_1$ будет направлена по вектору $\vec{\omega}$. Составляющую $\mathbf{v}\sin\alpha_1$, перпендикулярную к $\vec{\omega}$, можно представить как пару вращения, момент которой равен произведению угловой скорости на плечо l. Находим длину l из равенства $v\sin\alpha_1 = \omega l$.

Подставляя в это равенство найденное значение v и выражение

$$\sin\alpha_1 = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_1}} = \frac{3}{\sqrt{1+3^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}},$$

будем иметь

$$3\omega_1 \cdot a\frac{3}{\sqrt{10}} = \omega_1\sqrt{10}\,l,$$

отсюда находим

$$l = \frac{3\cdot a\cdot 3}{10} = \frac{9}{10}a.$$

Таким образом, относительное движение тела A складывается из вращательного движения с угловой скоростью ω и поступательного движения со скоростью $v\cos\alpha_1$, направленных по винтовой оси (рис. *в*). Тело A совершает винтовое движение по отношению к телу B.

Модуль поступательной скорости

$$v\cos\alpha_1 = 3\omega_1 a\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}a\omega_1.$$

2. *Аналитический метод.* Эту задачу можно решить и аналитическим способом, аналогично способу, который применяют в статике при приведении произвольной пространственной системы сил к простейшему виду. Угловые скорости являются скользящими векторами аналогично силам в статике. Поступательные скорости являются свободными векторами аналогично моментам в статике.

Движение тела A относительно тела B складывается из двух вращений: с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$ вокруг оси I и с угловой скоростью $-\vec{\omega}_2$, направленной в отрицательную сторону оси II.

Выберем оси координат с началом в точке A, тогда проекции результирующей угловой скорости на оси координат будут

$$\omega_x = -\omega_2 = -3\omega_1,\quad \omega_y = 0,\quad \omega_z = \omega. \qquad (1)$$

Модуль результирующей угловой скорости

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \omega_1 \sqrt{10}.$$

Найдем проекции поступательной скорости на оси координат:

$$v_x = 0, \quad v_y = 0, \quad v_z = 3a\omega_1. \qquad (2)$$

Модуль поступательной скорости

$$v = 3a\omega_1.$$

Проверим, образуют ли $\vec{\omega}$ и $\mathbf{v}$ прямой угол:

$$\vec{\omega} \cdot \mathbf{v} = \omega_x v_x + \omega_y v_y + \omega_z v_z = 3a\omega_1.$$

Как видно, скалярное произведение этих векторов не равно нулю, следовательно, они не перпендикулярны друг другу. Значит, тело A совершает по отношению к телу B винтовое движение.

Найдем уравнение мгновенной винтовой оси. Воспользуемся формулой

$$\frac{v_x - y\omega_z + z\omega_y}{\omega_x} = \frac{v_y - z\omega_x + x\omega_z}{\omega_y} = \frac{v_z - x\omega_y + y\omega_x}{\omega_z}. \qquad (3)$$

Это уравнение, если учесть формулы (1) и (2), принимает вид

$$\frac{y}{3} = \frac{3z\omega_1 + x\omega_1}{0} = \frac{3a - 3y}{1} \qquad (4)$$

или

$$z = -\frac{x}{3}, \quad y = \frac{9}{10}a. \qquad (5)$$

Таким образом, ось вращения лежит в плоскости, параллельной координатной плоскости xz, отстоит от нее на расстояние $y = 9a/10$ и образует с осью z угол α_1, определяемый из равенства $\operatorname{tg}\alpha_1 = 3$. Осталось найти поступательную скорость, с которой будет двигаться тело вдоль винтовой оси. Она определяется по формуле (5)

$$v_{min} = \frac{\omega_x v_x + \omega_y v_y + \omega_z v_z}{\omega}. \qquad (6)$$

После подстановки всех значений в правую часть (6) имеем

$$v_{min} = \frac{3a\omega_1}{\sqrt{10}}.$$

Естественно, результаты в обоих случаях совпадают.

Указание. Для приобретения навыков в решении задач на общий случай движения твердого тела, а также на сложение поступательных и

вращательных движений рекомендуется решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 20.1. 20.2, 20.5 20.7, 20.9–20.11, 24.44–24.46.

§ 4. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ НА СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

Среди задач на сложное движение точки встречаются задачи, в которых переносное движение осуществляется твердым телом, а относительное движение – точкой, движущейся по этому твердому телу.

В этом случае переносное движение является одним из движений твердого тела: поступательным движением, вращением твердого тела вокруг неподвижной оси, плоским движением, вращением твердого тела вокруг неподвижной точки, общим случаем движения твердого тела.

Абсолютная скорость точки $\mathbf{v}_a$ определяется по теореме сложения скоростей:

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r, \qquad (1^*)$$

где переносная скорость определяется согласно методам, разработанным для одного из перечисленных видов движения твердого тела. Переносная скорость $\mathbf{v}_e$ определяется для той точки твердого тела, с которой совпадает в рассматриваемый момент времени точка, совершающая сложное движение. При этом относительное движение мысленно останавливается.

Относительная скорость точки $\mathbf{v}_r$ определяется по законам кинематики точки. При этом переносное движение мысленно останавливается.

Абсолютное ускорение точки определяется по теореме сложения ускорений, по теореме Кориолиса

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_c, \qquad (2^*)$$

где $\boldsymbol{a}_c$ – абсолютное ускорение точки, $\boldsymbol{a}_e$ – переносное ускорение точки, $\boldsymbol{a}_r$ – относительное ускорение точки, $\boldsymbol{a}_c$ – ускорение Кориолиса. Переносное ускорение $\boldsymbol{a}_e$ определяется для той точки твердого тела, с которой совпадает в данный момент точка, совершающая сложное движение. Относительное ускорение $\boldsymbol{a}_r$ определяется по законам кинематики точки. При этом переносное движение мысленно останавливается. Ускорение Кориолиса определяется по формуле

$$\boldsymbol{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \mathbf{v}_r, \qquad (3^*)$$

где $\vec{\omega}_e$ – переносная угловая скорость твердого тела, $\mathbf{v}_r$ – относительная скорость точки. Ускорение Кориолиса обращается в нуль при поступательном движении твердого тела ($\vec{\omega}_e = 0$) или в случае, когда $\vec{\omega}_e$ параллельна $\mathbf{v}_r$, так как модуль ускорения Кориолиса равен

$$|\boldsymbol{a}_c| = 2\omega_e v_r \sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \mathbf{v}_r}). \qquad (4^*)$$

Указание. При решении задач на определение скоростей и ускорений точки, совершающей сложное движение вместе с твердым телом, рекомендуется последовательность действий:

1) определяем положение точки на твердом теле в заданный момент времени;

2) определяем скорость этой точки твердого тела, останавливая мысленно движение точки по отношению к твердому телу – это будет переносная скорость;

3) определяем скорость точки, останавливая мысленно движение твердого тела – это будет относительная скорость;

4) векторная сумма переносной и относительной скоростей определит абсолютную скорость точки;

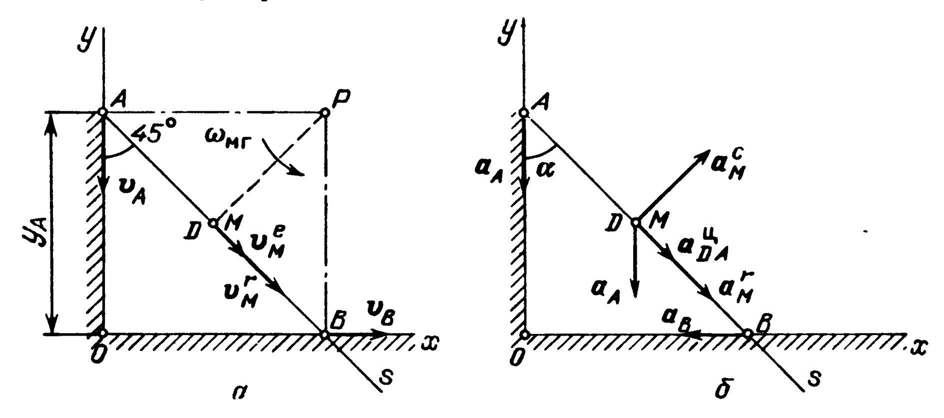
5) абсолютное ускорение точки определяем по теореме Кориолиса;

6) определяем переносное ускорение как ускорение точки твердого тела, через которую в данный момент проходит точка, совершающая сложное движение;

7) определяем относительное ускорение точки по правилам кинематики точки, остановив мысленно движение твердого тела;

8) находим ускорение Кориолиса, пользуясь формулой (3*);

9) складывая векторно или в проекциях на оси координат три найденных ускорения: переносное, относительное и ускорение Кориолиса, находим абсолютное ускорение точки.



К задаче 7.21

Задача 7.21. Стержень AB длиной $2\sqrt{2}$ м скользит концом A вниз вдоль оси y, а концом B вдоль оси x направо. Точка A движется по закону $y_a = 3 - t^2$ м. Одновременно вдоль стержня от A к B соскальзывает точка M.

Определить модуль абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки M в момент $t = 1$ с, если уравнение движения точки M вдоль оси s, совмещенной со стержнем, имеет вид $s = AM = \sqrt{2}t^2$ м.

Решение. В момент времени $t = 1$ с точка M находится посередине стержня AB, так как

$$s = AM = \sqrt{2}t^2 = \sqrt{2}\text{ м}.$$

Абсолютную скорость точки M ищем по теореме сложения скоростей

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_M^r + \mathbf{v}_M^e,$$

где $\mathbf{v}_M^e$ – скорость в переносном движении точки M вместе со стержнем AB; $\mathbf{v}_M^r$ – скорость в движении точки M относительно стержня AB. Известны направления скоростей двух точек стержня A и B (рис a). Мгновенный центр скоростей P находится в точке пересечения перпендикуляров, восставленных в точках A и B к скоростям этих точек. Скорость точки A при $t = 1$ с равна по модулю

$$v_A = \dot{y}_A = 2\text{ м/с}.$$

С другой стороны, ее можно определить как произведение мгновенной угловой скорости $\omega_{\text{мг}}$ на AP:

$$v_A = \omega_{\text{мг}} \cdot AP.$$

При $t = 1$ с $OA = OB = 2$ м. Следовательно,

$$\omega_{\text{мг}} = v_A/AP = 1\text{ с}^{-1}.$$

Определим скорость в переносном движении точки M вместе со стержнем AB:

$$v_M^e = \omega_{\text{мг}} \cdot DP = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}\text{ м/с}.$$

Она направлена от точки M к B по прямой s (рис. a). Скорость движения точки M относительно стержня AB равна при $t = 1$ с

$$v_M^r = \dot{s} = 2\sqrt{2}\text{ м/с}.$$

Она направлена от точки M к B по прямой s (рис. a).

Вычислим модуль абсолютной скорости точки M:

$$v_M = v_M^r + v_M^e = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}\text{ м/с}.$$

Абсолютное ускорение точки M определяется по теореме Кориолиса:

$$a_M = a_M^e + \dot{a}_M^r + a_M^c.$$

Переносное ускорение точки M равно ускорению точки D, принадлежащей стержню AB. Оно определяется по формулам плоского движения.

Ускорение точки A в момент времени $t = 1$ с равно

$$a_A = \ddot{y}_A = -2\text{ м/с}^2.$$

Оно направлено от точки A по прямой y вниз (рис. $б$). Из рис. $б$ видно, что

$$y_A = AB \cdot \cos\alpha = 3 - t^2;$$

тогда

$$\cos\alpha = \frac{3-t^2}{2\sqrt{2}}, \quad \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

Можно записать закон движения точки B:

$$x_B = AB\cdot\sin\alpha = \sqrt{6t^2 - t^4 - 1}.$$

Ускорение точки B в момент времени $t = 1$ с равно

$$a_B = \ddot{x}_B = \frac{(12-12t^2)2\sqrt{6t^2-t^4-1} - (12t-4t^3)\dfrac{12t-4t^3}{\sqrt{6t^2-t^4-1}}}{4(6t^2-t^4-1)} =$$

$$= -2 \text{ м/с}^2.$$

Оно направлено от точки B по прямой x налево (рис. *б*).

Выбираем точку A за полюс. Тогда ускорение точки B

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}^{ц}_{BA} + \boldsymbol{a}^{вр}_{BA}.$$

Проектируем векторное равенство на прямую AB, соединяющую обе точки, а затем на направление, перпендикулярное к AB (рис. *б*). В проекции на направление AB имеем

$$-a_B\cos 45^\circ = a_A\cos 45^\circ + a^{ц}_{BA},$$

откуда

$$a^{ц}_{BA} = -a_B\cos 45^\circ - a_A\cos 45^\circ = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\text{ м/с}^2.$$

Далее находим модуль мгновенной угловой скорости стержня AB

$$\omega_{мг} = \sqrt{a^{ц}_{BA}/AB} = 1 \text{ с}^{-1}.$$

Проектируя векторное равенство на направление, перпендикулярное к AB, получаем

$$a_B\cos 45^\circ = a^{вр}_{BA} + a_A\cos 45^\circ.$$

Отсюда определяем вращательное ускорение

$$a^{вр}_{BA} = a_B\cos 45^\circ - a_A\cos 45^\circ = 0.$$

Следовательно, $\epsilon_{мг} = 0$.

Пользуясь формулой распределения ускорений, находим переносное ускорение точки M:

$$\boldsymbol{a}^{e}_{M} = \boldsymbol{a}_D = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}^{вр}_{DA} + \boldsymbol{a}^{ц}_{DA},$$

где

$$a^{\text{вр}}_{DA} = \epsilon_{\text{мг}} \cdot AD = 0,$$

а центростремительное ускорение

$$a^{\text{ц}}_{DA} = \omega^2_{\text{мг}} \cdot AD = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}\ \text{м/с}^2.$$

Оно направлено от точки D к B по прямой s (рис. *б*).

Относительное ускорение точки M в момент времени $t = 1$ с равно

$$a^r_M = \ddot{s} = 2\sqrt{2}\ \text{м/с}^2$$

и направлено от точки M к B по прямой s (рис. *б*).

Ускорение Кориолиса равно

$$a^c_M = 2\omega_{\text{мг}}\, v^r_M \sin 90° = 2 \cdot 1 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\ \text{м/с}^2.$$

Оно направлено от точки M к P (рис. *б*).

Находим проекции составляющих ускорения точки M на координатные оси:

$$a_x = a^{\text{ц}}_{DA} \sin 45° + a^r_M \sin 45° + a^c_M \cos 45° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} + \frac{4\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = 7\ \text{м/с}^2,$$

$$a_y = -a_A - a^{\text{ц}}_{DA} \cos 45° - a^r_M \cos 45° + a^c_M \sin 45° =$$
$$= 2 - \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} + \frac{4\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = 3\ \text{м/с}^2.$$

Модуль ускорения точки M равен

$$a_M = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{58} \approx 7{,}6\ \text{м/с}^2.$$

Задача 7.22. Конус, вершина O которого неподвижна, катится по плоскости без скольжения. Высота конуса $CO = 18$ см, а угол при вершине $AOB = 90°$. Точка C, центр основания конуса, движется равномерно и возвращается в первоначальное положение через 1 с. По диаметру ACB движется точка M согласно уравнению $CM = s = 5 \sin\frac{\pi}{2}t$ см. Определить модуль скорости и ускорения точки M в момент времени $t = 2$ с (см. рисунок).

Р е ш е н и е. Точка M совершает сложное движение. Вместе с конусом она участвует в переносном движении и совершает относительное движение по отношению к конусу.

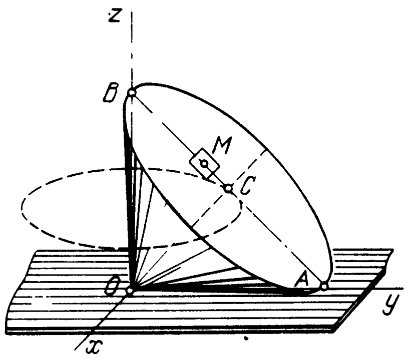
Ее абсолютная скорость определяется формулой

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r. \qquad (1)$$

Находим прежде всего положение точки на конусе в момент времени $t = 2$ с:

$CM = s = 5 \sin \pi = 0$.

Точка M в этот момент времени проходит через точку C. Следовательно,



К задаче 7.22

переносная скорость точки M равна скорости точки C. Найдем ее. Точка C описывает в горизонтальной плоскости окружность радиусом

$$r = OC \cdot \cos 45^\circ = 18 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 9 \cdot \sqrt{2} \text{ см}.$$

Длина окружности, проходимой точкой C за 1 с, равна численно ее скорости

$$v_e = v_C = 2\pi r = 18\sqrt{2}\,\pi \text{ см/с}.$$

Эта скорость направлена по касательной к горизонтальной окружности, описываемой точкой C конуса, и направлена, для определенности, на нас. Относительная скорость точки M равна

$$v_r = \dot{s} = \frac{5\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t = -\frac{5}{2}\pi \text{ см/с}.$$

Так как относительное движение прямолинейное, то эта скорость направлена по прямой CA от C к A.

Выбирая оси декартовых координат: ось y – по OA, ось z – по OB, а ось x перпендикулярно к плоскости AOB на читателя, находим проекции абсолютной скорости на декартовы оси:

$$v_{ax} = v_e = 18\sqrt{2}\pi \text{ см/с}, \quad v_{ay} = v_r \cos 45^\circ = \frac{5}{2}\pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{4}\sqrt{2}\pi \text{ см/с},$$

$$v_{az} = v_r \cos 45^\circ = -\frac{5}{2}\pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{4}\sqrt{2}\pi \text{ см/с}.$$

Модуль абсолютной скорости равен

$$v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2 + v_{az}^2} = 25{,}6\pi \text{ см/с}.$$

Переходим к определению абсолютного ускорения точки M. Согласно теореме Кориолиса

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_c.$$

Переносное ускорение — это ускорение точки C — центра основания конуса. Оно равно

$$a_e = \frac{v_C^2}{\rho} = \frac{(2\pi\rho)^2}{\rho} = 4\pi^2\rho = 4\pi^2 \cdot OC \cdot \cos 45° = 2\sqrt{2}\pi^2 \cdot 18 =$$
$$= 36\sqrt{2}\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

По условию точка C описывает в 1 с окружность длиной $2\pi\rho$, где радиус окружности $\rho = OC \cdot \cos 45°$. Ускорение a_e направлено от точки C по радиусу окружности. Оно проектируется на ось y со знаком минус в натуральную величину.

Относительное ускорение равно

$$a_r = \dot{v}_r = \ddot{s} = -\frac{5\pi^2}{4} \sin\frac{\pi}{2} t = 0.$$

Ускорение Кориолиса равно

$$\mathbf{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \mathbf{v}_r.$$

Замечая, что угловая скорость конуса $\vec{\omega}_e$ направлена по OA и образует с направлением $\mathbf{v}_r$ угол 135°, находим модуль ускорения Кориолиса

$$a_c = 2\omega_e v_r \sin 45° = 2\,\frac{v_e}{OC \cdot \cos 45°} \cdot \frac{5\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}\,\pi^2.$$

Проекции ускорения на декартовы оси координат равны

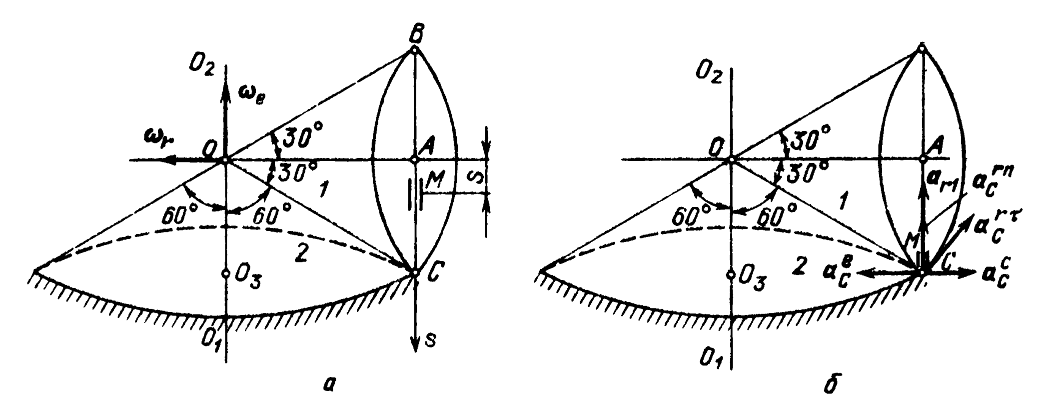
$$a_x = a_c = 5\sqrt{2}\pi^2, \qquad a_y = -a_e = -36\sqrt{2}\pi^2, \quad a_z = 0.$$

Модуль ускорения находим по формуле

$$a_a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{50\pi^4 + 2592\pi^4} \approx 51{,}1\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

Задача 7.23. Круговой конус *1* с углом при вершине, равным 60°, прикреплен к неподвижному конусу *2* с углом при вершине 120° шарниром O и катится без скольжения. При этом ось OA конуса *1* совершает вокруг вертикальной оси O_1O_2 два оборота в секунду. Вдоль диаметра $BC = 30$ см основания конуса *1* проложена направляющая, по которой скользит ползун M, совершая колебания около центра A по закону $s = AM = 15\cos\pi t$ см. В начальный момент времени $t = 0$ направляющая BC лежит в одной вертикальной плоскости с шарниром O. Найти модуль абсолютной скорости и абсолютного ускорения ползуна M в момент $t = 0$.

Решение. Примем вращение конуса 1 вокруг вертикальной оси O_1O_2 за переносное движение, а вращение этого же конуса вокруг оси OA – за относительное движение. Абсолютным движением конуса 1 будет сферическое движение. Абсолютная мгновенная ось конуса направлена по общей образующей OC подвижного и неподвижного конусов.



К задаче 7.23

Ось OA конуса 1 совершает вокруг вертикальной оси O_1O_2 два оборота в секунду. Следовательно, переносная угловая скорость конуса 1 равна

$$\omega_e = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi\ \text{c}^{-1}. \tag{1}$$

Скорость точки C, принадлежащей конусу 1, в данный момент равна нулю, так как она находится на абсолютной мгновенной оси. С другой стороны, абсолютная скорость точки C равна сумме ее переносной и относительной скорости:

$$\mathbf{v}_C^a = \mathbf{v}_C^e + \mathbf{v}_C^r = 0. \tag{2}$$

Но

$$v_C^e = O_3C \cdot \omega_e = OA \cdot \omega_e, \qquad v_C^r = AC \cdot \omega_r. \tag{3}$$

Следовательно,

$$|O_3C \cdot \omega_e| = |AC \cdot \omega_r|. \tag{4}$$

Скорости (3) направлены по одной прямой в противоположные стороны, откуда

$$\omega_r = \frac{O_3C}{AC} \cdot \omega_e. \tag{5}$$

Из рис. *а* следует

$$O_3C = OA = OC\cdot \cos 30^\circ = \frac{AC\cdot \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 30\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}\ \text{см} \qquad (6)$$

и, следовательно,

$$\omega_r = \frac{15\sqrt{3}}{15}\cdot \omega_e = 4\pi\sqrt{3}\ \text{с}^{-1}. \qquad (7)$$

Теперь легко находится угловое ускорение относительного движения, как скорость конца вектора $\vec{\omega}_r$

$$\epsilon_r = \omega_e\omega_r = 16\pi^2\sqrt{3}\ \text{с}^{-2}. \qquad (8)$$

Вектор $\vec{\epsilon}_r$ направлен перпендикулярно к плоскости рисунка, на читателя.

Ускорение точки C конуса определится по теореме Кориолиса

$$a_C = a_C^r + a_C^e + a_C^c. \qquad (9)$$

Находим, далее переносное ускорение точки C конуса:

$$a_C^e = O_3C\cdot \omega_e^2 = 15\sqrt{3}\,(4\pi)^2 = 240\sqrt{3}\,\pi^2\text{см/с}^2. \qquad (10)$$

Оно направлено от точки C к точке O_3 (рис. *б*).

Относительное ускорение точки C конуса складывается из нормальной и касательной составляющих:

$$a_C^r = a_C^{rn} + a_C^{r\tau}, \qquad (11)$$

где

$$a_C^{rn} = AC\cdot \omega_r^2 = 15(4\pi\sqrt{3})^2 = 720\pi^2\ \text{с}^{-2}. \qquad (12)$$

Оно направлено от точки C к точке A.

Относительное вращательное ускорение по модулю равно

$$a_C^{r\tau} = OC\cdot \epsilon_r = 30\cdot 16\sqrt{3}\pi^2 = 480\sqrt{3}\pi^2\ \text{с}^{-2}. \qquad (13)$$

Относительное вращательное ускорение направлено перпендикулярно OC и лежит в плоскости OBC, перпендикулярной вектору $\vec{\epsilon}_r$. Ускорение Кориолиса равно

$$a_C^c = 2\vec{\omega}_e \times \mathbf{v}_r, \qquad (14)$$

или

$$a_C^c = 2\omega_e v_r \sin 90^\circ = 2\omega_e v_r = 8\pi\cdot 15\cdot 4\pi\sqrt{3} = 480\sqrt{3}\pi^2\ \text{см/с}^2. \qquad (15)$$

Находим направление ускорения Кориолиса по правилу Жуковского. Скорость $\mathbf{v}_r$, направленную перпендикулярно рисунку, поворачиваем на 90° в направлении вращения $\vec{\omega}_e$. Ускорение Кориолиса направлено по прямой O_3C.

Таким образом, найдены все составляющие абсолютного ускорения точки C, принадлежащей подвижному конусу 1.

Для определения абсолютной скорости и абсолютного ускорения ползуна M рассмотрим его абсолютное движение как сумму двух движений: переносного движения вместе с конусом 1 и относительного движения по отношению к конусу 1.

Уравнение относительного движения ползуна дано:

$$s = 15\cos \pi t; \tag{16}$$

при $t = 0$ $s = 15$, точка M совпадает с точкой C. Относительная скорость ползуна при $t = 0$

$$v_{r1} = -15\sin \pi t \cdot \pi = 0. \tag{17}$$

Относительное ускорение ползуна при $t = 0$

$$a_{r_1} = -15\pi^2 \cos \pi t = -15\pi^2 \text{ см/с}^2. \tag{18}$$

Итак, абсолютная скорость ползуна M в момент времени $t = 0$ равна нулю, так как в нуль обращаются и его переносная скорость – скорость точки C, принадлежащей конусу 1, и его относительная скорость согласно (17).

Выбирая ось x по OA, ось y по O_1O_2, находим проекции абсолютного ускорения ползуна M на эти оси

$$a_{Mx} = a_C^c + a_C^{r\tau} \cos 60^\circ - a_C^e, \quad a_{My} = a_{r_1} + a_C^{rn} + a_C^{r\tau}\cos 30^\circ. \tag{19}$$

Задача 7.24. Вдоль шатуна AB кривошипно-ползунного механизма OAB около точки C совершает колебания муфта M по закону $s = CM = 10\cos \dfrac{\pi}{2} t$ (см. рис. *а*). Ось s имеет начало в центре C шатуна и направлена по шатуну. Кривошип OA вращается вокруг горизонтальной оси O, перпендикулярной плоскости рисунка, против хода часовой стрелки по закону $\varphi = \dfrac{\pi}{2} t$ рад.

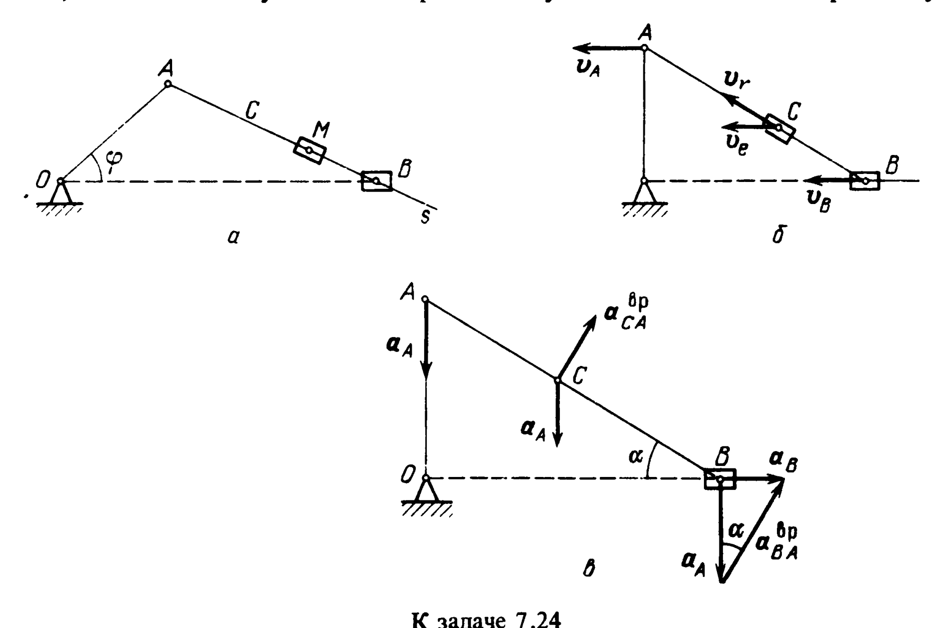
Определить модули абсолютной скорости и абсолютного ускорения муфты M в момент времени $t = 1$ с, если $OA = 10$ см, $AC = CB = AB/2 = 10$ см.

Р е ш е н и е. Найдем прежде всего положение механизма и муфты в заданный момент времени. При $t = 1$ с угол $\varphi = \pi/2$ и механизм занимает положение, изображенное на рис. *б*. Расстояние $s = CM = 10\cos(\pi/2) = 0$, т.е. муфта проходит в этот момент через точку C.

Переходим к определению скорости муфты. Согласно теореме сложения скоростей: абсолютная скорость муфты равна векторной сумме ее переносной и относительной скорости:

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r. \tag{1}$$

Переносная скорость v_e – это скорость точки C шатуна, через которую в данный момент проходит точка M. Скорости точек A и B шатуна в этот момент параллельны (рис. *б*). Следовательно, перпендикуляры к этим скоростям, восставленные в точках A и B, – параллельные линии. Это значит, что мгновенный центр скоростей шатуна AB удалился в бесконечность, а мгновенная угловая скорость шатуна в данный момент равна нулю.



К задаче 7.24

Шатун совершает мгновенно-поступательное движение. Скорости всех его точек равны. Следовательно, скорость точки C шатуна в этот момент равна скорости точки A

$$v_e = v_A = OA \cdot \dot{\varphi} = 10 \cdot \pi/2 = 5\pi \text{ см/с}$$

и направлена параллельно OB.

Таким образом, переносная скорость муфты найдена по модулю и направлению.

Переходим к определению относительной скорости муфты. Относительное движение муфты – это прямолинейное колебательное движение по прямой AB согласно закону

$$s = CM = 10\cos\frac{\pi}{2}t.$$

Вычисляя производную по времени, находим относительную скорость

муфты в момент времени $t = 1$ с

$$v_r = \dot{s} = -5\pi \sin\frac{\pi}{2}t \text{ см/с} = -5\pi \text{ см/с}.$$

Таким образом, относительная скорость в этот момент направлена от точки C к точке A. Для нахождения модуля абсолютной скорости муфты спроектируем равенство (1) на оси координат x и y:

$$v_{ax} = -v_e - v_r\cos 30^\circ = -5\pi - 5\pi\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -9{,}3\pi \text{ см/с}.$$

Угол $OBA = 30^\circ$, так как $OA = 10$ см, $AB = 20$ см.

Вторая проекция абсолютной скорости муфты равна

$$v_{ay} = v_r\cos 60^\circ = 5\pi/2 = 2{,}5\pi \text{ см/с}.$$

Модуль абсолютной скорости муфты равен

$$v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2} = 9{,}65\pi \text{ см/с}.$$

Переходим к определению ускорения муфты. Согласно теореме сложения ускорений (теореме Кориолиса) имеем

$$a = a_e + a_r + a_c. \qquad (2)$$

Переносное ускорение a_e — это ускорение точки C шатуна, через которую в данный момент проходит муфта. Сразу определить a_e нельзя, так как неизвестно угловое ускорение шатуна. Поэтому надо вначале рассмотреть ускорение точки B, направление ускорения которой известно. Оно направлено по OB.

Ускорение точки B согласно закону распределения ускорений в плоском движении равно

$$a_B = a_A + a_{BA}^{\text{вр}} + a_{BA}^{\text{ц}}.$$

В данном положении механизма мгновенная угловая скорость шатуна равна нулю и, следовательно,

$$a_{BA}^{\text{ц}} = AB\cdot\omega^2 = 0.$$

При заданном законе движения кривошипа точка A имеет только центростремительное ускорение. Ускорение полюса A равно

$$a_A = OA\cdot\dot{\varphi}^2 = 10(\pi/2)^2 = 2{,}5\pi^2 \text{ см/с}^2$$

и направлено от A к точке O. Следовательно, для нахождения вектора a_B необходимо геометрически сложить a_A и $a_{BA}^{\text{вр}}$.

Откладывая a_A от точки B, прибавляем $a_{BA}^{\text{вр}}$, величина которого неизвестна. Направление $a_{BA}^{\text{вр}}$ перпендикулярно $\overline{AB}$. Конец этого вектора дол-

жен лежать на горизонтальной прямой OB, так как ускорение точки B, движущейся прямолинейно, естественно, должно совпадать по направлению с этой прямой (рис. *в*). Угол $\alpha = 30^\circ$ равен углу, образованному в треугольнике ускорений перпендикулярными сторонами. Из этого треугольника находим

$$a^{вр}_{BA} = AB \cdot \epsilon = \frac{a_A}{\cos 30^\circ}.$$

Следовательно,

$$\epsilon = \frac{a_A}{\cos 30^\circ \cdot AB} = \frac{2{,}5\pi^2 \cdot 2}{\sqrt{3} \cdot 20} = \frac{\pi^2}{5\sqrt{3}} \text{ рад/с}^2.$$

Переходим к определению ускорения точки C шатуна. Это ускорение является переносным ускорением муфты M. Следовательно (рис. *в*),

$$a_e = a_C \quad a_A + a^{вр}_{CA},$$

где $a^{вр}_{CA} = \epsilon \cdot CA = 2\pi^2/\sqrt{3}$. Тогда

$$a_{ex} = a^{вр}_{CA} \sin 30^\circ = \pi^2/\sqrt{3},$$

$$a_{ey} = -a_A + a^{вр}_{CA} \cos 30^\circ = -2{,}5\pi^2 + \frac{2\pi^2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} = -1{,}5\pi^2. \qquad (3)$$

Переходим к определению относительного ускорения. Так как относительное движение прямолинейное, то

$$a_r = \ddot{s} = -\frac{5}{2}\pi^2 \cos\frac{\pi}{2}t.$$

При $t = 1$ $a_r = 0$.

Ускорение Кориолиса определяется формулой

$$a_c = 2\vec{\omega}_e \times \mathbf{v}_r.$$

Переносное движение – это движение вместе с шатуном. Но шатун совершает в данном положении механизма мгновенно-поступательное движение и его мгновенная угловая скорость равна нулю ($\omega_e = 0$). Следовательно, в этом положении механизма ускорение Кориолиса обращается в нуль.

Таким образом, формулы (3) определяют ускорение муфты в данном положении механизма.

§ 5. КИНЕМАТИКА РОБОТОВ

Промышленный робот – это автоматическое устройство, используемое в производственном процессе для перемещения деталей и технологической оснастки. Двигательные функции робота могут сочетаться с выполнением функций управления и контроля. В настоящем параграфе мы рассмотрим способы выполнения роботом только его основной функции – перемещения деталей в пространстве.

Мы будем решать задачу перевода сложной системы из одного положения в другое, не рассматривая оптимальность траектории с точки зрения минимальных временны́х затрат, так как этот вопрос выходит за рамки кинематики.

В простых случаях, которые будут рассмотрены в этом параграфе, процесс ориентирования моделируется движением геометрической точки – схвата в трехмерном пространстве.

В наиболее общем виде задача ставится следующим образом. Выбирается неподвижная система координат $Oxyz$, связанная, например, со станиной сборочного оборудования. Подвижная система координат $O_1x_1y_1z_1$ связана с сопрягаемой деталью. Положение детали, переносимой схватом, относительно неподвижной системы координат $Oxyz$ будет полностью определено, если относительно этой системы координат задано положение подвижной, жестко связанной с деталью системы координат $O_1x_1y_1z_1$, т.е. известны уравнения

$$x_1 = x_1(t), \quad y_1 = y_1(t), \quad z_1 = z_1(t),$$
$$\varphi = \varphi(t), \quad \psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t), \qquad (1^*)$$

где x_1, y_1, z_1 – координаты точки O_1 – начала подвижной системы координат, а φ, ψ, θ – углы Эйлера.

Кинематика роботов определяет их работоспособность. Робот является звеном в технологическом процессе и должен выполнять свои функции абсолютно точно. Это значит, что траектория движения схвата и его скорость должны определяться технологическим процессом.

Для исследования кинематики роботов следует применять наиболее подходящие системы координат: декартовы, цилиндрические, сферические, полярные.

Указание. При решении задач кинематики роботов следует придерживаться следующего порядка:

1) выбрать систему координат;

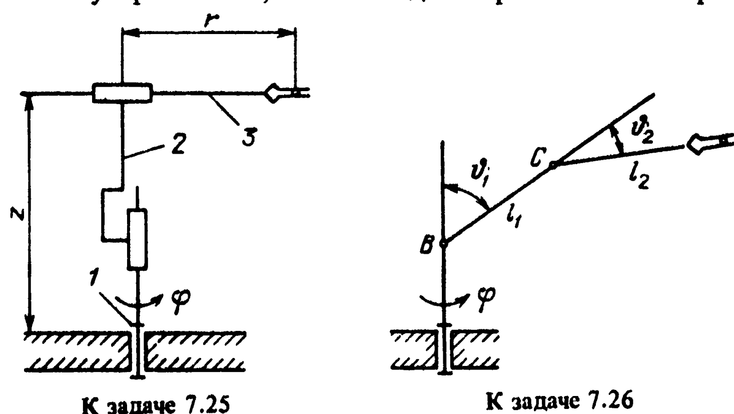
2) составить уравнения движения схвата в избранной системе координат;

3) исключив из уравнений движения схвата время, найти траекторию движения схвата;

4) по уравнениям движения схвата определить проекции скорости на оси координат и скорость схвата по модулю и направлению;

5) зная проекции скорости схвата, определить проекции ускорения схвата на оси координат и ускорение схвата по модулю и направлению.

Задача 7.25. Механизм робота-манипулятора (см. рисунок) состоит из поворотного устройства *1*, колонны для вертикального перемещения *2*



К задаче 7.25 К задаче 7.26

и выдвигающейся руки со схватом *3*. Найти скорость и ускорение центра схвата, если

$$\varphi = \epsilon t^2/2, \quad z(t) = bt, \quad r(t) = kt, \tag{1}$$

где ϵ, b, k – постоянные. Определить траекторию схвата.

Решение. Для решения воспользуемся формулами перехода от цилиндрических координат к декартовым:

$$x(t) = r(t)\sin\varphi(t), \quad y(t) = r(t)\cos\varphi(t), \quad z(t) = z(t). \tag{2}$$

Проекции скорости на неподвижные декартовы оси координат равны первым производным от координат по времени:

$$\begin{aligned} \dot x(t) &= \dot r(t)\sin\varphi(t) + r(t)\cos\varphi(t)\cdot\dot\varphi(t) = \\ &= k\sin(\epsilon t^2/2) + k\epsilon t^2\cos(\epsilon t^2/2), \\ \dot y(t) &= \dot r(t)\cos\varphi(t) - r(t)\sin\varphi(t)\cdot\dot\varphi(t) = \\ &= k\cos(\epsilon t^2/2) - k\epsilon t^2\sin(\epsilon t^2/2), \\ \dot z(t) &= b. \end{aligned} \tag{3}$$

Модуль скорости точки центра схвата находится по формуле

$$v = \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2} = \sqrt{k^2 + k^2\epsilon^2 t^4 + b^2}. \tag{4}$$

Для определения ускорения центра схвата вычислим вначале его проекции на неподвижные декартовы оси координат, как вторые производные от

декартовых координат по времени:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}(t) &= \ddot{r}(t)\sin\varphi(t) + 2\dot{r}(t)\cos\varphi(t)\cdot\dot{\varphi}(t) - \\
&- r(t)\sin\varphi(t)\cdot\dot{\varphi}^2(t) + r(t)\cos\varphi(t)\cdot\ddot{\varphi}(t) = \\
&= 3k\epsilon t\cos(\epsilon t^2/2) - k\epsilon^2 t^3\sin(\epsilon t^2/2), \\
\ddot{y}(t) &= \ddot{r}(t)\cos\varphi(t) - 2\dot{r}(t)\sin\varphi(t)\cdot\dot{\varphi}(t) - \\
&- r(t)\cos\varphi(t)\cdot\dot{\varphi}^2(t) - r(t)\sin\varphi(t)\cdot\ddot{\varphi}(t) = \\
&= -3k\epsilon t\sin(\epsilon t^2/2) - k\epsilon^2 t^3\cos(\epsilon t^2/2), \\
\ddot{z}(t) &= 0.
\end{aligned} \qquad (5)$$

Модуль ускорения центра схвата определяется по формуле

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = \sqrt{9k^2\epsilon^2 t^2 + k^2\epsilon^4 t^6}. \qquad (6)$$

Траекторию схвата можно определить из системы уравнений (1), которая может рассматриваться как система цилиндрических координат схвата. Имеем

$$t = z/b. \qquad (7)$$

Внося это значение в третье и первое уравнения системы (1), находим

$$r = \frac{k}{b}z, \quad \varphi = \frac{\epsilon}{2b^2}z^2. \qquad (8)$$

Система (8) определяет траекторию схвата.

Задача 7.26. Механизм робота-манипулятора (см. рисунок) состоит из поворотного устройства с вертикальной осью (угол поворота φ) и двух звеньев, расположенных в вертикальной плоскости (углы поворота звеньев ϑ_1 и ϑ_2). Найти скорость центра схвата при переносе груза, если

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= kt, \\
\vartheta_1(t) &= \omega_0 t, \\
\vartheta_2(t) &= \epsilon t^2/2,
\end{aligned} \qquad (1)$$

где k, ω_0, ϵ — постоянные.

Р е ш е н и е. Положение центра схвата определяется декартовыми координатами

$$\begin{aligned}
x &= l_1\sin\vartheta_1 + l_2\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)\cos\varphi, \\
y &= l_1\sin\vartheta_1 + l_2\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)\sin\varphi, \\
z &= l_1\cos\vartheta_1 + l_2\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2).
\end{aligned} \qquad (2)$$

Находим проекции скорости центра схвата на оси выбранной системы координат:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= [l_1\omega_0\cos\omega_0 t + l_2\cos(\omega_0 t + \epsilon t^2/2)\cdot(\omega_0 + \epsilon t)]\cos kt - \\
&- (l_1\sin\omega_0 t + l_2\sin(\omega_0 t + \epsilon t^2/2))\,k\sin kt, \\
\dot{y}(t) &= [l_1\omega_0\cos\omega_0 t + l_2\cos(\omega_0 t + \epsilon t^2/2)(\omega_0 + \epsilon t)]\sin kt + \\
&+ (l_1\sin\omega_0 t + l_2\sin(\omega_0 t + \epsilon t^2/2))\,k\cos kt, \\
\dot{z}(t) &= -l_1\omega_0\sin\omega_0 t - l_2(\omega_0 + \epsilon t)\sin(\omega_0 t + \epsilon t^2/2).
\end{aligned} \tag{3}$$

Модуль скорости

$$\begin{aligned}
v &= (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{1/2} = [l_1^2\omega_0^2 + 2l_1l_2\omega_0(\omega_0 + \epsilon t)\cos(\epsilon t^2/2) + \\
&+ l_2^2(\omega_0 + \epsilon t)^2 + (l_1 k\sin\omega_0 t + l_2 k\sin(\omega_0 t + \epsilon t^2/2))^2]^{1/2}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Для определения траектории схвата находим из первого уравнения системы (1)

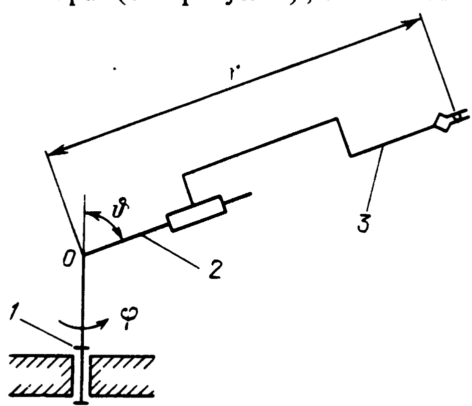
$$t = \frac{\varphi}{k}. \tag{5}$$

Внося это значение времени в два других уравнения системы (1), находим

$$\vartheta_1 = \frac{\omega_0}{k}\varphi, \quad \vartheta_2 = \frac{\epsilon}{2k^2}\varphi^2. \tag{6}$$

Эти уравнения определяют траекторию схвата. Для получения уравнений, описывающих траекторию схвата, необходимо подставить найденные значения углов (6) в систему (2).

Задача 7.27. Вертикальная колонна *1*, несущая руку *2* робота-манипулятора (см. рисунок), может поворачиваться на угол $\varphi(t) = bt$. Рука со схватом *3* поворачивается на угол $\vartheta(t) = kt$ и выдвигается на расстояние $r(t) = at^2/2$. Найти скорость и ускорение центра схвата, если a, b, k – постоянные.



К задаче 7.27

Р е ш е н и е. Чтобы найти скорость центра схвата в сферической системе координат, выразим декартовы координаты через его сферические координаты как функции времени t:

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta. \tag{1}$$

Вычисляя производные по времени от координат, находим проекции скорости на оси декартовой системы координат:

$$\dot{x} = \dot{r}\sin\vartheta\cos\varphi + r\cos\vartheta\cdot\dot{\vartheta}\cos\varphi - r\sin\vartheta\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} =$$

$$= at\sin kt\cos bt + \frac{at^2}{2}k\cos kt\cos bt - \frac{at^2}{2}b\sin kt\sin bt,$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\vartheta\sin\varphi + r\cos\vartheta\cdot\dot{\vartheta}\sin\varphi + r\sin\vartheta\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} = \qquad (2)$$

$$= at\sin kt\sin bt + \frac{at^2}{2}k\cos kt\sin bt + \frac{at^2}{2}b\sin kt\cos bt,$$

$$\dot{z} = \dot{r}\cos\vartheta - r\sin\vartheta\cdot\dot{\vartheta} = at\cos kt - \frac{at^2}{2}k\sin kt.$$

Модуль скорости

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{a^2t^2 + \frac{a^2t^4}{4}(k^2 + b^2\sin^2 kt)}. \qquad (3)$$

Переходим к определению ускорения. Находим проекции ускорения на декартовы оси координат, вычисляя производные по времени от проекций скорости:

$$\ddot{x} = \ddot{r}\sin\vartheta\cos\varphi + 2\dot{r}\cos\vartheta\cdot\dot{\vartheta}\cos\varphi - 2\dot{r}\sin\vartheta\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} -$$

$$- r\sin\vartheta\cdot\dot{\vartheta}^2\cos\varphi + r\cos\vartheta\cdot\ddot{\vartheta}\cos\varphi - 2r\cos\vartheta\cdot\dot{\vartheta}\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} -$$

$$- r\sin\vartheta\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 - r\sin\vartheta\sin\varphi\cdot\ddot{\varphi} = a\sin kt\cos bt +$$

$$+ 2at(k\cos kt\cos bt - b\sin kt\sin bt) - \frac{at^2}{2}\sin kt\cos bt(k^2 + b^2) -$$

$$- at^2kb\cos kt\sin bt,$$

$$\ddot{y} = \ddot{r}\sin\vartheta\sin\varphi + 2\dot{r}\cos\vartheta\cdot\dot{\vartheta}\sin\varphi + 2\dot{r}\sin\vartheta\cdot\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} - r\sin\vartheta\cdot\dot{\vartheta}^2\sin\varphi +$$

$$+ r\cos\vartheta\cdot\ddot{\vartheta}\sin\varphi + 2r\cos\vartheta\cdot\dot{\vartheta}\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} - r\sin\vartheta\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 +$$

$$+ r\sin\vartheta\cos\varphi\cdot\ddot{\varphi} = a\sin kt\sin bt + 2at(k\cos kt\sin bt + b\sin kt\cos bt) -$$

$$- \frac{at^2}{2}\sin kt\sin bt(k^2 + b^2) + at^2kb\cos kt\cos bt, \qquad (4)$$

$$\ddot{z} = \ddot{r}\cos\vartheta - 2\dot{r}\sin\vartheta\cdot\dot{\vartheta} - r\cos\vartheta\cdot\dot{\vartheta}^2 - r\sin\vartheta\cdot\ddot{\vartheta} =$$

$$= a\cos kt - 2atk\sin kt - \frac{at^2}{2}k^2\cos kt.$$

Модуль ускорения центра схвата

$$a_a = (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2)^{1/2} = \Big\{ a^2 + 3a^2t^2(k^2 + b^2\sin^2 kt) +$$

$$+ 2a^2b^2kt^3\cos kt \sin kt + \frac{a^2t^4}{4}[(k^2 + b^2\sin kt)^2 +$$

$$+ 2k^2b^2(1 - \sin kt + \cos^2 kt)]\Big\}^{1/2}. \qquad (5)$$

Для нахождения траектории схвата рассмотрим систему уравнений, заданных в условии задачи,

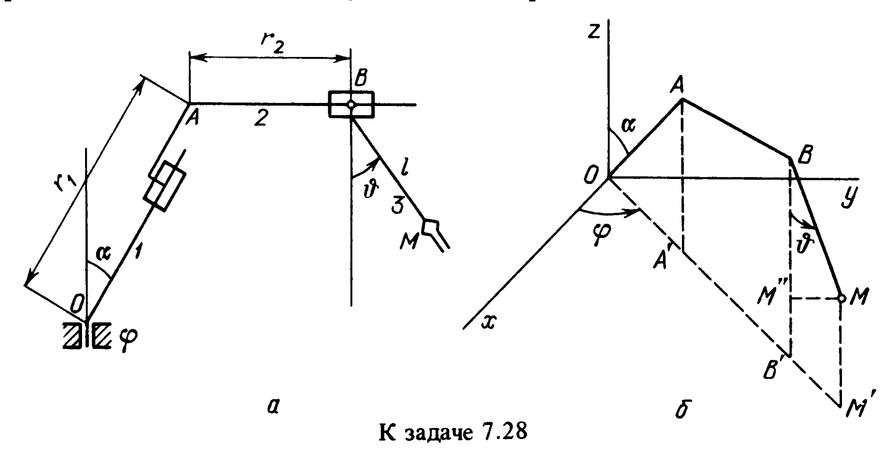
$$\varphi = bt, \quad \vartheta = kt, \quad r = at^2/2 \qquad (6)$$

как уравнения движения схвата. Тогда, находя из первого уравнения системы (6) время $t = \varphi/b$, внесем это значение времени в два последних уравнения системы (6) и получим

$$\vartheta = \frac{k}{b}\varphi, \quad r = \frac{a}{2b^2}\varphi^2. \qquad (7)$$

Система уравнений (7) определяет пространственную траекторию схвата: необходимо найденные значения (7) подставить в систему уравнений (1).

Задача 7.28. Механизм робота состоит из закрепленной на поворотном устройстве под постоянным углом α к вертикали колонны *1*, на которой



К задаче 7.28

закреплена посредством ползуна горизонтальная штанга *2*, к которой посредством ползуна и цилиндрического шарнира прикреплен стержень *3* постоянной длины l, могущий качаться в плоскости, образуемой двумя первыми стержнями. На конце стержня находится схват.

Найти скорость и ускорение центра схвата при заданных $r_1(t)$, $r_2(t)$, $\varphi(t)$, $\vartheta(t)$ (рис. *а*). Размерами ползунов и шарнира пренебречь.

Р е ш е н и е. Введем систему координат, поместив ее начало в нижней точке колонны 1 и направив ось z вертикально. Ось x расположим в начале отсчета угла φ. Обозначим через A точку начала горизонтальной штанги, через B – точку крепления шарнира, через M – центр схвата. Согласно условию имеем

$$OA = r_1(t), \quad AB = r_2(t), \quad BM = l. \tag{1}$$

Для нахождения скорости и ускорения удобнее использовать цилиндрические координаты. Считая за плоскость отсчета азимута плоскость xOz и проектируя ломаную $OABM$ на плоскость xOz, имеем

$$\rho = OM', \tag{2}$$

$$z = M'M. \tag{3}$$

Следовательно, (рис. *б*)

$$\rho = OA' + A'B' + B'M' = r_1 \sin\alpha + r_2 + l\sin\vartheta, \tag{4}$$

$$z = B'B - B'M'' = A'A - B'M'' = r_1\cos\alpha - l\cos\vartheta. \tag{5}$$

Проекции скорости в цилиндрических координатах:

$$v_\rho = \dot\rho, \quad v_\varphi = \rho\dot\varphi, \quad v_z = \dot z. \tag{6}$$

Отсюда, используя зависимости (4) и (5), находим

$$v_\rho = \dot r_1 \sin\alpha + \dot r_2 + l\cos\vartheta\cdot\dot\vartheta, \tag{7}$$

$$v_\varphi = (r_1\sin\alpha + r_2 + l\sin\vartheta)\dot\varphi, \tag{8}$$

$$v_z = \dot r_1\cos\alpha + l\sin\vartheta\cdot\dot\vartheta. \tag{9}$$

Поскольку

$$v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2 + v_z^2}, \tag{10}$$

то модуль скорости схвата равен

$$v = [(\dot r_1\sin\alpha + \dot r_2 + l\cos\vartheta\cdot\dot\vartheta) + (r_1\sin\alpha + r_2 + l\sin\vartheta)^2\dot\varphi^2 + \\ + (\dot r_1\cos\alpha + l\sin\vartheta\cdot\dot\vartheta)^2]^{1/2}. \tag{11}$$

Раскрывая скобки в первом и третьем слагаемом, можно преобразовать это выражение к несколько иному виду:

$$v = [\dot r_1^2 + l^2\dot\vartheta^2 + 2\dot r_1 l\sin(\alpha+\vartheta) + 2\dot r_2(\dot r_1\sin\alpha + l\cos\vartheta\cdot\dot\vartheta) + \\ + \dot r_2^2 + (r_1\sin\alpha + r_2 + l\sin\vartheta)^2\dot\varphi^2]^{1/2}. \tag{12}$$

Проекции ускорения в цилиндрических координатах определяются формулами

$$a_\rho = \ddot\rho - \rho\dot\varphi^2, \tag{13}$$

$$a_\varphi = 2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi, \tag{14}$$

$$a_z = \ddot z. \tag{15}$$

Из (7) имеем

$$\ddot{\rho} = \ddot{r}_1 \sin\alpha + \ddot{r}_2 + l\cos\vartheta \cdot \ddot{\vartheta} - l\sin\vartheta \cdot \dot{\vartheta}^2. \qquad (16)$$

Из (9) находим

$$\ddot{z} = \ddot{r}_1 \cos\alpha + l\sin\vartheta \cdot \ddot{\vartheta} + l\cos\vartheta \cdot \dot{\vartheta}^2. \qquad (17)$$

Подставляя в (13), (14), (15), получим

$$a_\rho = \ddot{r}_1 \sin\alpha + \ddot{r}_2 + l\cos\vartheta \cdot \ddot{\vartheta} - l\sin\vartheta \cdot \dot{\vartheta}^2 - (r_1 \sin\alpha + r_2 + l\sin\vartheta)\dot{\varphi}^2, \qquad (18)$$

$$a_\varphi = 2(\dot{r}_1 \sin\alpha + \dot{r}_2 + l\cos\vartheta \cdot \dot{\vartheta})\dot{\varphi} + (r_1 \sin\alpha + r_2 + l\sin\vartheta)\ddot{\varphi}, \qquad (19)$$

$$a_z = \ddot{r}_1 \cos\alpha + l\sin\vartheta \cdot \ddot{\vartheta} + l\cos\vartheta \cdot \dot{\vartheta}^2. \qquad (20)$$

Поскольку

$$a = (a_\rho^2 + a_\varphi^2 + a_z^2)^{1/2},$$

то

$$a = \{[\ddot{r}_1 \sin\alpha + \ddot{r}_2 + l\cos\vartheta \cdot \ddot{\vartheta} - l\sin\vartheta \cdot \dot{\vartheta}^2 - (r_1 \sin\alpha + r_2 + l\sin\vartheta)\dot{\varphi}^2]^2 +$$
$$+ [2(\dot{r}_1 \sin\alpha + \dot{r}_2 + l\cos\vartheta \cdot \dot{\vartheta})\dot{\varphi} + (r_1 \sin\alpha + r_2 + l\sin\vartheta)\ddot{\varphi}]^2 +$$
$$+ [\ddot{r}_1 \cos\alpha + l\sin\vartheta \cdot \ddot{\vartheta} + l\cos\vartheta \cdot \dot{\vartheta}^2]^2\}^{1/2}. \qquad (21)$$

Эту задачу можно решать и используя декартовы координаты $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, но это приводит к усложнению вычислений.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Учебное издание

БАТЬ Моисей Иосифович
ДЖАНЕЛИДЗЕ Георгий Юстинович
КЕЛЬЗОН Анатолий Саулович

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

том I

Статика и кинематика

Издание девятое, переработанное

Заведующий редакцией *Л.А. Русаков.* Редактор *Н.П. Рябенькая*
Художественный редактор *Т.Н. Кольченко*
Технические редакторы *О.Б. Черняк, М.И. Мешкова*
Корректоры *О.А. Бутусова. Н.П. Круглова, Т.А. Печко*

Набор осуществлен в издательстве на наборно-печатающих автоматах

ИБ № 41079

Сдано в набор 07.06.90. Подписано к печати 24.09.90. Формат 60 X 88/16
Бумага книжно-журнальная. Гарнитура Пресс-Роман. Печать офсетная
Усл. печ. л. 41,16. Усл. кр.-отт. 41,16. Уч.-изд. л. 38,27
Тираж 72700 экз. Тип. зак. 899. Цена 3 р. 90 к.

Издательско-производственное и книготорговое объединение "Наука"
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Типография им. Котлякова Издательства "Финансы и статистика"
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
195273 Ленинград, ул. Руставели, 13